

Sous la direction de
Jean-Pierre RAMIS
André WARUSFEL

Xavier BUFF ■ Josselin GARNIER
François MOULIN ■ Monique RAMIS
Jacques SAULOY

Mathématiques

Tout-en-un pour la Licence

3

▶ Cours complet
▶ 350 exercices



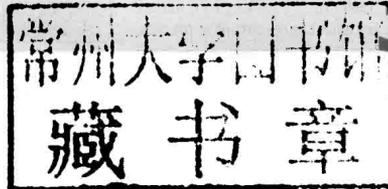
DUNOD

Sous la direction de
Jean-Pierre RAMIS
André WARUSFEL

Xavier BUFF • Josselin GARNIER
François MOULIN • Monique RAMIS
Jacques SAULOY

Mathématiques

Tout-en-un pour la Licence



DUNOD

Jean-Pierre Ramis, ancien élève de l'École normale supérieure de la rue d'Ulm, membre de l'Institut (Académie des Sciences), membre de l'Institut Universitaire de France, membre de l'Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-Lettres de Toulouse, professeur émérite à l'Institut de Mathématiques de Toulouse (Université Paul Sabatier).

André Warusfel, ancien élève de l'École normale supérieure de la rue d'Ulm, a été professeur de mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand à Paris et inspecteur général de mathématiques.

Xavier Buff, ancien élève de l'École normale supérieure de la rue d'Ulm, professeur à l'Institut de Mathématiques de Toulouse, directeur de l'Institut de Recherches sur l'Enseignement des Mathématiques de Toulouse.

Josselin Garnier, ancien élève de l'École normale supérieure de la rue d'Ulm, professeur à l'Université Paris Diderot, Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires & Laboratoire Jacques-Louis Lions.

François Moulin, ancien élève de l'École normale supérieure de la rue d'Ulm, professeur de chaires supérieures au lycée Sainte-Geneviève (spéciales MP*).

Monique Ramis, ancienne élève de l'École normale supérieure de Sèvres, a été professeur de chaires supérieures (à Paris, Strasbourg, Toulouse).

Jacques Sauloy, ancien élève de l'École normale supérieure de Saint-Cloud, maître de conférences à l'Institut de Mathématiques de Toulouse.

Illustration de couverture : © PicturePartners - istockphoto.com

<p>Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.</p> <p>Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique</p>	<p>d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).</p>
	

© Dunod, 2015

5 rue Laromiguière, 75005 Paris

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-071689-0

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Préface

Les mathématiques constituent l'ossature de la science moderne et sont une source intarissable de concepts nouveaux d'une efficacité incroyable pour la compréhension de la réalité matérielle qui nous entoure. Ainsi l'apprentissage des mathématiques est devenu indispensable pour la compréhension du monde par la science. Les nouveaux concepts eux-mêmes sont le résultat d'un long processus de distillation dans l'alambic de la pensée. Essayer de justifier les mathématiques par leurs applications pratiques n'a guère de sens, tant ce processus de création est sous-tendu par la soif de connaître et non l'intérêt immédiat.

Les mathématiques restent l'un des domaines dans lequel la France excelle et ceci malgré la mutilation des programmes dans le secondaire et l'influence néfaste d'un pédagogisme dont l'effet principal est de compliquer les choses simples.

Vues de loin les mathématiques apparaissent comme la réunion de sujets distincts comme la géométrie, qui a pour objet la compréhension du concept d'espace, l'algèbre, art de manipuler les symboles, l'analyse, science de l'infini et du continu, la théorie des nombres etc. Cette division ne rend pas justice à l'un des traits essentiels des mathématiques qui est leur unité profonde de sorte qu'il est impossible d'en isoler une partie sans la priver de son essence. En ce sens les mathématiques ressemblent à un être biologique qui ne peut survivre que comme un tout et serait condamné à périr si on le découpait en morceaux en oubliant son unité fondamentale.

L'une des caractéristiques de l'apprentissage des mathématiques, c'est la possibilité donnée à tout étudiant de devenir son propre maître et en ce sens il n'y a pas d'autorité en mathématiques. Seules la preuve et la rigueur y font la loi. L'étudiant peut atteindre par le travail une maîtrise suffisante pour pouvoir s'il le faut tenir tête au maître. La rigueur, c'est être sûr de soi, et à l'âge où l'on construit sa personnalité, se confronter au monde mathématique est le moyen le plus sûr de construire sur un terrain solide. Il faut, si l'on veut avancer, respecter un équilibre entre les connaissances qui sont indispensables et le « savoir-faire » qui l'est autant. On apprend les maths en faisant des exercices, en apprenant à calculer sans l'aide de l'ordinateur, en se posant des questions et en ne lâchant pas prise facilement devant la difficulté. Seule la confrontation réelle à la difficulté a une valeur formatrice, en rupture avec ce pédagogisme qui complique les choses simples et mélange l'abstraction mathématique avec le jeu qui n'a vraiment rien à voir. Non, les mathématiques ne sont pas un jeu et l'on n'apprend pas les mathématiques en s'amusant.

L'ouvrage qui suit est un cours soigné et complet idéal pour apprendre toutes les Mathématiques qui sont indispensables au niveau de la Licence. Il regorge d'exercices (350) qui

incitent le lecteur à réfléchir et ne sont pas de simples applications de recettes, et respecte parfaitement l'équilibre nécessaire entre connaissances et savoir-faire, permettant à l'étudiant de construire des images mentales allant bien au-delà de simples connaissances mémorisées. Il s'agit d'un ouvrage de référence pour la Licence, non seulement pour les étudiants en mathématiques mais aussi pour tous ceux qui s'orientent vers d'autres disciplines scientifiques. Il insiste sur la rigueur et la précision et va au fond des notions fondamentales les plus importantes sans mollir devant la difficulté et en respectant constamment l'unité des mathématiques qui interdit tout cloisonnement artificiel. Il répond à une demande de tant de nos collègues d'un ouvrage qui les aide à « redresser la barre », mais sera aussi un atout merveilleux pour l'étudiant travaillant seul par la cohérence et la richesse de son contenu. Il est l'œuvre d'une équipe qui rassemble des mathématiciens de tout premier plan ayant une véritable passion pour l'enseignement. Il était grand temps !

Alain Connes,
Médaille Fields 1982,
Professeur au Collège de France.

Avant-propos

Cet ouvrage est le dernier d'une série de trois, conçue pour couvrir les programmes de mathématiques de la plupart des Licences scientifiques.

Il complète le précédent en traitant certains sujets habituellement enseignés au niveau de la deuxième année de Licence et couvre par ailleurs un « tronc commun » des programmes de mathématiques au niveau de la troisième année.

Ce cours est illustré d'exemples et applications, il propose de plus au fil du texte de nombreux exercices corrigés qui permettront à l'étudiant de s'entraîner au fur et à mesure de son apprentissage, des notices historiques et un index très complet. On trouvera aussi à la fin de chaque module des exercices supplémentaires¹ avec des indications de solutions. Une correction détaillée d'une grande partie de ces exercices est accessible sur le site de l'éditeur.

Nos livres sont conçus comme une aide à l'enseignement oral dispensé par nos collègues dans les cours et travaux dirigés. L'ordre de lecture n'est pas complètement imposé et chaque étudiant peut se concentrer sur tel ou tel aspect en fonction de son programme et de son travail personnel.

Ce livre peut aussi être utilisé par un enseignant comme ouvrage de base pour son cours, dans l'esprit d'une pédagogie encore peu utilisée en France, mais qui a largement fait ses preuves ailleurs. Nous avons aussi pensé à l'étudiant travaillant seul, sans appui d'un corps professoral.

Dans les mathématiques d'aujourd'hui, un certain nombre de théories puissantes sont au premier plan. Leur maniement, au moins à un certain niveau dépendant de la filière choisie, devra évidemment être acquis par l'étudiant à la fin de ses années de Licence. Mais celui-ci devra aussi avoir appris à calculer, sans s'appuyer exagérément sur les ordinateurs et les logiciels, et à savoir « se débrouiller » devant un problème abstrait ou issu des applications. Nous avons, à cette fin, mis en place une approche adaptée. Nous insistons aussi sur les exigences de rigueur (définitions précises, démonstrations rigoureuses), mais les choses sont mises en place de façon progressive et pragmatique, et nous proposons des exemples riches, dont l'étude met souvent en œuvre des approches multiples. Nous aidons progressivement le lecteur à acquérir le maniement d'un outillage abstrait puissant, sans jamais nous complaire dans l'abstraction pour elle-même, ni un formalisme sec et gratuit : le cœur des mathématiques n'est sans doute pas un corpus de théories, si profondes et efficaces soient-elles, mais

¹Les plus difficiles sont marqués d'une ou deux étoiles.

un certain nombre de problèmes dans toute leur complexité, souvent issus d'une réflexion sur le monde qui nous entoure.

Historiquement, les mathématiques se sont développées pendant des siècles en relation avec les autres sciences. De nos jours, leurs interactions se poursuivent vigoureusement (avec la physique, l'informatique, la mécanique, la chimie, la biologie, l'économie...). Nous souhaitons accompagner ce mouvement au niveau de l'enseignement des premières années d'université et aider à la mise en place, ici ou là, de filières scientifiques pluridisciplinaires contenant une composante mathématique pure ou appliquée. En particulier, nous avons introduit dans nos ouvrages de solides initiations aux probabilités et statistique ainsi qu'à l'algorithmique.

Malgré tout le soin apporté à cet ouvrage il est inévitable que quelques erreurs subsistent. Nous prions le lecteur, qui pourra les signaler à l'éditeur ou à l'un d'entre nous pour correction lors d'un nouveau tirage, de nous en excuser.

Jean-Pierre Ramis, André Warusfel

Vous pouvez accéder aux corrigés des exercices supplémentaires à partir de la page de présentation de l'ouvrage sur le site de l'éditeur www.dunod.com. Les corrigés sont au format pdf et permettent une recherche classique par mots clef. Ils peuvent être lus, enregistrés ou imprimés en partie comme en totalité.

Table des matières

Préface	iii
Avant-propos	xi

I Algèbre

1.1 Arithmétique	3
1 Divisibilité dans un anneau commutatif	4
1.1 Anneaux euclidiens et anneaux principaux	4
1.2 Anneaux principaux et anneaux factoriels	7
1.3 Polynômes sur un anneau factoriel	12
2 Le groupe multiplicatif de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	13
2.1 Rappels sur $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$	13
2.2 Le groupe multiplicatif d'un corps fini	14
2.3 Le groupe multiplicatif de l'anneau $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$	15
2.4 Deux applications informatiques	16
3 Résidus quadratiques	21
3.1 Carrés dans un corps fini	21
3.2 Symbole de Legendre	22
3.3 Loi de réciprocité quadratique	24
3.4 Symbole de Jacobi	27
4 Sommes de deux carrés	30
4.1 Rappels sur l'anneau des entiers de Gauß	30
4.2 Sommes de deux carrés : théorème de Fermat et Euler	33
4.3 Sommes de trois et de quatre carrés	35
5 Nombres premiers, critères de primalité	37
5.1 Aspects pratiques	39
5.2 Mauvaises méthodes	42
5.3 Bonnes méthodes probabilistes : Solovay-Strassen	45
5.4 Bonnes méthodes déterministes	46
5.5 Deux classes spéciales de nombres premiers	50
6 Fractions continues	53
6.1 Compléments à l'algorithme d'Euclide	53
6.2 Développement en fraction continue dans \mathbb{Q} et dans $K(X)$	56
6.3 Les réduites d'une fraction continue sur un corps arbitraire	58
6.4 Développement en fraction continue d'un réel	61
6.5 Développement en fraction continue d'une série formelle	64
Exercices	66

II Géométrie

II.1 Surfaces	77
1 Nappes paramétrées	78
1.1 Définitions	78
1.2 Nappes géométriques	81
1.3 Plan tangent, espace tangent	83
1.4 Position par rapport au plan tangent	87
2 Surfaces implicites	94
2.1 Définitions	94
2.2 Sous-variétés lisses	95
2.3 Espace et plan tangent	96
2.4 Intersection de deux surfaces	98
3 Exemples	101
3.1 Nappes réglées	101
3.2 Nappes de révolution	103
3.3 Quadriques	106
Exercices	115

III Analyse

II.1 Intégration	123
1 Initiation aux intégrales multiples	125
1.1 Intégration sur un pavé	127
1.2 Intégration sur un ensemble cubable	145
1.3 Intégrales itérées et théorème de Fubini	157
1.4 Formule de changement de variables	165
1.5 Intégrales multiples généralisées	175
2 L'intégrale de Henstock-Kurzweil	195
2.1 Intégrale de Henstock-Kurzweil sur un segment	195
2.2 Le théorème fondamental de l'analyse	217
2.3 Intégrale de Henstock-Kurzweil sur un intervalle quelconque	223
2.4 Le lemme de Henstock	229
2.5 Lemme de Vitali et différentiabilité des intégrales indéfinies	233
2.6 Fonctions absolument intégrables	236
2.7 Les théorèmes de convergence	244
2.8 Fonction définie par une intégrale : continuité et dérivabilité	255
2.9 Intégrale de Henstock-Kurzweil des fonctions à valeurs dans un espace vec- toriel de dimension finie	257
3 Intégrale de Henstock-Kurzweil et mesure de Lebesgue	260
3.1 Mesure de Lebesgue — Ensembles négligeables	261
3.2 Ensembles et fonctions mesurables	270
3.3 Espaces L^1 et L^2	284

4	Intégrales multiples au sens de Henstock-Kurzweil	291
4.1	Définition et premières propriétés	291
4.2	Théorème de Fubini	294
4.3	Intégrales sur un ouvert de \mathbb{R}^n	296
4.4	Formule de changement de variable	303
	Exercices	306
III.2	Introduction aux équations aux dérivées partielles	323
1	Généralités	323
1.1	Définitions et premiers exemples	323
1.2	Problèmes bien posés	326
1.3	Équations linéaires.	332
2	Équations d'ordre 1	333
2.1	Équations de transport	333
2.2	Méthode des caractéristiques	337
2.3	Le problème de Cauchy en dimension 2	341
3	Équations linéaires d'ordre 2	347
3.1	Caractéristiques et classification des équations	347
3.2	Réduction aux formes standards.	352
4	Équations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants	358
4.1	L'équation des ondes uni-dimensionnelle	358
4.2	Méthode de séparation de variables	364
4.3	L'équation des cordes	365
4.4	L'équation de la chaleur uni-dimensionnelle	372
	Exercices	374
III.3	Polynômes orthogonaux	379
1	Introduction	379
2	Généralités	380
2.1	Introduction	380
2.2	Formules de récurrence et formule de Darboux-Christoffel	385
2.3	Les zéros des polynômes orthogonaux	392
2.4	Approximation et formules de quadrature	394
3	Polynômes orthogonaux classiques	403
3.1	Équations différentielles et polynômes orthogonaux.	405
3.2	Formule d'Olinde Rodrigues	421
3.3	Polynômes de Jacobi et cas particuliers (Legendre et Tchebychev)	428
3.4	Polynômes d'Hermite	437
3.5	Polynômes de Laguerre	446
3.6	Séries génératrices.	450
3.7	Propriétés de densité pour les polynômes d'Hermite et de Laguerre	454
3.8	Tables des polynômes orthogonaux classiques	458
4	Compléments	463
4.1	Déterminants de Hankel, approximants de Padé	463
4.2	Polynômes orthogonaux et fractions continues	487
	Exercices	493

IV Probabilités

IV.1 Notions fondamentales sur les probabilités	509
1 Ensemble fondamental et événements	509
1.1 Ensemble fondamental	509
1.2 La notion d'événement	510
1.3 La notion de tribu	511
2 Probabilités	512
2.1 Propriétés élémentaires d'une probabilité	513
2.2 Probabilité uniforme sur un ensemble fini	516
2.3 Probabilités sur un ensemble dénombrable	518
2.4 Probabilités uniformes sur \mathbb{R} (ou \mathbb{R}^d)	519
2.5 Probabilités de réunions d'ensembles : règle d'inclusion-exclusion	521
3 Probabilités conditionnelles	524
3.1 Intuition et définition	524
3.2 Formule de Bayes	526
3.3 Conditionnement multiple	529
4 Indépendance	530
4.1 Indépendance de deux événements	530
4.2 Indépendance de plusieurs événements	532
4.3 Construction d'un espace de probabilité	534
4.4 Probabilité de réunions d'événements indépendants	536
5 Problèmes et paradoxes	540
5.1 Un exemple classique : la ruine du joueur	540
5.2 Paradoxes	542
6 Complément : Équations aux différences	545
Exercices	546
IV.2 Variables aléatoires discrètes	551
1 Lois et variables aléatoires discrètes	551
1.1 Définitions	551
1.2 Histogrammes	553
2 Quelques lois usuelles	554
2.1 Loi de Bernoulli	554
2.2 Loi binomiale et nombre de succès	555
2.3 Temps d'attente et loi géométrique	558
2.4 Échantillonnage et loi hypergéométrique	559
3 Espérance de variables aléatoires discrètes réelles	561
3.1 Définition de l'espérance	561
3.2 Propriétés élémentaires de l'espérance	562
3.3 Propriétés de transport	564
3.4 Quelques remarques	565
3.5 Variance	566
3.6 Espérances et variances pour des lois usuelles	567

4	Problèmes d'approximation	571
4.1	Approximation de la loi hypergéométrique	571
4.2	Approximation de la loi binomiale, loi de Poisson	573
5	Familles de variables aléatoires	574
5.1	Loi d'un vecteur aléatoire	574
5.2	Covariance et corrélation	576
5.3	Indépendance	578
5.4	Indépendance et covariance	579
5.5	Schéma succès-échec infini	582
6	Fonctions génératrices	584
6.1	Définition	584
6.2	Cas des vecteurs aléatoires	586
6.3	Indépendance et convolution	587
6.4	Fonctions génératrices de lois usuelles	588
6.5	Sommes aléatoires de v.a. indépendantes	591
	Exercices	593
IV.3	Variables aléatoires à densité	597
1	Variables aléatoires réelles	597
1.1	Définition	597
1.2	Loi et fonction de répartition	598
2	Variables à densité	600
2.1	Densité de probabilité	600
2.2	Lois usuelles	601
2.3	Caractérisation des v.a. réelles à densité	604
3	Moments de variables aléatoires à densité	605
3.1	Espérance	605
3.2	Moments	608
3.3	Moments des lois usuelles	609
3.4	Inégalités célèbres	611
4	Vecteurs aléatoires	612
4.1	Définition et loi	612
4.2	Vecteur aléatoire à densité	612
5	Indépendance	614
5.1	Définition	614
5.2	Indépendance de variables aléatoires à densité	616
5.3	Covariance et variance	618
5.4	Somme de variables aléatoires à densité indépendantes	620
5.5	Vecteurs gaussiens	622
6	Simulation de variables aléatoires	628
6.1	Simulation d'une v.a. uniforme	628
6.2	Méthode de la fonction inverse	629
6.3	Simulation d'une v. a. discrète	631
6.4	Simulation d'une v. a. gaussienne	631
6.5	Méthode du rejet pour une loi uniforme	632
	Exercices	635

IV.4 Théorèmes limites et estimation	639
1 Loi des grands nombres	639
1.1 Loi faible des grands nombres	639
1.2 Loi forte des grands nombres	640
2 Théorème de la limite centrale	642
2.1 Approximation normale de la loi binomiale	642
2.2 Énoncé du théorème	645
3 Estimation	650
3.1 But de l'estimation.	650
3.2 Qualités d'un estimateur	651
3.3 Estimateurs usuels.	652
4 Intervalles de confiance	656
4.1 Intervalle de confiance et estimation	656
4.2 Échantillons gaussiens	657
4.3 Échantillons non gaussiens.	665
Exercices	669
 Bibliographie	 675
 Indications	 677
 Index	 691

Algèbre

Partie I

Arithmétique

I.1

On attribue à Gauß (lui-même surnommé « le prince des mathématiciens ») la phrase selon laquelle « les mathématiques sont la reine des sciences et la théorie des nombres est la reine des mathématiques ». C'est sans conteste le domaine où l'activité des mathématiciens a été le plus purement motivée par la beauté et le plaisir. Trois mutations ont progressivement changé le caractère de l'arithmétique (c'est l'autre nom de la théorie des nombres) telle que l'avait connue Gauß :

1. Sous son influence, puis sous celle d'autres mathématiciens du XIX^e siècle (surtout allemands !), de profondes techniques d'algèbre puis d'analyse (et même, au XX^e siècle, de géométrie algébrique) ont renforcé l'arsenal de l'arithméticien.
2. Au XX^e siècle, des problèmes de pure théorie des nombres ont rencontré des échos en physique.
3. Encore au XX^e siècle, des applications financières et même militaires lui sont tombées dessus ! Il s'agit bien entendu des questions de sécurité de communication : cryptographie, authentification . . .

Ce chapitre commencera donc par un peu d'outillage algébrique (section 1, consacrée à une approche abstraite de la théorie de la divisibilité et de la factorisation), complété par la section 2, intermédiaire entre l'algèbre et l'arithmétique, et qui comportera des applications informatiques ; et il se terminera par un pont avec la théorie des fonctions spéciales (section 6), qui jouent un rôle essentiel en physique ; cet aspect sera développé dans le module III.3 de ce volume sur les polynômes orthogonaux ; les aspects proprement arithmétiques des fractions continues pourront être approfondis dans le livre [MPA1]. Entre ces limites, les sections 3, 4 et 5 permettront de jouer avec des problèmes remontant à Fermat, Euler, Lagrange, Gauß, Legendre . . . et dont certains (critères de primalité) jouissent d'un intérêt renouvelé depuis quelques années.

Nous avons proposé dans la bibliographie quelques livres qui vous permettront d'approfondir les sujets abordés dans ce module et d'en découvrir d'autres. Les ouvrages [HW] et [Serre] sont de grands classiques que tout mathématicien, même amateur, devrait posséder (le second est toutefois nettement plus avancé que le premier). [Demazure] fait le lien avec les applications informatiques, que [Knuth2] (qui est beaucoup plus ancien) développe de manière détaillée. [Baker] et [Hindry] sont très riches, mais d'un abord plus difficile.



Comme des notions plus générales vont apparaître, précisons que nous réservons l'appellation de *nombre premier* aux entiers naturels premiers : 2, 3, 5, 7

1 Divisibilité dans un anneau commutatif

Notre but est de généraliser autant que possible le *théorème fondamental de l'arithmétique* : existence pour tout entier d'une factorisation essentiellement unique en produit de nombres premiers. Le cadre est ici celui des anneaux commutatifs intègres (autrement, les difficultés techniques seraient trop grandes). Les éléments les plus caractéristiques de l'arithmétique d'un tel anneau sont ses *unités*, *i.e.* ses éléments inversibles (ce sont eux qui empêchent la décomposition d'être vraiment unique) ; et, bien entendu, ses éléments irréductibles et ses éléments premiers : nous verrons que ces deux termes ne désignent pas exactement la même chose, et c'est même là le cœur du problème !

1.1 Anneaux euclidiens et anneaux principaux

Résumons l'enchaînement logique des propriétés arithmétiques des anneaux intègres \mathbb{Z} et $K[X]$ (K un corps commutatif), telles qu'on les a établies dans le livre [L1] :

1. Dans \mathbb{Z} et dans $K[X]$, on dispose d'une *division euclidienne*.
2. Les anneaux \mathbb{Z} et $K[X]$ sont principaux. On en déduit le théorème de Bézout, le lemme de Gauß et le lemme d'Euclide.
3. Dans \mathbb{Z} et dans $K[X]$, tout élément admet une factorisation essentiellement unique en produit de facteurs irréductibles.

Nous allons maintenant formaliser (ici et dans la section 1.2) les liens logiques entre ces propriétés en vue d'applications plus générales.

Définition 1. Un anneau (commutatif intègre) A est dit *euclidien* s'il admet un *stathme euclidien*, c'est-à-dire une application $g : A \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que, pour tout couple (x, y) d'éléments de A :

1. Si $x, y \neq 0$ et $x \mid y$, alors $g(x) \leq g(y)$. De manière équivalente, si $x, x' \neq 0$, alors $g(x) \leq g(xx')$.
2. Si $x \neq 0$, il existe $q, r \in A$ tels que $y = qx + r$ et : soit $r = 0$; soit $g(r) < g(x)$.

Les éléments q et r sont appelés *quotient* et *reste* de la *division euclidienne*. On ne requiert *pas* l'unicité de la division euclidienne.

L'exemple qui suit sera fondamental dans les applications arithmétiques de ce chapitre. On rappelle que $\mathbb{Z}[i]$ désigne l'anneau des entiers de Gauß $a + bi$, $a, b \in \mathbb{Z}$ et que la norme algébrique N est définie par $N(z) := z\bar{z}$ (on approfondira ces notions en 4.1).

Exercice 1.

Démontrer que, pour tout complexe $z \in \mathbb{C}$, il existe un entier de Gauß q tel que $N(z - q) < 1$, où N est la norme algébrique sur \mathbb{C} . En déduire que N est un stathme euclidien sur $\mathbb{Z}[i]$.