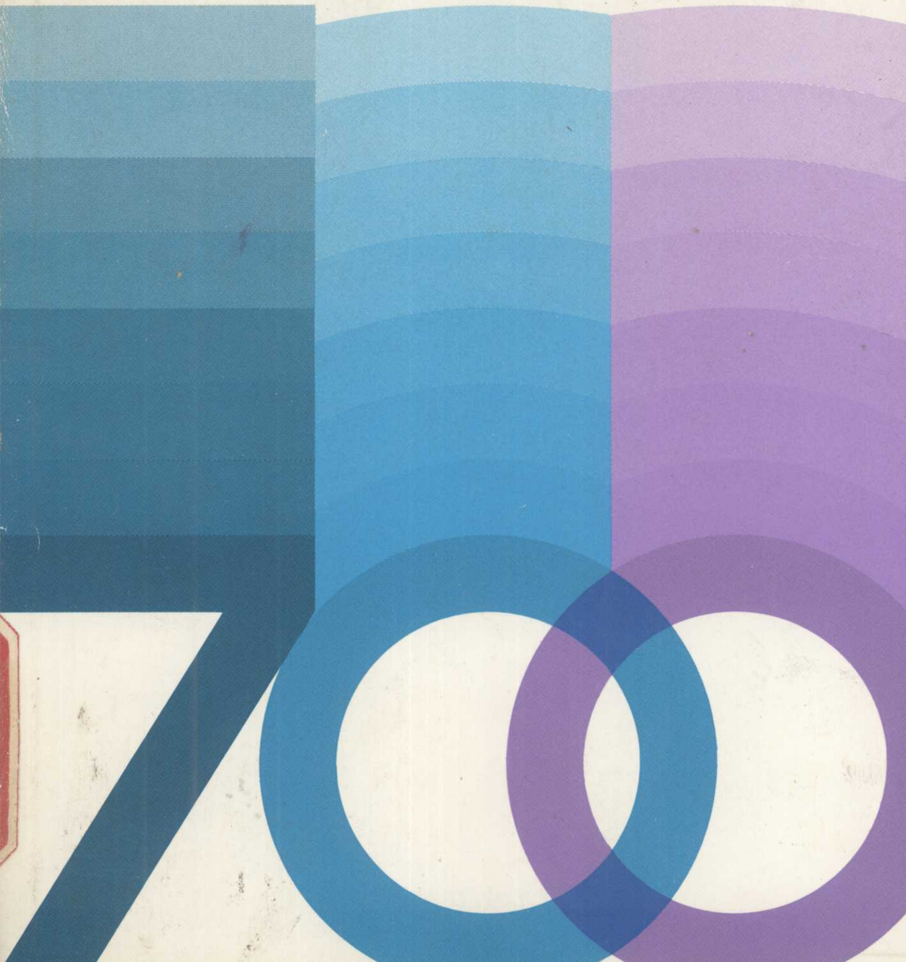
数学I問題700選

木村勇三・大竹 登・大西 安
岩瀬重雄・岡東弥彦・奥村夏美＝共編／培風館



数学I問題700選

木村勇三・大竹 登・大西 安
岩瀬重雄・岡東弥彦・奥村夏美＝共編

700

培風館

編者紹介

木村勇三（きむらゆうぞう） 東京都立竹早高校校長
大竹　登（おおたけのぼる） 筑波大学付属高校教諭
大西　安（おおにしやすし） 国立東京工業高専助教授
岩瀬重雄（いわせしげお） 東京都立小石川高校教諭
岡東弥彦（おかとうやひこ） お茶の水女子大付属高校教諭
奥村夏美（おくむらなつみ） 東京都立足立工業高校教頭

昭和53年9月20日　初版発行

数学I問題700選

編者　木村勇三
　　　大竹　登
　　　大西　安
　　　岩瀬重雄
　　　岡東弥彦
　　　奥村夏美

発行者　山本健二

発行所　株式会社　培風館

東京都千代田区九段南 4-3-12・郵便番号 102
電話 (03) 262-5256(代表)・振替東京 4-44725

定価 ¥ 980.

中央印刷組版・清和印刷・坂本製本

編者の承認をえて検印を省略しました

7041-9151-6955

はしがき

教科書で数学の学習を一通り終えた人が，いざ入試問題を解こうとすると，とても歯が立たないという感を深くするでしょう。このようなギャップを埋めるには，『いろいろな入試問題，模試問題，創作問題などを数多く集め，関連のある問題をまとめ，それらを解くのに必要な基本事項や重要事項を整理し，各グループには代表的な例題があり，グループに入らない特色のある問題は研究問題として別にまとめてある』というような書物で勉強するのが最もよい方法であると思います。

このような考え方で，さきに「700選シリーズ」を書いてみましたが，幸いにも，数多くの諸君の心からの共感を得ることができました。これに力を得て，現行の指導要領(48年実施)にそい，新しい構想で，「数学I問題700選」を書き直しました。問題の精選，質の吟味，配列の適正，これらの点では，前回以上の苦心を払い，とくに，昭和54年度から行われる国公立大学の共通1次テストにも対応できるよう大改訂を行いました。

本書は以上のような考えに基づいて書かれていますが，特色をいくつかあげてみましょう。

1. 章・節の区分配列は，できるだけ易より難への順序とし，ある章・節の問題の解法は，原則としてそれよりあとの事項を利用しないこととしました。しかし，どうしても後の事項を利用しなければならない場合は，その旨を記してあります。
2. 章はさらに節に分けられ，各節は要項，例題，問題から成り，さらに，章の末尾に研究問題をおきました。例題，問題，研究問題は一連番号として，総計700題です。最後に，テスト問題5回分を加えてあります。
3. 各事項について説明すると，次の通りです。

要項　基本事項や，重要事項をあげてありますが，単に定理や公式の羅列ではなく，たいせつな考え方や技法を示しました。また，**解説**で

要項の説明，補足，敷衍（ふえん）をはかり，他の事項との関連にも言及してあります。

例題　5，6題に1題の割合でとりあげてありますが，これは種々の意味で代表的なものです。[指針]は問題をよく読んだ上で，解法の方針のたて方を示し，[解]は指針に基づく模範解答を示しました。また[キーポイント]は，その例題や解法の重点や，主な技法・手段などをぬき出して，他の問題への応用をはかったものです。[別解]は，こだわりのない自由な発想が，すばらしい解答を生みだすものであることを，諸君に味わっていただくためのものです。諸君みずからが別解を生むよう努力してください。

問題　入試問題の中から良問題を選ぶだけでなく，新作問題も数多く入れてあります。＊印はとくに程度の高いものを示しています。**研究問題**は数節にまたがる問題や，入試における最高のものまで含んでいます。[ヒント]は問題の解法の要点を示しています。

テスト問題　1回分5題で，5回分を用意しました。初めの3回は，国公立大学の共通1次テスト向きのものです。あとの2回分は従来と同じタイプの問題です。1回90～120分の予定ですが，その時間の短縮はそのまま諸君の力の増進を示すものです。

本書によって勉強される諸君は，まず自分の力で問題を解くことをモットーとされたい。もし，比較的時間があるならば，要項，例題，＊印のない問題をさきに解き，ある程度の自信をつけてから，＊印の問題，研究問題へと進む方法もあります。しかし，時間が切迫しているならば，よく味わい，理解しながら解答をみていくのも一つの方法でしょう。とくに，不得手なところだけ精読してもよいでしょう。得手，不得手，費やしうる時間などをよく考えて，本書の活用を工夫してほしいと思います。

もし，お気づきの点があれば培風館あてご連絡いただければ幸甚です。終わりに，本書を利用される諸君のご成功を心からお祈りします。なお，本書の編集，校正にご尽力をいただいた培風館の村山高志さん，川合弘子さんに心からお礼を申しあげます。

1978年8月

編　者

目次

1. 数 と 式

1-1 整式の計算

1. 計算の基本法則

数や式の計算では次の各法則が用いられる。

（1） 交換法則　加法 $a+b=b+a$　乗法 $ab=ba$

（2） 結合法則　加法 $a+(b+c)=(a+b)+c$　乗法 $a(bc)=(ab)c$

（3） 分配法則　$a(b+c)=ab+ac$

（4） 指数法則　$a^m \cdot a^n=a^{m+n}$,　$(a^m)^n=a^{mn}$,　$(ab)^n=a^n b^n$

2. 乗法の公式

（1） $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

（2） $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$　（複号同順）

（3） $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

（4） $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

（5） $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

（6） $(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$

（7） $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$ $\{=a^3\pm b^3\pm 3ab(a\pm b)\}$　（複号同順）

（8） $(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$　（複号同順）

（9） $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$

解説 **1.** 乗法公式は，単独でよりは，いくつかがくり返され，組み合わされて使われることが多い。たとえば，$a+b=A$ とおけば

$$(a+b+c)^2=(A+c)^2=A^2+2Ac+c^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$$

$$=\underbrace{a^2+b^2+c^2}_{\text{平方の和}}+2\underbrace{(ab+bc+ca)}_{\text{2個ずつの積の和}}$$

2. 乗法公式を利用して，次のように式を変形することがある。

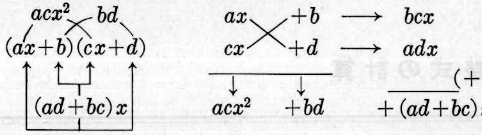
$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab,\qquad a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$$

$$a^2+b^2=\frac{1}{2}\{(a+b)^2+(a-b)^2\},\qquad ab=\frac{1}{4}\{(a+b)^2-(a-b)^2\}$$

$$ab+bc+ca=\frac{1}{2}\{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\}$$

$$abc=\frac{1}{3}\{a^3+b^3+c^3-(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\}$$

3. $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$ は



のように考えるなどして，直ちに書き下せるようにしておくとよい。

例題 1（整式の値）

$a+b+c=1$，$a^2+b^2+c^2=2$，$a^3+b^3+c^3=3$ のとき，次の各式の値を求めよ。

(1) $ab+bc+ca$　　(2) $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$　　(3) abc

指針 (1) $(a+b+c)^2$ の展開式を考えてみる。

(2) 与式$=a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)$において，$a^2(b+c)=a^2(a+b+c)-a^3$ などと変形してみる。

(3) $(a+b+c)\{(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)\}=a^3+b^3+c^3-3abc$ を利用する。

解 (1) $ab+bc+ca=\frac{1}{2}\{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\}=-\frac{1}{2}$…**答**

(2) 与式$=a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)$

$=a^2(a+b+c)+b^2(a+b+c)+c^2(a+b+c)-(a^3+b^3+c^3)$

$=-1$…**答**

(3) $abc=\frac{1}{3}\{a^3+b^3+c^3-(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\}$ が成り立つから，これに与えられた式の値および (1) の結果を代入して，

$$abc=\frac{1}{3}\left[3-1\times\left\{2-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}\right]=\frac{1}{6}\cdots\text{答}$$

キーポイント 次の等式は，しばしば用いられるからよく覚えておくとよい。

$(a+b+c)^2=(a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ca)$

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\{(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)\}$

別解 $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$

$=ab(a+b+c)+bc(a+b+c)+ca(a+b+c)-3abc$

$=(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc$

が成り立つ。ここで左辺の値（(2)の結果）と (1) の結果とがわかったとき，これから abc の値が求められる。また abc の値が求まったとき，これと

1. 数と式

1-1 整式の計算

1. 計算の基本法則

数や式の計算では次の各法則が用いられる。

(1) 交換法則	加法 $a+b=b+a$		乗法 $ab=ba$
(2) 結合法則	加法 $a+(b+c)=(a+b)+c$		乗法 $a(bc)=(ab)c$
(3) 分配法則	$a(b+c)=ab+ac$		
(4) 指数法則	$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$,	$(a^m)^n=a^{mn}$,	$(ab)^n=a^nb^n$

2. 乗法の公式

(1) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

(2) $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ (複号同順)

(3) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

(4) $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

(5) $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

(6) $(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$

(7) $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3\ \{=a^3\pm b^3\pm 3ab(a\pm b)\}$ (複号同順)

(8) $(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$ (複号同順)

(9) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$

解説 **1.** 乗法公式は，単独でよりは，いくつかがくり返され，組み合わされて使われることが多い。たとえば，$a+b=A$ とおけば

$$(a+b+c)^2=(A+c)^2=A^2+2Ac+c^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$$
$$=\underbrace{a^2+b^2+c^2}_{\text{平方の和}}+2\underbrace{(ab+bc+ca)}_{\text{2個ずつの積の和}}$$

2. 乗法公式を利用して，次のように式を変形することがある。

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab,\qquad a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$$

$$a^2+b^2=\frac{1}{2}\{(a+b)^2+(a-b)^2\},\qquad ab=\frac{1}{4}\{(a+b)^2-(a-b)^2\}$$

$$ab+bc+ca=\frac{1}{2}\{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\}$$

1-2 整式の除法

1. 商と余り

整式 A を整式 B で割って商 Q, 余り(剰余) R を得たとすると，恒等式

$$A=B\cdot Q+R \quad (R \text{ は } B \text{ より低次})$$

が成り立つ。

$R=0$ のとき，A は B で割り切れる(整除される)という。

2. 剰余の定理

x の整式 $f(x)$ を x の1次式 $x-\alpha$ で割ったとき，余り R は定数で

$$R=f(\alpha)$$

が成り立つ。

また，$f(x)$ を x の1次式 $ax+b$ で割ったとき，余り R は定数で

$$R=f\left(-\frac{b}{a}\right)$$

が成り立つ。

解 説 **1. 商と余りの求め方** たとえば，$A=x^3-4x+20$ を $B=x^2-x+1$ で割るとき，

(1) 直接計算による方法：

$$\begin{array}{rl}
 & x+1 \\
x^2-x+1\,) & x^3 \qquad -4x+20 \\
 & x^3-x^2+x \\
\hline
 & \quad x^2-5x+20 \\
 & \quad x^2-x+1 \\
\hline
 & \quad -4x+19
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rrrrr}
 & & & 1 & 1 \\
1\ -1\ \ 1\,) & 1 & 0 & -4 & 20 \\
 & 1 & -1 & 1 & \\
\hline
 & & 1 & -5 & 20 \\
 & & 1 & -1 & 1 \\
\hline
 & & & -4 & 19
\end{array}$$

ゆえに，商 $x+1$，余り $-4x+19$

(2) 恒等式の性質(p. 54)を利用する方法： 商を Q，余りを R とすると，

$$A=B\cdot Q+R \quad (R \text{ は } B \text{ より低次})$$

A は3次式，B は2次式だから Q は1次式，R は1次以下の整式である。そこで $Q=ax+b$, $R=cx+d$ とおけば，

$$\begin{aligned}
B\cdot Q+R&=(x^2-x+1)(ax+b)+cx+d \\
&=ax^3+(-a+b)x^2+(a-b+c)x+b+d
\end{aligned}$$

(1) の結果とから，(2) の値(左辺の値)が求められる。このほか，次のような等式を利用して解くこともできる。

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3\{ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\}+6abc$$
$$(a+b+c)(ab+bc+ca)-\{ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\}=3abc$$

問　題

2 次の各式を簡単にせよ。

(1) $(a+b+c)^2+(-a+b+c)^2+(a-b+c)^2+(a+b-c)^2$

(2) $(a+b+c-d)(a+b-c+d)+(a-b+c+d)(-a+b+c+d)$

(3) $(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3-(a+b-c)^3$

3 次の$\boxed{}$内をうめよ。

(1) $(7x^3+12x^2-4x-3)(x^5+3x^3+2x^2-5)$ の展開式で，x^5 の係数は ア$\boxed{}$，x^3 の係数は イ$\boxed{}$ である。 (創価大)

(2) $(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5+7x^6+8x^7+9x^8)^4$ の展開式で，x^3 の係数は ア$\boxed{}$，x^4 の係数は イ$\boxed{}$ である。

4 (1) $x+\dfrac{1}{x}=a$ として，次の各式を a で表せ。

(i) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$ (ii) $x^3+\dfrac{1}{x^3}$ (iii) $x^4+\dfrac{1}{x^4}$

(2) $x+y+z=7$，$xy+yz+zx=14$，$xyz=8$ のとき，次の各式の値を求めよ。

(i) $x^2+y^2+z^2$ (ii) $x^3+y^3+z^3$ (iii) $(x+y)(y+z)(z+x)$

(iv) $y^2z+yz^2+z^2x+zx^2+x^2y+xy^2$

〈ヒント〉

2 (1) 各項を展開する。(2) $a+b=A$，$a-b=B$，$c+d=C$，$c-d=D$ のように部分的にまとめるなどして，能率的に計算する工夫をする。(3) 4つの文字が全く対等にあつかわれているので，1つの文字について整理してみる。あるいは，$A^3+B^3=(A+B)^3-3AB(A+B)$を利用する。

3 (2) 5次以上の項を省略して平方し，その5次以上の項を省略する。そして，さらに平方して5次以上の項を省略する。

上の形式により，商 $Q(x)$ と余り R を求めることができる。これを **組立除法** という。

たとえば，$f(x)=2x^4-8x^2-3x+1$ を $x+2$ で割ると，下の計算から，
商 $2x^3-4x^2-3$，余り 7
剰余の定理を用いると，余りは $f(-2)=7$ と
なり結果は一致している。

$$\begin{array}{r|rrrr|r} -2 & 2 & 0 & -8 & -3 & 1 \\ & & -4 & 8 & 0 & 6 \\ \hline & 2 & -4 & 0 & -3 & \boxed{7} \end{array}$$

例題 5（割り算の問題）

実数係数の x の多項式 $f(x)$ を x^2+1，x^2+2 で割ったときの剰余がそれぞれ $4x+4$，$4x+8$ である。$f(x)$ を $(x^2+1)(x^2+2)$ で割ったときの剰余を求めよ。　(群馬大)

指針　$(x^2+1)(x^2+2)$ は4次式だから，剰余は3次以下の実数係数の整式である。それを $R(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ とおき，$R(x)$ を x^2+1，x^2+2 で割った余りを求めてみる。

または，$x^2+1=0$，$x^2+2=0$ のそれぞれの解の1つ $x=i$，$x=\sqrt{2}\,i$ を $f(x)$ に代入して $f(i)=4i+4$，$f(\sqrt{2}\,i)=4(\sqrt{2}\,i)+8$　これから a, b, c, d を定める。

解　$f(x)$ を $(x^2+1)(x^2+2)$ で割った商を $Q(x)$，余りを ax^3+bx^2+cx+d とおけば，（a, b, c, d は実数）

$$f(x)=(x^2+1)(x^2+2)Q(x)+ax^3+bx^2+cx+d\cdots\cdots①$$

一方，題意より

$$f(x)=(x^2+1)Q_1(x)+4x+4\cdots\cdots②$$
$$f(x)=(x^2+2)Q_2(x)+4x+8\cdots\cdots③$$
$\left(Q_1(x),\ Q_2(x)\text{は}\ x\text{の整式}\right)$

と表せる。

$x^2+1=0$ の1つの解 $x=i$ を①，②に代入すれば，

$$f(i)=(c-a)i+(d-b),\quad f(i)=4i+4\quad (\because\ i^2+1=0)$$
$$\therefore\quad (c-a)i+(d-b)=4i+4$$

a, b, c, d は実数であるから

$$c-a=4\cdots\cdots④,\quad d-b=4\cdots\cdots⑤$$

同様に，$x^2+2=0$ の1つの解 $x=\sqrt{2}\,i$ を①，③に代入すれば

$$f(\sqrt{2}\,i)=\sqrt{2}\,(c-2a)i+(d-2b),\quad f(\sqrt{2}\,i)=4\sqrt{2}\,i+8$$

これらは等しいので

$$c-2a=4\cdots\cdots⑥,\quad d-2b=8\cdots\cdots⑦$$

④, ⑤, ⑥, ⑦ より　$a=0,\ b=-4,\ c=4,\ d=0$

よって求める剰余は　$-4x^2+4x\cdots$ **答**

これは A と同じ式であるから係数を比較して

$$a=1,\ -a+b=0,\ a-b+c=-4,\ b+d=20$$

この連立方程式を解いて $a=1,\ b=1,\ c=-4,\ d=19$

ゆえに，商 $x+1$，余り $-4x+19$

2．剰余の定理の証明　x の整式 $f(x)$ を x の1次式 $x-\alpha$ で割るとき，商を $Q(x)$，余りを R とすれば，R は定数であって次の等式が成り立つ。

$$f(x)=(x-\alpha)Q(x)+R$$

ここで余りだけを求めるのであれば，上式の x に α を代入すると

$$f(\alpha)=(\alpha-\alpha)Q(\alpha)+R=0\cdot Q(\alpha)+R=R$$

$$\therefore\quad R=f(\alpha)$$

$f(x)$ を $ax-b$ で割ったときの余りについても全く同様に証明される。上の証明からわかるように，$x+\alpha$，$ax+b$ で割ったときの剰余は，$x+\alpha=0$，$ax+b=0$ の解 $x=-\alpha$，$x=-\dfrac{b}{a}$ を $f(x)$ に代入して，それぞれ $f(-\alpha)$，$f\left(-\dfrac{b}{a}\right)$ となる。

3．組立除法　剰余の定理は，整式 $f(x)$ を1次式 $x-\alpha$ で割ったときの余り R については明快な結果を与えるが，商 $Q(x)$ については知らせてくれない。いま，$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ を $x-\alpha$ で割って，商 $Q(x)=px^2+qx+r$，余り R を得たとすれば，

$$\begin{aligned}ax^3+bx^2+cx+d&=(x-\alpha)(px^2+qx+r)+R\\&=px^3+(q-\alpha p)x^2+(r-\alpha q)x+R-r\alpha\end{aligned}$$

が成り立つから，両辺の各項の係数の間に次の関係があることがわかる。

$$p=a,\qquad q=b+\alpha p$$
$$r=c+\alpha q,\qquad R=d+r\alpha$$

このことから，$f(x)$ の係数から $Q(x)$ の係数と R を求める計算を，次の形式にまとめることができる。

（$f(x)$ の係数）

$$\begin{array}{r|cccc}
\alpha & a & b & c & d\\
+) & & p\alpha & q\alpha & r\alpha\\
\hline
 & p & q & r & \boxed{R}
\end{array}$$

商の係数　　余り

（$f(x)$ より1次低い）

(1)　$f(x)$ の係数を降べきの順に並べる。欠けている項の係数は0とする。

(2)　$x-\alpha=0$ の解 α を左上に表示する。

(3)　a をそのまま下におろして p とする。

(4)　p と α の積 $p\alpha$ を b の下に書き，b と加えて q とする。

(5)　q と α の積 $q\alpha$ を c の下に書き，c と加えて r とする。

以下この手続きをくり返す。

7　次の条件に適する定数 a, b, c を求めよ。

(1)　x^3+ax^2+bx+4 は x^2+3x+2 で割り切れる。

(2)　$4x^3+ax^2+bx+c$ は x^2-1 で割り切れ，$x+2$ で割れば 3 余る。

(3)　$x^4+ax^3+bx^2+c$ は x^2+1 で割れば $2x+1$ が余り，$x+1$ で割れば 3 が余る。

(4)　x^4-4x+a は $(x-b)^2$ で割り切れる。(b は実数である。)

(5)　整式 $A=x^4+ax^2+b$ が整式 $B=x^2+ax+b$ で割り切れる。

8　x の整式 $f(x)$ について次の問に答えよ。

(1)　$f(x)$ を $x-1$ で割ると 1 余り，$(x-2)(x-3)$ で割ると 5 余る。$f(x)$ を $(x-1)(x-2)(x-3)$ で割ったときの余りを求めよ。　(長崎大・文)

(2)　$f(x)$ を $(x-a)$ で割ると余りが α，$(x-b)$ で割ると余りが β であるとする。$f(x)$ を $(x-a)(x-b)$ で割るとき余りを求めよ。ただし $a \neq b$ とする。　(慶大・商)

9*　実数を係数とする 2 つの整式 $f(x), g(x)$ がある。いまある実数 a に対し，$\{f(x)\}^3-\{g(x)\}^3$ が $(x-a)^2$ で割り切れ，$(x-a)^3$ で割り切れないとすれば，$f(x)-g(x)$ が $(x-a)^2$ で割り切れることを証明せよ。　(阪　大)

〈ヒント〉

7　(1) $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$　(2) $x^2-1=(x+1)(x-1)$　(3), (4), (5) 割り算を実行して余りを求めてみる。　**9**　$\{f(x)\}^3-\{g(x)\}^3=\{f(x)-g(x)\}\times[\{f(x)\}^2+f(x)\cdot g(x)+\{g(x)\}^2]$ において，$\{f(x)\}^2+f(x)\cdot g(x)+\{g(x)\}^2$ が $x-a$ で割り切れないことを示す。背理法を用いるとよい。

1-3　因数分解

1.　基本の公式

(1)　$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$　(複号同順)

(2)　2乗の差　$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

(3)　$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$

$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

(4)　3乗の和　$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

3乗の差　$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

(5)　2次3項式の因数分解

$r=ab,\ q=a+b$ ならば，$x^2+qx+r=(x+a)(x+b)$

$p=ac,\ r=bd,\ q=ad+bc$ ならば，$px^2+qx+r=(ax+b)(cx+d)$

2. やや高度な公式

（1） $a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

（2） $(a+b)^3-a^3-b^3=3ab(a+b)$

（3） $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(a+b)(b+c)(c+a)$

（4） $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

（5） $\left.\begin{array}{l} a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=-(a-b)(b-c)(c-a) \\ bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)=-(a-b)(b-c)(c-a) \end{array}\right\}$ 結果は同じ

3. 因数定理

x の整式 $f(x)$ において，

$f(k)=0$ ならば，$f(x)$ は $x-k$ を因数としてもつ。

$f\left(\dfrac{k}{h}\right)=0$ ならば，$f(x)$ は $hx-k$ を因数としてもつ。

4. 因数分解の手段

（1） 共通因数があれば，まず，それをくくり出す。

（2） 公式が直接に利用できる形になっているかどうかを調べる。

（3） 項を適当に組み合わせたり組みかえたりしてグループに分け，グループごとに因数分解などして，共通因数をつくったり，ほかの公式が利用できる形に変えたりする。

（4） 適当な項を加えたり，引いたりして，2乗の差，そのほかの公式が利用できるように変形する。

（5） 文字が2個以上あるときは，適当な1つの文字(なるべく次数の低いもの)について(降べきの順に)整理してみる。

（6） 因数定理を用いて1次因数を見つける。

解説 **1.** 因数分解の問題では，直ちに公式を適用できないものが多い。そのような場合，複雑な項や式を1つの文字でおきかえて，式全体を見やすくしたり，適当に項を組み合わせるとか，次数の低い文字について式を整理するなど，その式の特徴を利用して公式が適用できる形に導くことが大切である。

3数 a, b, c に関する因数分解について，$a\to b\to c\to a$ という順を**輪環の順**という。たとえば，$(a-b)(b-c)(c-a)$

2. 因数定理 整式 $f(x)$ において，$f(k)=0$ ならば $f(x)$ は1次因数 $x-k$ をもつ。(因数定理)

$f(k)=0$ は，$f(x)$ を $x-k$ で割った余りが 0 であること，すなわち $f(x)$ が $x-k$ で割り切れることを意味するから，$f(k)=0$ ならば $f(x)$ は1次因数 $x-k$ をもつわけである。

$f\left(\dfrac{k}{h}\right)=0$ ならば $f(x)$ は1次因数 $hx-k$ をもつことも容易にわかる。

$f(x)$ が整数係数の整式であるとき，$f(x)$ が1次因数 $x-k$ または $hx-k$ をもつかどうか調べるには，k は定数項の(正負の)約数，h は x の最高次の項の係数の(正の)約数として得られた k，または $\dfrac{k}{h}$ が $f(x)$ を 0 にするかどうか調べればよい。その操作としては組立除法が便利である。

3. ある式がそれ以上因数に分解できないとき，その式は**既約**であるという。既約であるかないかは，因数分解に使われる数の範囲によって異なる。たとえば，x^2-4, x^2-2, x^2+4 においては，係数はすべて整数であるが，

$x^2-4=(x+2)(x-2)$ **整数の範囲**で因数に分解される。

$x^2-2=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$ 整数の範囲で因数に分解されないが，無理数までいれた**実数の範囲**で因数に分解できる。

$x^2+4=(x+2i)(x-2i)$ 実数の範囲で因数に分解されないが，虚数までいれた**複素数の範囲**で因数に分解できる。

因数分解は，とくに“ことわり”がないときは，もとの式の係数の範囲で考えるのがふつうのようである。つまり，もとの式の係数が有理数ならば因数分解も有理数の範囲で，実数ならば実数の範囲で，もとの式の係数が虚数を含んでいれば因数分解も虚数までいれて行う。

整数(一般に有理数)**を係数とする2次式**が，整数(有理数)の範囲で因数に分解できるかどうかを調べるのに，

2次式 $px^2+qx+r=p(x-\alpha)(x-\beta)$

$\Longleftrightarrow \alpha, \beta$ が2次方程式 $px^2+qx+r=0$ の解(根)

という関係が利用できる(p. 61)。

つまり，$D=q^2-4pr$ とすると，

D が整数(有理数)の2乗であると，整数(有理数)の範囲で因数分解される。

D が正の数で，$\sqrt{D}$ は無理数のとき，無理数をいれないと因数分解できない。

D が負の数であると，$\sqrt{D}$ は虚数なので，虚数までいれないと因数分解できない。