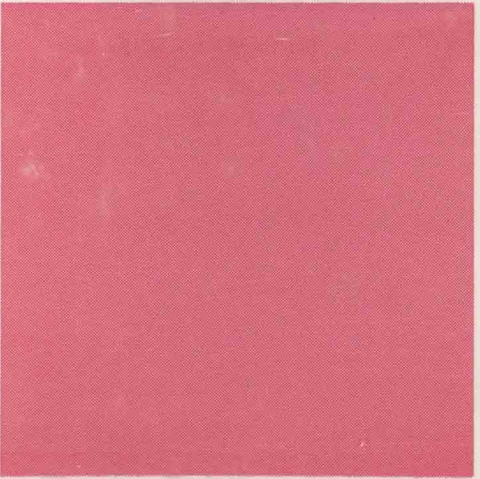


大学基礎課程
線形代数

三輪 恵 著

共立出版株式会社



大学基礎課程 線形代数

三輪 恵 著



共立出版株式会社

— 著者紹介 —

三輪 恵

昭和33年 東京大学理学部数学科卒
現 在 名古屋工業大学教授・理学博士

大学基礎課程 線形代数

定価 1500 円

検印廃止

著 者 三 輪 恵

©1982 NDC 411

昭和57年2月1日 初版1刷発行

発 行 共立出版株式会社／南 條 正 男

〒112 東京都文京区小日向 4-6-19

03-947-2511 振替 東 京 1-57035



(社団法人
自然科学書協会
会 員)

印 刷 藤本綜合印刷 Printed in Japan

製 本 協栄製本所

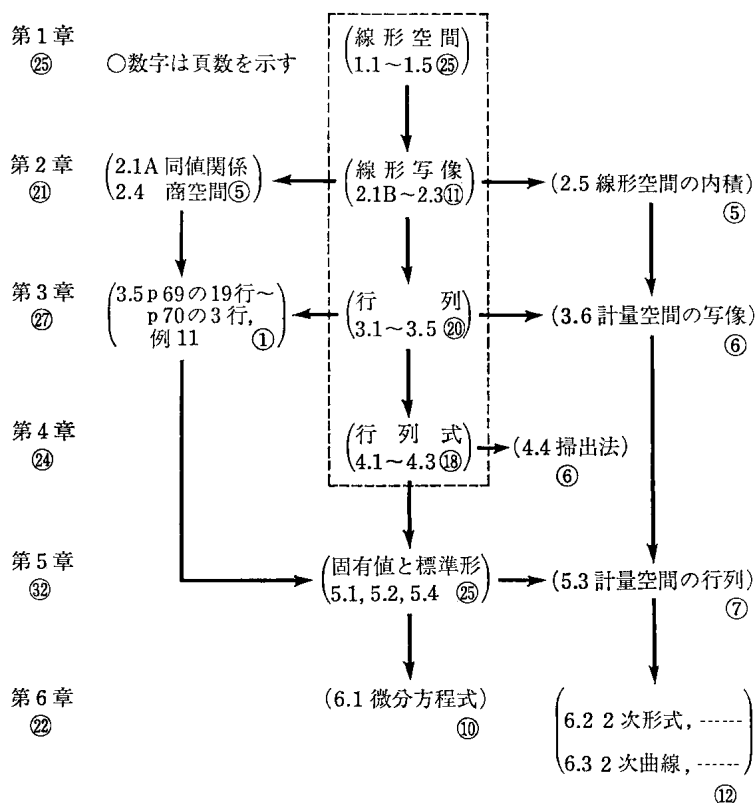
ISBN-4-320-01075-2 C 3041

ま え が き

本書は著者が名古屋工業大学の教養課程において行った講義の内容を中心として、大学理工系教養課程の学生を対象としてまとめたテキストです。

1年間で一応線形代数の纏った講義をすることを前提として、ジョルダン標準形を目標にしながら、記述を簡潔にして頁数が多くならないように心がけるかわら、読者の理解を助けるためには冗長な説明を避けて、実例、問を多く採り入れ、問の解答は巻末に付しました。また本書の理論展開上必要のない概念も一般的にあって重要なものは問の中などに示すことにし、特に重要なものには星印*をつけ巻末に解説をつけた。また各章末には本文中の問よりは少し難解な演習問題を付したので、本文を十分理解した後にとって見るとよいでしょう。

さて本書の内容構成について一言述べます。まず計量線形空間の理論はその内容によって各章に分散して入れてあります。掃き出し法は理論的には本質的でないが実用上有用なので採り入れました。また商空間の概念を採用し、ジョルダン標準形を述べる際の繁雑さを避けることができました。各章、節の内容の関係は図に示すとおりであります。



矢印の順序に従って進めば特に章節にこだわる必要はありません。第1章から第3章までで全体の約半分、これを前半年にして第4章以下を後半にするのもよいが、前半年に行列、行列式を済ませる方が良いと思われる方は図の点線の内部を前半に済ませるのも一方法でありましょう。

最後になりましたが、本書を執筆するに当って多くの先輩の著書を参考にさせていただいたことに心尽の謝意を表します。また出版の機会を与えられた共立出版社特に終始お世話いただいた深瀬英弥氏に心より感謝します。

昭和57年1月

著 者

数学関係書より

世界の数学教育…数学教育国際委員会編/B5・382頁
 数学的発見の論理……………佐々木 力訳/A5・230頁
 数学基礎論 増補版……………竹内外史他著/A5・174頁
 現代数学入門事典……………徳川四三二監訳/B6・248頁
 数学英和・和英辞典……………小松勇作編/B6・248頁
 数学小辞典……………矢野健太郎編/B6・770頁
 共立 数学公式 改訂増補 近藤基吉他編/ポケット判・672頁
 学生 数学ハンドブック……………徳川四三二他編/三六・368頁
 商・経系基礎数学……………小林竜一著/A5・206頁
 数学概説……………赤 拱也他訳/A5・324頁
 基礎数学……………稲葉三男著/A5・174頁
 一般教育 数学……………金沢 隆著/A5・204頁
 文科の数学……………岡本 勲他著/A5・164頁
 数学序論……………柴田敏男著/A5・206頁
 大学教科 数学序説……………稲葉三男他著/A5・154頁
 数学の序説……………川崎薩男著/A5・228頁
 教養数学概論……………矢野健太郎監修/A5・182頁
 社会科学のための 数学概説……………小林竜一著/A5・286頁
 現代科学における 数学概説 I 後藤憲一著/A5・496頁
 新しい数学……………矢野健太郎訳/A5・368頁
 理工科系一般教育 代数・幾何教科書……………占部 実他編/A5・260頁
 大教職課程理工科系代数・幾何学……………小松醇郎他著/A5・230頁
 初等代数幾何学……………伊東由文著/A5・360頁
 行 列……………稲葉三男著/A5・204頁
 大学課程 行列とベクトル空間 大学数学教育研究会編/A5・204頁
 ベクトル解析 新版……………友近 晋著/A5・168頁
 基礎課程 線形代数学……………尾野寺 毅他著/A5・234頁
 線形代数序説……………中谷太郎編/A5・198頁
 線形代数教科書……………佐々間元数他編/A5・302頁
 大学教科 線形代数概説……………小松醇郎他著/A5・162頁
 理工科系一般教育 線形代数……………荒木 淳著/A5・204頁
 大学教科 線形代数要論……………小松醇郎他著/A5・242頁
 線形代数学通論……………和田秀三他編著/A5・214頁
 基礎数学 線型代数……………郭須俊夫他著/A5・192頁
 線形数学……………武貞利隆他編/A5・200頁
 初等線形数学……………平野次郎他著/A5・176頁
 代数学講義 改訂新版……………高木貞治著/A5・400頁
 現代代数学とその応用 矢野健太郎他訳/A5・372頁
 ブール代数……………三宅彦三郎著/A5・318頁
 リー環論……………松島与三著/A5・196頁
 可換環と微分……………中井善和著/A5・168頁
 初等整数論講義 第2版……………高木貞治著/A5・432頁
 基礎数学 微分積分……………宮下熊夫他著/A5・182頁
 例題形式 微分積分学……………外岡慶之助編/A5・220頁
 微分積分学通論……………和田秀三他編著/A5・198頁
 微分積分学……………小林幹雄著/A5・172頁

微積分学……………岡野初男著/A5・212頁
 基礎課程 微分積分学……………石黒一男他著/A5・316頁
 大学教養 微分積分……………竹之内 脩他著/A5・180頁
 大学 微分積分学……………田中明雄他著/A5・296頁
 大学課程 微分積分学概説 新版……………大学数学教育研究会編/A5・268頁
 理工科系一般教育 微分・積分教科書……………占部 実他編/A5・280頁
 大教職課程理工科系 微分学と積分学 福原満洲雄他著/A5・252頁
 微分積分学演習 上 改訂版 坂井英太郎著/A5・464頁
 微分積分学演習 下 改訂版 坂井英太郎著/A5・418頁
 大学教科 解析学概説……………竹之内 脩著/A5・214頁
 大学教科 解析学要論……………福原満洲雄著/A5・226頁
 ランク現代の解析学……………山中 健他著/A5・514頁
 現代解析学……………近藤基吉他訳/A5・324頁
 位相解析……………加藤敏夫著/A5・336頁
 確率とBASIC……………池浦孝雄他著/A5・254頁
 2 値系列……………伊理正夫他訳/A5・168頁
 リースナジ 関数解析学下 秋月康夫監訳/A5・336頁
 複素関数概説……………黒田 正著/A5・206頁
 大学テキスト 関数論……………小松勇作他著/A5・178頁
 関数概論 改訂版……………竹内端三著/B6・284頁
 微分方程式の解法……………田中静男著/A5・248頁
 基礎数学 微分方程式通論 福原満洲雄他著/A5・226頁
 微分方程式概論……………田中明雄他著/A5・202頁
 応用微分方程式論……………永宮健夫著/A5・274頁
 工学基礎 微分方程式……………林 英輔他著/A5・238頁
 ユークリッド原論……………中村幸四郎他訳・解説/B5・572頁
 ホトリアン 常微分方程式 新版……………千葉克裕訳/A5・344頁
 幾何学通論……………朝長康郎著/A5・228頁
 新版 集合論……………小松勇作改訂/A5・192頁
 統計学入門……………稲葉三男著/A5・144頁
 統計学概論……………岡田泰栄著/A5・190頁
 基礎数学 統計学通論 第2版……………北川敏男他著/A5・240頁
 大学教科 統計学要論……………竹之内 脩監修/A5・218頁
 基礎数理統計……………関口惺夫他著/A5・196頁
 調査統計入門……………船津好明著/A5・294頁
 医学・生物学の統計学……………飯谷天一著/A5・260頁
 数表と計算……………黒田孝郎編/A5・208頁
 電子計算機による 計算法入門一松 信訳/A5・280頁
 数値計算における誤差……………戸川準人編/A5・196頁
 近似理論入門……………松 信他訳/A5・304頁
 グラフとダイグラフの理論 西岡隆夫他訳/A5・448頁
 電子計算機による 数値計算法とプログラミング・小郷 寛他著/A5・138頁
 FORTRAN 数値計算とプログラミング……………国井利泰監訳/A5・224頁
 基礎 図学……………玉腰芳夫他著/A5・194頁
 大学教育 図学……………中根孝治著/A5・200頁
 要説 図学……………田中政夫著/A5・150頁

も く じ

第1章 線形空間

1.1 平面および空間ベクトル	1
A. 内 積 5	
B. 外 積 8	
1.2 線形空間	11
1.3 線形部分空間	15
1.4 ベクトルの1次独立	19
1.5 基底と次元	21
演習問題1	25

第2章 線形写像

2.1 同値関係と写像	27
A. 同値関係 27	
B. 写 像 29	
2.2 線形写像	30
2.3 同形写像	34
A. 線形写像の演算 36	
2.4 商空間	39
2.5 線形空間の内積	41

演習問題 2	47
--------------	----

第 3 章 行 列

3.1 行 列	50
3.2 行列の分割	55
3.3 正則行列	58
3.4 線形写像と行列	62
3.5 線形写像の行列と基底	66
3.6 計量空間の線形写像	71
演習問題 3	78

第 4 章 行 列 式

4.1 置換群	80
4.2 行列式	83
4.3 行列式の展開	91
4.4 掃き出し法	98
演習問題 4	104

第 5 章 固有値と行列

5.1 固有値と固有ベクトル	107
5.2 広義の固有空間	119
5.3 計量空間における行列の対角化	123
5.4 ジョルダン標準形	130
演習問題 5	141

第6章 行列の標準化の応用

6.1 常微分方程式の解法	144
A. 定係数一階線形微分方程式系	144
B. 定係数 n 階線形同次微分方程式	150
6.2 2次形式, エルミート形式	153
A. 2次形式	153
B. エルミート形式	160
6.3 2次曲線, 2次曲面	162
A. 2次曲線の分類	162
B. 2次曲面の分類	163
演習問題6	166
* 印の問の解	169
問・演習問題の略解およびヒント	172
索引	181

第 1 章 線形空間

1.1 平面および空間ベクトル

“ベクトル”というとき、われわれは通常長さや方向を持った矢印を思いうかべることが多い。しかし位置の指定はない。図 1.1 の矢印 $\vec{OP}$ と、同じ向きと長さを持つ矢印 $\vec{OP'}$ とを同じものとする。

すなわち矢印 $\vec{OP}$ と同じ向きと長さを持つ矢印全体の集合 $(\vec{OP})$ をベクトルと呼んで、次のように太字 $\mathbf{a}$ で表わす：

$$\mathbf{a} = (\vec{OP})$$

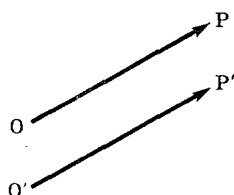


図 1.1

線分 OP の長さをベクトル $\mathbf{a}$ の長さといって $\|\mathbf{a}\|$ で表わす。また長さが 0 で方向のない特別なベクトルを考え、零ベクトルといって太字 $\mathbf{0}$ で表わす。

図 1.2 の 2 つのベクトル $\mathbf{a} = (\vec{OP})$, $\mathbf{b} = (\vec{PQ})$ に対して、 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ の和を

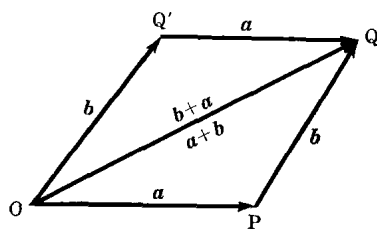


図 1.2

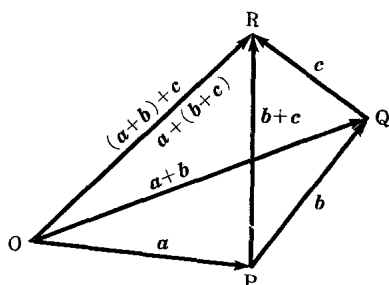


図 1.3

$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (\overrightarrow{OQ})$ と定める.

図 1.3 より明らかに次の法則が成り立つ.

$$V_1 \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} \quad (\text{交換法則})$$

$$V_2 \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \quad (\text{結合法則})$$

$$V_3 \quad \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a} \quad (\text{単位元})$$

$\mathbf{a} = (\overrightarrow{OP})$ に対し $(\overrightarrow{PO})$ を $-\mathbf{a}$ と書いて $\mathbf{a}$ の逆ベクトルという. 明らかに次式が成り立つ.

$$V_4 \quad (-\mathbf{a}) + \mathbf{a} = \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$$

$\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$ を $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ と書く.

問1 図 1.4 を使って上の法則を確かめよ.

問2 図 1.4 のような直方体 ABCD-EFGH において

$\mathbf{a} = (\overrightarrow{AB})$, $\mathbf{b} = (\overrightarrow{AD})$, $\mathbf{c} = (\overrightarrow{AE})$ とするとき, 次のベクトルを $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ を使って表わせ.

- i) $(\overrightarrow{EG})$ ii) $(\overrightarrow{EC})$ iii) $(\overrightarrow{HB})$

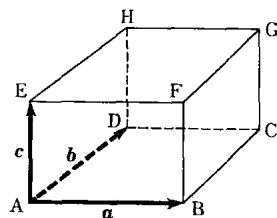


図 1.4

ベクトルに対し実数をスカラーと呼ぶ.

ベクトル $\mathbf{a}$, スカラー c に対して, $\mathbf{a}$ の c 倍 $c\mathbf{a}$ を次のように定める.

$c=0$ または $\mathbf{a}=\mathbf{0}$ のとき $c\mathbf{a}=\mathbf{0}$.

$c>0$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ のとき, $\mathbf{a}$ と同じ向きで, 長さが $\mathbf{a}$ の c 倍のベクトル.

$c<0$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ のとき, $\mathbf{a}$ と反対向きで, 長さが $\mathbf{a}$ の $|c|$ 倍のベクトル.

ベクトル $\mathbf{a}$ とスカラー c に $\mathbf{a}$ の c 倍のベクトル $c\mathbf{a}$ を対応させる演算をスカラー乗法という.

次の法則が成り立つことは簡単にわかる.

$$V_5 \quad c(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = c\mathbf{a} + c\mathbf{b}$$

$$V_6 \quad (c+d)\mathbf{a} = c\mathbf{a} + d\mathbf{a}$$

$$V_7 \quad c(d\mathbf{a}) = (cd)\mathbf{a}$$

$$V_8 \quad 1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \quad 0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

問3 図形を使って上の法則を確かめよ.

問4 三角形の重心 G は, 1つの頂点と対辺の中点 M を結ぶ線分を $2:1$ に内分す

る点 Hであることを示せ.

問5 四面体の重心は1つの頂点と、これに対する面の重心を結ぶ線分を 3:1 に内分する点であることを示せ.

いま空間（これを E_3 で表わす）内に1つの直交座標系 E を図 1.5 のように固定して考える. このとき, この空間のベクトル全体の集合 V^3 は E の原点 O から空間の1点に向かう矢印 $\overrightarrow{OP}$ (これを点 P の位置ベクトルという) で代表される. 点 P の座標を (a_1, a_2, a_3) とするとき a_1, a_2, a_3 をベクトル $\mathbf{a} = (\overrightarrow{OP})$ の直交座標系 E に関する成分といって,

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

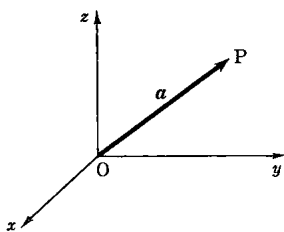


図 1.5

と書く. ベクトル $\mathbf{a}$ に対して $\mathbf{a} = (\overrightarrow{OP})$ となる点 P はただ一つであるから, $\mathbf{a}$ の成分も $\mathbf{a}$ に対し一意的に決まる. さらに点 Q の座標を (b_1, b_2, b_3) とするとき, スカラーを c として

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \text{に対し} \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \quad c\mathbf{a} = \begin{pmatrix} ca_1 \\ ca_2 \\ ca_3 \end{pmatrix}$$

となる.

平面（これを E_2 で表わす）上のベクトル全体を V^2 とするとき, V^2 のベ

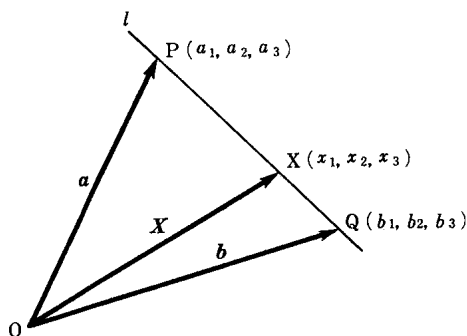


図 1.6

クトルは空間の場合と同様に、固定された1つの直交座標系を使って $R^2 = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \mid a_1, a_2 \in \mathbf{R} \right\}$ の元 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ で一意的に表わされる。 V^2 も V^3 も全く同様であるから、以下おもに V^3 について述べる。

例1 2点 $P=(a_1, a_2, a_3)$, $Q=(b_1, b_2, b_3)$ を結ぶ直線 l 上の点 $X=(x, y, z)$ に対し $\mathbf{a}=(\overrightarrow{OP})$, $\mathbf{b}=(\overrightarrow{OQ})$, $\mathbf{x}=(\overrightarrow{OX})$ とすると、

$$\mathbf{x} = t\mathbf{a} + (1-t)\mathbf{b} \quad (-\infty < t < \infty) \quad (1)$$

と表わされる。これを直線 l のベクトル表示という。(1)の成分は

$$x = ta_1 + (1-t)b_1$$

$$y = ta_2 + (1-t)b_2$$

$$z = ta_3 + (1-t)b_3$$

であるから、これより次の直線 l の方程式を得る：

$$\frac{x-b_1}{a_1-b_1} = \frac{y-b_2}{a_2-b_2} = \frac{z-b_3}{a_3-b_3} \quad (2)$$

V^3 の次の3つのベクトル

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を V^3 の基本ベクトルまたは標準基底という。任意のベクトル

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

は標準基底によって

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$$

と表わされる。

例2

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

問6 $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ として $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ を $\mathbf{x} = c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3$ の形

に表わせ.

2つのベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ が平行でないとき, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ は1次独立であるという.

3つのベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ が同一平面上の矢印で表わせないとき, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ は1次独立であるという.

例3 V^3 の標準基底 $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ は1次独立である.

A. 内 積

ベクトル $\mathbf{a} = (\overrightarrow{OA})$, $\mathbf{b} = (\overrightarrow{OB})$ が $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3$ と表わされたとき, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ の内積 $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ は次の式で定義される.

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \quad (3)$$

線分 OA の長さ $\|\mathbf{a}\|$ は $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ であるから,

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} \quad (4)$$

と書ける. 内積の定義から簡単に次の法則が導かれる.

$$I_1 \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}_1) + (\mathbf{a}, \mathbf{b}_2)$$

$$I_2 \quad (c\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}, c\mathbf{b}) = c(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

$$I_3 \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$$

$$I_4 \quad (\mathbf{a}, \mathbf{a}) \geq 0, \text{ 等号は } \mathbf{a} = \mathbf{0} \text{ のときに限る.}$$

問7 内積の定義から上の法則を確かめよ.

図 1.7 において線分 OA, OB のなす角を θ とすれば, 余弦定理より,

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\theta$$

である. 一方 (4) より

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 &= (\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b}) \\ &= (\mathbf{a}, \mathbf{a}) - 2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{b}, \mathbf{b}) \\ &= \|\mathbf{a}\|^2 - 2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \|\mathbf{b}\|^2 \end{aligned}$$

であるから

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\theta \quad (5)$$

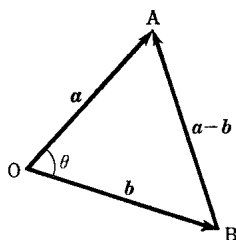


図 1.7

となる。(3)の代りに(5)で内積を定義してもよい。

次の等式は容易にわかる。

$$|(\mathbf{a}, \mathbf{b})| \leq \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \quad (\text{シュバァルツの不等式})$$

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\| \quad (\text{三角不等式})$$

問8 三角不等式を計算で確かめよ。

問9 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ との交角が共に $\frac{\pi}{3}$ である長さ1のベクトルを求めよ。

問10 i) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と交角 $\frac{\pi}{6}$, ii) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ と交角 $\frac{\pi}{6}$

iii) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と交角が共に $\frac{\pi}{3}$ で長さ1のベクトルを求めよ。

特に $\theta = 90^\circ$ のとき、すなわち $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が直交するとき

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$$

となる。

例4 原点Oから平面 π に下した垂線の足を $H=(a, b, c)$ とし、 π 上の任意の点を $X=(x, y, z)$ とすれば $\mathbf{h}=(\vec{OH})$, $\mathbf{x}=(\vec{OX})$ として $(\mathbf{h}, \mathbf{x}-\mathbf{h})=0$ となる。すなわち

$$(\mathbf{h}, \mathbf{x}) = \|\mathbf{h}\|^2 \quad (6)$$

を平面 π のベクトル表示という。成分を代入すると、 π の方程式

$$ax + by + cz = a^2 + b^2 + c^2$$

または

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}(ax + by + cz) = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

を得る。

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right)$$

を平面 π の方向余弦という。原点から π までの距離は

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

である。

問 11 ベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ が直交するための必要十分条件は $\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2=\|\mathbf{a}\|^2+\|\mathbf{b}\|^2$ であることを示せ.

問 12 1 点 $P=(p, q, r)$ から平面 $\pi; (\mathbf{a}, \mathbf{x})=ax+by+cz=d$ に下した垂線の長さを $p=(\overrightarrow{OP})$, $\mathbf{a}$, d で表わせ.

問 13 2 直線 $l_1; \mathbf{x}=\mathbf{a}_1+t\mathbf{b}_1$, $l_2; \mathbf{x}=\mathbf{a}_2+t\mathbf{b}_2$ がねじれの位置 (交わらず, 平行でない) にあるための必要十分条件は $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_1$ が 1 次独立であることを示せ.

問 14 図 1.5 の空間ベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ について次の式を証明せよ.

$$\text{i) } \|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2+\|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|^2=2\|\mathbf{a}\|^2+2\|\mathbf{b}\|^2$$

$$\text{ii) } \|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2-\|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|^2=4(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

ここで複素数について述べておく.

複素数は $a+bi$ (a, b は実数, $i^2=-1$) という形の数で, a, b をそれぞれ実数部, 虚数部という. 2 つの複素数 $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$ の和と積は次のように定義される.

$$z_1+z_2=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i \quad (7)$$

$$z_1z_2=(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i \quad (8)$$

平面上に直交座標を図 1.8 のように固定し, 点 $P=(a, b)$ (位置ベクトル $\mathbf{x}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$) に複素数 $a+bi$ を対応させれば, 複素数全体の集合 $\mathbf{C}$ は平面上の点全体の集合 (または平面ベクトルの集合 V^2) と 1 対 1 に対応し, 和は和に対応することが (7) よりわかる. また実数 c に対して

$$cz_1=c(a+bi)=ca+cbi$$

であるから, 複素数の実数倍には平面ベクトルの実数倍が対応する. 上のように複素数と 1 対 1 に対応づけられた平面を複素平面 (またはガウス平面) という.

点 P を極座標で (r, θ) と表わすと $a=r \cos \theta$, $b=r \sin \theta$ で点 P に対応する複素数 z は次のように表わされる.

$$z=r(\cos \theta+i \sin \theta)$$

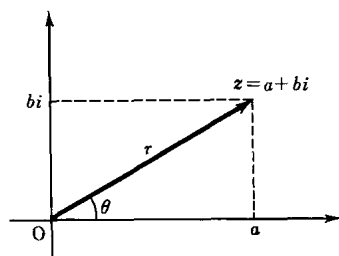


図 1.8

これを複素数の極表示という. r を z の絶対値といって $|z|$ で表わし, θ を z の偏角といって $\arg z$ と書く. 偏角は 2π の整数倍を除いて一意的に決まる.

$$z_1=r_1(\cos \theta_1+i \sin \theta_1) \quad z_2=r_2(\cos \theta_2+i \sin \theta_2)$$

とすると

$$z_1z_2=r_1r_2\{(\cos \theta_1 \cos \theta_2-\sin \theta_1 \sin \theta_2)+i(\cos \theta_1 \sin \theta_2+\sin \theta_1 \cos \theta_2)\}$$

$$=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$$

したがって

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|, \quad \arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2+2n\pi$$

$z=a+bi$ に対し $\bar{z}=a-bi$ を z の共役複素数という.

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{z\bar{z}}, \quad \bar{\bar{z}}=z, \quad \overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2, \quad \overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$$

が成り立つ.

次の定理は代数学の基本定理と呼ばれ 19 世紀初頭ガウスによって証明された.

[1.1.1] 「 n 次代数方程式:

$$a_0X^n+a_1X^{n-1}+\cdots+a_n=0 \quad (a_i\in\mathbf{C}, a_0\neq 0, n\geq 1)$$

は必ず複素数の根を持つ.

これより剰余の定理を用いれば次の系を得る.

系 [1.1.2] 複素係数の n 次多項式は $\mathbf{C}$ において n 個の 1 次因数の積に分解する:

$$a_0X^n+a_1X^{n-1}+\cdots+a_n=a_0(X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_n) \quad (\lambda_i\in\mathbf{C})$$

注 実数の範囲に限れば一般に系は成り立たない. たとえば $X^2+1=(X+i)(X-i)$.

B. 外 積

次に実用上きわめて有用な, 空間ベクトルの外積 (またはベクトル積) を定義しておこう.

図 1.5 で指定した E_3 の直交座標 $\mathbf{E}$ における標準基底 $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ と同じように, 同一平面上にない 3 つのベクトル $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$ が, この順序にちょうど右手の親指, 人差指, 中指の位置にくるような配置にあるとき, 順序を持ったベクトルの組 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$ を右手系 (正の向き) という. 一方, この順序が左

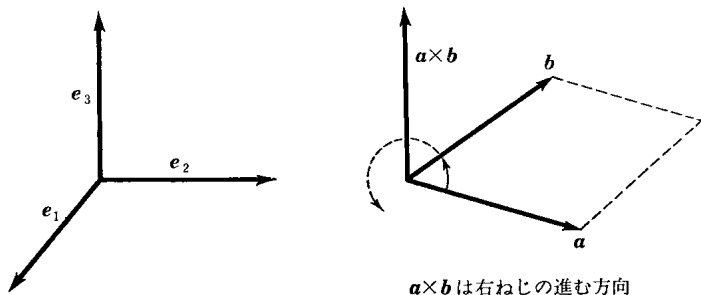


図 1.9