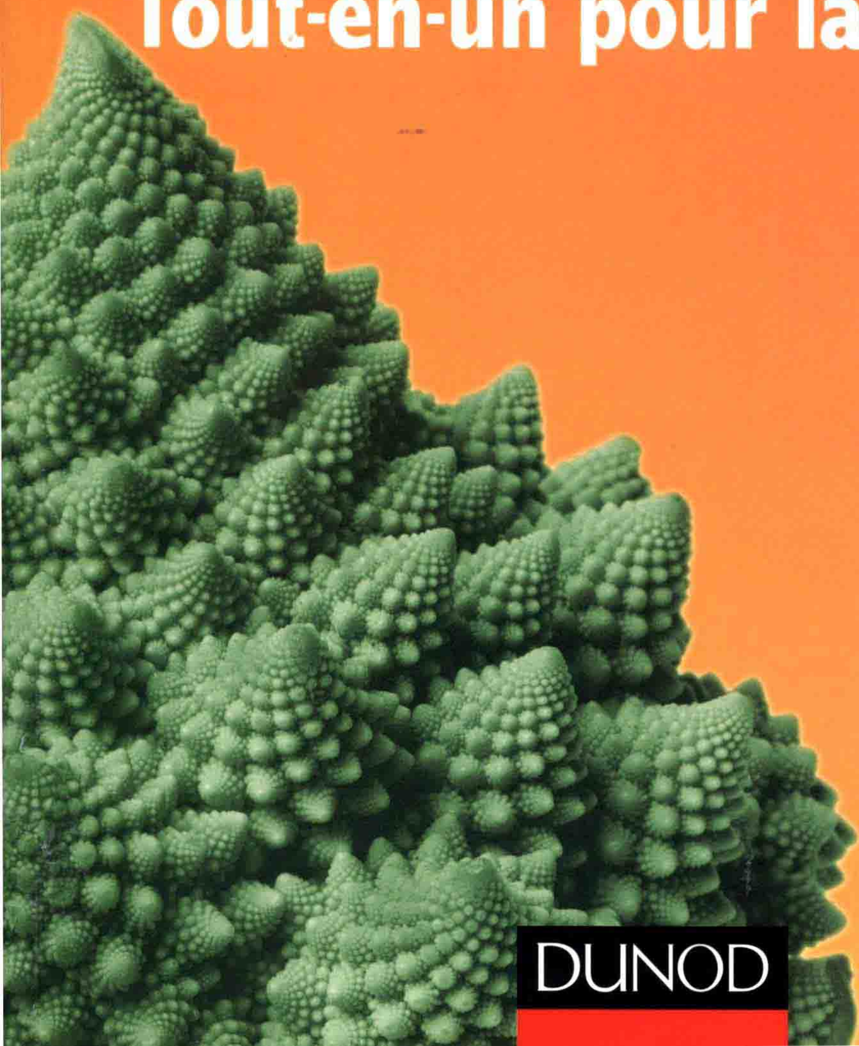
Sous la direction de
Jean-Pierre RAMIS
André WARUSFEL

Xavier BUFF • Josselin GARNIER
François MOULIN • Monique RAMIS
Jacques SAULOY

Mathématiques

Tout-en-un pour la Licence

3



- Cours complet
- 350 exercices

RESSOURCES NUMÉRIQUES

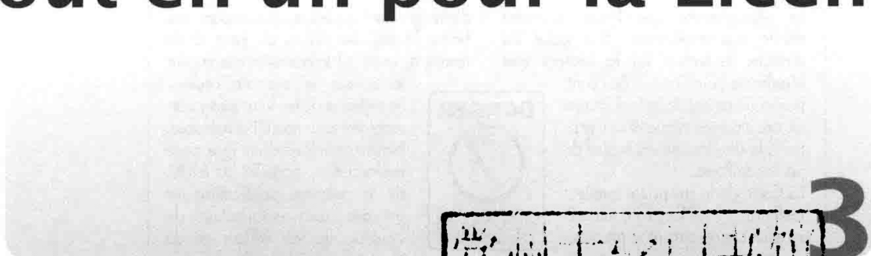
DUNOD

Sous la direction de
Jean-Pierre RAMIS
André WARUSFEL

Xavier BUFF • Josselin GARNIER
François MOULIN • Monique RAMIS
Jacques SAULOY

Mathématiques

Tout-en-un pour la Licence



3

DUNOD

Jean-Pierre Ramis, ancien élève de l'École normale supérieure de la rue d'Ulm, membre de l'Institut (Académie des Sciences), membre de l'Institut Universitaire de France, membre de l'Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-Lettres de Toulouse, professeur émérite à l'Institut de Mathématiques de Toulouse (Université Paul Sabatier).

André Warusfel, ancien élève de l'École normale supérieure de la rue d'Ulm, a été professeur de mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand à Paris et inspecteur général de mathématiques.

Xavier Buff, ancien élève de l'École normale supérieure de la rue d'Ulm, professeur à l'Institut de Mathématiques de Toulouse, directeur de l'Institut de Recherches sur l'Enseignement des Mathématiques de Toulouse.

Josselin Garnier, ancien élève de l'École normale supérieure de la rue d'Ulm, professeur à l'Université Paris Diderot, Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires & Laboratoire Jacques-Louis Lions.

François Moulin, ancien élève de l'École normale supérieure de la rue d'Ulm, professeur de chaires supérieures au lycée Sainte-Geneviève (spéciales MP*).

Monique Ramis, ancienne élève de l'École normale supérieure de Sèvres, a été professeur de chaires supérieures (à Paris, Strasbourg, Toulouse).

Jacques Sauloy, ancien élève de l'École normale supérieure de Saint-Cloud, maître de conférences à l'Institut de Mathématiques de Toulouse.

Illustration de couverture : © PicturePartners - istockphoto.com

5 rue Laromiguière, 75005 Paris
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-071689-0

Préface

Les mathématiques constituent l'ossature de la science moderne et sont une source intarissable de concepts nouveaux d'une efficacité incroyable pour la compréhension de la réalité matérielle qui nous entoure. Ainsi l'apprentissage des mathématiques est devenu indispensable pour la compréhension du monde par la science. Les nouveaux concepts eux-mêmes sont le résultat d'un long processus de distillation dans l'alambic de la pensée. Essayer de justifier les mathématiques par leurs applications pratiques n'a guère de sens, tant ce processus de création est sous-tendu par la soif de connaître et non l'intérêt immédiat.
Les mathématiques restent l'un des domaines dans lequel la France excelle et ceci malgré la mutilation des programmes dans le secondaire et l'influence néfaste d'un pédagogisme dont l'effet principal est de compliquer les choses simples.
Vues de loin les mathématiques apparaissent comme la réunion de sujets distincts comme la géométrie, qui a pour objet la compréhension du concept d'espace, l'algèbre, art de manipuler les symboles, l'analyse, science de l'infini et du continu, la théorie des nombres etc. Cette division ne rend pas justice à l'un des traits essentiels des mathématiques qui est leur unité profonde de sorte qu'il est impossible d'en isoler une partie sans la priver de son essence. En ce sens les mathématiques ressemblent à un être biologique qui ne peut survivre que comme un tout et serait condamné à périr si on le découpait en morceaux en oubliant son unité fondamentale.
L'une des caractéristiques de l'apprentissage des mathématiques, c'est la possibilité donnée à tout étudiant de devenir son propre maître et en ce sens il n'y a pas d'autorité en mathématiques. Seules la preuve et la rigueur y font la loi. L'étudiant peut atteindre par le travail une maîtrise suffisante pour pouvoir s'il le faut tenir tête au maître. La rigueur, c'est être sûr de soi, et à l'âge où l'on construit sa personnalité, se confronter au monde mathématique est le moyen le plus sûr de construire sur un terrain solide. Il faut, si l'on veut avancer, respecter un équilibre entre les connaissances qui sont indispensables et le « savoir-faire » qui l'est autant. On apprend les maths en faisant des exercices, en apprenant à calculer sans l'aide de l'ordinateur, en se posant des questions et en ne lâchant pas prise facilement devant la difficulté. Seule la confrontation réelle à la difficulté a une valeur formatrice, en rupture avec ce pédagogisme qui complique les choses simples et mélange l'abstraction mathématique avec le jeu qui n'a vraiment rien à voir. Non, les mathématiques ne sont pas un jeu et l'on n'apprend pas les mathématiques en s'amusant.
L'ouvrage qui suit est un cours soigné et complet idéal pour apprendre toutes les Mathématiques qui sont indispensables au niveau de la Licence. Il regorge d'exercices (350) qui

incitent le lecteur à réfléchir et ne sont pas de simples applications de recettes, et respecte parfaitement l'équilibre nécessaire entre connaissances et savoir-faire, permettant à l'étudiant de construire des images mentales allant bien au-delà de simples connaissances mémorisées. Il s'agit d'un ouvrage de référence pour la Licence, non seulement pour les étudiants en mathématiques mais aussi pour tous ceux qui s'orientent vers d'autres disciplines scientifiques. Il insiste sur la rigueur et la précision et va au fond des notions fondamentales les plus importantes sans mollir devant la difficulté et en respectant constamment l'unité des mathématiques qui interdit tout cloisonnement artificiel. Il répond à une demande de tant de nos collègues d'un ouvrage qui les aide à « redresser la barre », mais sera aussi un atout merveilleux pour l'étudiant travaillant seul par la cohérence et la richesse de son contenu. Il est l'œuvre d'une équipe qui rassemble des mathématiciens de tout premier plan ayant une véritable passion pour l'enseignement. Il était grand temps !

Alain Connes,
Médaille Fields 1982,
Professeur au Collège de France.

Avant-propos

Cet ouvrage est le dernier d'une série de trois, conçue pour couvrir les programmes de mathématiques de la plupart des Licences scientifiques.
Il complète le précédent en traitant certains sujets habituellement enseignés au niveau de la deuxième année de Licence et couvre par ailleurs un « tronc commun » des programmes de mathématiques au niveau de la troisième année.

Ce cours est illustré d'exemples et applications, il propose de plus au fil du texte de nombreux exercices corrigés qui permettront à l'étudiant de s'entraîner au fur et à mesure de son apprentissage, des notices historiques et un index très complet. On trouvera aussi à la fin de chaque module des exercices supplémentaires[1] avec des indications de solutions. Une correction détaillée d'une grande partie de ces exercices est accessible sur le site de l'éditeur.

Nos livres sont conçus comme une aide à l'enseignement oral dispensé par nos collègues dans les cours et travaux dirigés. L'ordre de lecture n'est pas complètement imposé et chaque étudiant peut se concentrer sur tel ou tel aspect en fonction de son programme et de son travail personnel.
Ce livre peut aussi être utilisé par un enseignant comme ouvrage de base pour son cours, dans l'esprit d'une pédagogie encore peu utilisée en France, mais qui a largement fait ses preuves ailleurs. Nous avons aussi pensé à l'étudiant travaillant seul, sans appui d'un corps professoral.

Dans les mathématiques d'aujourd'hui, un certain nombre de théories puissantes sont au premier plan. Leur maniement, au moins à un certain niveau dépendant de la filière choisie, devra évidemment être acquis par l'étudiant à la fin de ses années de Licence. Mais celui-ci devra aussi avoir appris à calculer, sans s'appuyer exagérément sur les ordinateurs et les logiciels, et à savoir « se débrouiller » devant un problème abstrait ou issu des applications. Nous avons, à cette fin, mis en place une approche adaptée. Nous insistons aussi sur les exigences de rigueur (définitions précises, démonstrations rigoureuses), mais les choses sont mises en place de façon progressive et pragmatique, et nous proposons des exemples riches, dont l'étude met souvent en œuvre des approches multiples. Nous aidons progressivement le lecteur à acquérir le maniement d'un outillage abstrait puissant, sans jamais nous complaire dans l'abstraction pour elle-même, ni un formalisme sec et gratuit : le cœur des mathématiques n'est sans doute pas un corpus de théories, si profondes et efficaces soient-elles, mais

[1] Les plus difficiles sont marqués d'une ou deux étoiles.

un certain nombre de problèmes dans toute leur complexité, souvent issus d'une réflexion sur le monde qui nous entoure.

Historiquement, les mathématiques se sont développées pendant des siècles en relation avec les autres sciences. De nos jours, leurs interactions se poursuivent vigoureusement (avec la physique, l'informatique, la mécanique, la chimie, la biologie, l'économie...). Nous souhaitons accompagner ce mouvement au niveau de l'enseignement des premières années d'université et aider à la mise en place, ici ou là, de filières scientifiques pluridisciplinaires contenant une composante mathématique pure ou appliquée. En particulier, nous avons introduit dans nos ouvrages de solides initiations aux probabilités et statistique ainsi qu'à l'algorithmique.

Malgré tout le soin apporté à cet ouvrage il est inévitable que quelques erreurs subsistent. Nous prions le lecteur, qui pourra les signaler à l'éditeur ou à l'un d'entre nous pour correction lors d'un nouveau tirage, de nous en excuser.

Jean-Pierre Ramis, André Warusfel

Vous pouvez accéder aux corrigés des exercices supplémentaires à partir de la page de présentation de l'ouvrage sur le site de l'éditeur `www.dunod.com`*. Les corrigés sont au format pdf et permettent une recherche classique par mots clef. Ils peuvent être lus, enregistrés ou imprimés en partie comme en totalité.*

Table des matières

II Géométrie

III Analyse

IV Probabilités

Algèbre

Partie I

Arithmétique

I.1

On attribue à Gauß (lui-même surnommé « le prince des mathématiciens ») la phrase selon laquelle « les mathématiques sont la reine des sciences et la théorie des nombres est la reine des mathématiques ». C'est sans conteste le domaine où l'activité des mathématiciens a été le plus purement motivée par la beauté et le plaisir. Trois mutations ont progressivement changé le caractère de l'arithmétique (c'est l'autre nom de la théorie des nombres) telle que l'avait connue Gauß :

1. Sous son influence, puis sous celle d'autres mathématiciens du XIX^{e} siècle (surtout allemands !), de profondes techniques d'algèbre puis d'analyse (et même, au XX^{e} siècle, de géométrie algébrique) ont renforcé l'arsenal de l'arithméticien.

2. Au XX^{e} siècle, des problèmes de pure théorie des nombres ont rencontré des échos en physique.

3. Encore au XX^{e} siècle, des applications financières et même militaires lui sont tombées dessus ! Il s'agit bien entendu des questions de sécurité de communication : cryptographie, authentification ...

Ce chapitre commencera donc par un peu d'outillage algébrique (section 1, consacrée à une approche abstraite de la théorie de la divisibilité et de la factorisation), complété par la section 2, intermédiaire entre l'algèbre et l'arithmétique, et qui comportera des applications informatiques ; et il se terminera par un pont avec la théorie des fonctions spéciales (section 6), qui jouent un rôle essentiel en physique ; cet aspect sera développé dans le module III.3 de ce volume sur les polynômes orthogonaux ; les aspects proprement arithmétiques des fractions continues pourront être approfondis dans le livre [MPA1]. Entre ces limites, les sections 3, 4 et 5 permettront de jouer avec des problèmes remontant à Fermat, Euler, Lagrange, Gauß, Legendre... et dont certains (critères de primalité) jouissent d'un intérêt renouvelé depuis quelques années.
Nous avons proposé dans la bibliographie quelques livres qui vous permettront d'approfondir les sujets abordés dans ce module et d'en découvrir d'autres. Les ouvrages [HW] et [Serre] sont de grands classiques que tout mathématicien, même amateur, devrait posséder (le second est toutefois nettement plus avancé que le premier). [Demazure] fait le lien avec les applications informatiques, que [Knuth2] (qui est beaucoup plus ancien) développe de manière détaillée. [Baker] et [Hindry] sont très riches, mais d'un abord plus difficile.

Comme des notions plus générales vont apparaître, précisons que nous réservons l'appellation de *nombre premier* aux entiers naturels premiers : $2, 3, 5, 7 \ldots$.

1 Divisibilité dans un anneau commutatif

Notre but est de généraliser autant que possible le *théorème fondamental de l'arithmétique* : existence pour tout entier d'une factorisation essentiellement unique en produit de nombres premiers. Le cadre est ici celui des anneaux commutatifs intègres (autrement, les difficultés techniques seraient trop grandes). Les éléments les plus caractéristiques de l'arithmétique d'un tel anneau sont ses *unités*, *i.e.* ses éléments inversibles (ce sont eux qui empêchent la décomposition d'être vraiment unique) ; et, bien entendu, ses éléments irréductibles et ses éléments premiers : nous verrons que ces deux termes ne désignent pas exactement la même chose, et c'est même là le cœur du problème !

1.1 Anneaux euclidiens et anneaux principaux

Résumons l'enchaînement logique des propriétés arithmétiques des anneaux intègres $\mathbb{Z}$ et $K[X]$ (K un corps commutatif), telles qu'on les a établies dans le livre [L1] :

1. Dans $\mathbb{Z}$ et dans $K[X]$, on dispose d'une *division euclidienne*.
2. Les anneaux $\mathbb{Z}$ et $K[X]$ sont principaux. On en déduit le théorème de Bézout, le lemme de Gauß et le lemme d'Euclide.
3. Dans $\mathbb{Z}$ et dans $K[X]$, tout élément admet une factorisation essentiellement unique en produit de facteurs irréductibles.

Nous allons maintenant formaliser (ici et dans la section 1.2) les liens logiques entre ces propriétés en vue d'applications plus générales.

Définition 1. Un anneau (commutatif intègre) A est dit *euclidien* s'il admet un *stathme euclidien*, c'est-à-dire une application $g : A \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ telle que, pour tout couple (x, y) d'éléments de A :

1. Si $x, y \neq 0$ et $x \mid y$, alors $g(x) \leqslant g(y)$. De manière équivalente, si $x, x' \neq 0$, alors $g(x) \leqslant g(xx')$.
2. Si $x \neq 0$, il existe $q, r \in A$ tels que $y = qx + r$ et : soit $r = 0$; soit $g(r) < g(x)$.

Les éléments q et r sont appelés *quotient* et *reste* de la *division euclidienne*. On ne requiert *pas* l'unicité de la division euclidienne.

L'exemple qui suit sera fondamental dans les applications arithmétiques de ce chapitre. On rappelle que $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ désigne l'anneau des entiers de Gauß $a + b\mathrm{i}$, $a, b \in \mathbb{Z}$ et que la norme algébrique N est définie par $N(z) := z\overline{z}$ (on approfondira ces notions en 4.1).

Exercice 1.
Démontrer que, pour tout complexe $z \in \mathbb{C}$, il existe un entier de Gauß q tel que $N(z - q) < 1$, où N est la norme algébrique sur $\mathbb{C}$. En déduire que N est un stathme euclidien sur $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$.