Л. З. Румшиский

Счётная линейка

Л. З. РУМШИСКИЙ

СЧЕТНАЯ ЛИНЕЙКА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1963

518
Р 86

АННОТАЦИЯ

В книге дается краткое описание счетной линейки, излагаются общие принципы решения задач на ней, методы выбора оптимальных алгоритмов, а также способ определения порядка результата вычислений.

Книга может служить учебным пособием для студентов младших курсов втузов по изучению счетной линейки.

Последние главы книги могут оказать пользу инженерам и техникам при проведении специальных расчетов, в частности, с комплексными числами.

Румшиский Лев Зимонович.

Счетная линейка.

М., Физматгиз, 1963 г., 64 стр. с илл.

Редакторы: *М. Я. Ворновицкий* и *А. З. Рывкин.*

Техн. редактор *Э. И. Михлин.* Корректор *А. Д. Халанская.*

Сдано в набор 8/II 1963 г. Подписано к печати 8/V 1963 г. Бумага $84\times108^1/_{32}$.
Физ. печ. л. 2. Условн. печ. л. 3,28. Уч-изд. л. 2,66.
Тираж 250 000 экз. Т-04960. Цена книги 8 коп. Заказ № 1147.

Государственное издательство физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УЦБ и ПП Ленсовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 5

ГЛАВА 1

РЕШЕНИЕ ПРОПОРЦИЙ

1.1. Логарифмическая шкала 7
1.2. Основной принцип работы счетной линейки 9
1.3. Строение рабочих шкал счетной линейки 11
1.4. Решение пропорций на рабочих шкалах 12
1.5. Нормализация чисел. Определение порядка результата вычислений 15
1.6. Умножение и деление 18
1.7. Расчет таблицы пропорциональной зависимости. Специальные значки 21
1.8. Линейная интерполяция 23

ГЛАВА 2

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НА НЕПОДВИЖНЫХ ШКАЛАХ

2.1. Логарифмы и степени 10 26
2.2. Квадраты чисел и квадратные корни 27
2.3. Кубы чисел и кубические корни. Другие степени 28
2.4. Обратные величины 30
2.5. Значения тригонометрических функций и им обратных . . 31
2.6. Значения показательной функции e^x и натуральных логарифмов 34
2.7. Общий вид функциональных преобразований на неподвижных шкалах 35

ГЛАВА 3

РЕШЕНИЕ ПРОПОРЦИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

3.1. Понятие о выборе оптимального алгоритма 37
3.2. Общий вид задач, для решения которых достаточна одна установка движка 43
3.3. Схемы решения некоторых задач 45
3.4. Возведение в любую положительную степень 50

ГЛАВА 4

СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАСЧЕТЫ НА ЛИНЕЙКЕ

4.1. Некоторые случаи решения косоугольных треугольников 52
4.2. Решение прямоугольных треугольников 54
4.3. Переход от декартовых координат к полярным и обратно. Вычисления с комплексными числами 58

Приложение 1. Правила обращения со счетной линейкой 62

Приложение 2. Расчетные задания 63

ПРЕДИСЛОВИЕ

Несмотря на быстрое развитие вычислительной техники, счетная линейка остается незаменимым инструментом для индивидуальных вычислений. Ее достоинствами являются портативность, быстрота подготовки к работе и разнообразие выполняемых операций — от умножения и деления до вычислений с тригонометрическими, показательными и другими элементарными функциями.

Не только отдельные вычисления, но и небольшие серии однотипных вычислений можно выполнить на счетной линейке быстрее, чем на любой другой вычислительной машине. Конечно, вычислитель должен знать, какие именно вычисления доступны счетной линейке и как следует организовать расчет для получения наибольшей экономии времени. Это особенно важно при решении различных технических задач, где часто приходится производить расчет ряда однотипных вариантов. Именно в тех расчетах, где исходные данные варьируются в небольшом диапазоне, особенно отчетливо могут проявиться преимущества счетной линейки, если только алгоритм вычислений выбран правильно.

В настоящей книге особое внимание уделено выяснению возможностей счетной линейки как вычислительной машины и выбору оптимальных алгоритмов для решения задач на ней. *Счетная линейка рассматривается как инструмент пропорций и функциональных преобразований.* Такой подход позволяет дать наиболее общее описание задач, решаемых с помощью одной установки движка, и, значит, с наименьшей затратой времени.

При вычислениях с многозначными числами возникает дополнительная задача определения порядка результата. Счетная линейка выдает только цифровой состав числа, порядок числа приходится определять отдельно. Умение быстро ориентироваться в этих вопросах очень важно в инженерных расчетах. В настоящей книге излагается *метод нормализации чисел для определения порядка результата при умножении, делении и некоторых других операциях, а также применение для этой цели плавающей запятой.* Этот метод удобен при работе не только на счетной линейке, но и на других вычислительных машинах.

При написании настоящего пособия был учтен двухлетний опыт обучения студентов Московского энергетического института. Это сказалось на методике изложения, а также в отборе материала по специальным расчетам (глава четвертая), которые представляют интерес в первую очередь для электриков.

Пользуюсь случаем выразить искреннюю благодарность К. А. Семендяеву за весьма ценные советы и замечания.

Автор

ГЛАВА I

РЕШЕНИЕ ПРОПОРЦИЙ

В основе работы счетной линейки лежит решение пропорций. Для этой цели применяются две одинаковые параллельно расположенные логарифмические шкалы, которые можно смещать друг относительно друга.

1.1. Логарифмическая шкала

Шкала называется *логарифмической*, если на ней в некотором масштабе нанесены логарифмы чисел, а отметки шкалы дают сами числа. Для наглядного описания такой

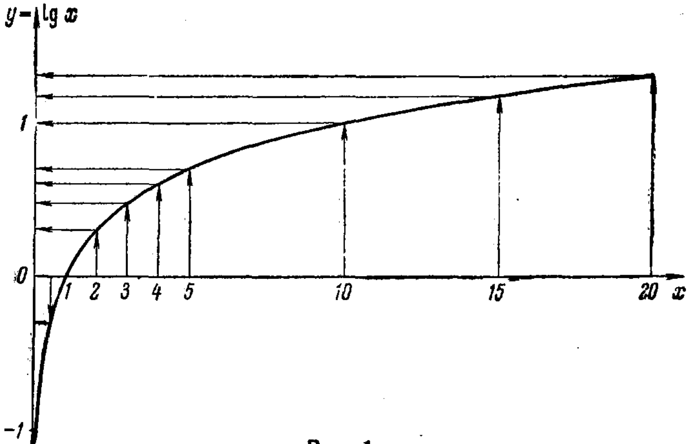

Рис. 1.

шкалы воспользуемся графиком функции $y=\lg x$ в декартовой системе координат и перенесем значения x на ось y как показано стрелками на рис. 1. При этом каждая точка оси получит как бы две отметки: отметку x с одной стороны и отметку y — с другой (рис. 2). На стороне y сохраняется *равномерная шкала*. Это означает, что для любых двух точек y_1 и y_2 длина отрезка $[y_1, y_2]$ пропорциональна

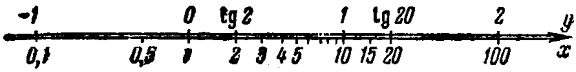

Рис. 2.

разности $y_2 - y_1$. В частности, откладывая вправо от точки $y = 0$ отрезки единичной длины, мы получим последовательно точки $y = 1, 2, \ldots$ Шкала на стороне x оказывается уже *неравномерной*; например, точки $x = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ находятся на неравных расстояниях. Построенная нами шкала x и будет логарифмической.

Как и при работе с числовой осью, мы будем вместо «точка x» говорить «число x». Заметим, что все числа на логарифмической шкале — положительные. Логарифмическая шкала простирается неограниченно в обе стороны.

Найдем расстояние $\rho[a, b]$ между двумя точками $x = a$ и $x = b$ $(b > a)$ логарифмической шкалы. Воспользуемся для этого равномерностью шкалы $y = \lg x$: длина отрезка шкалы y, совпадающего с отрезком $[a, b]$ шкалы x,

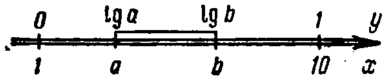

Рис. 3.

пропорциональна разности $\lg b - \lg a$ (рис. 3). Обозначая коэффициент пропорциональности через λ, получим

$$\rho[a, b] = \lambda(\lg b - \lg a) = \lambda \lg \frac{b}{a}. \qquad (1.1)$$

В частности, расстояние любой точки x логарифмической шкалы от точки 1 пропорционально десятичному логарифму числа x:

$$\rho[1, x] = \lambda \lg \frac{x}{1} = \lambda \lg x. \qquad (1.2)$$

Коэффициент λ равен длине отрезка $[1, 10]$ логарифмической шкалы (т. е. единице масштаба оси y), как видно из формулы

$$\rho[1, 10] = \lambda \lg 10 = \lambda. \qquad (1.3)$$

1.2. Основной принцип работы счетной линейки

Возьмем две одинаковые и параллельно расположенные логарифмические шкалы, которые мы обозначим через A и B. Сместим шкалу A относительно шкалы B и рассмотрим любые

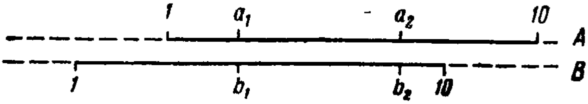

Рис. 4.

пары чисел a_1 и b_1, a_2 и b_2, которые окажутся друг против друга на этих шкалах (рис. 4). В силу формулы (1.1) равенство расстояний

$$\rho\,[a_1,\ a_2] = \rho\,[b_1,\ b_2]$$

равносильно равенству

$$\lambda \lg \frac{a_2}{a_1} = \lambda \lg \frac{b_2}{b_1}.$$

Это значит, что для рассматриваемых чисел имеет место пропорция

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1},$$

которую мы будем записывать в виде

$$\boxed{\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}} \qquad (1.4)$$

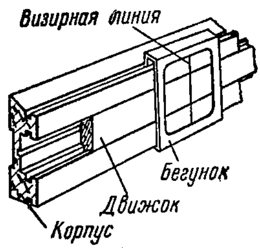

Рис. 5.

Мы получаем, таким образом, правило пропорций:

При любом смещении шкал ***A*** *и* ***B*** *все числа шкалы* ***A*** *пропорциональны расположенным против них числам шкалы* ***B*****.**

Счетная линейка устроена как раз так, что она позволяет смещать две одинаковые логарифмические шкалы. С этой целью в пазах *корпуса* счетной линейки может свободно перемещаться *движок* (рис. 5). На движке расположена логарифмическая шкала A, а на корпусе, параллельно ей, — такая же шкала B (рис. 6). Эти шкалы мы будем называть *рабочими*. *Бегунок с визирной линией* служит для точной установки чисел разных шкал друг против друга. Всегда можно установить движок так, чтобы число a_1 шкалы A оказалось точно против числа b_1 шкалы B. Если в пропорции (1.4) три члена a_1, b_1 и a_2 заданы, то указанная установка движка позволит найти четвертый член пропорции b_2 на шкале B против числа a_2 шкалы A.

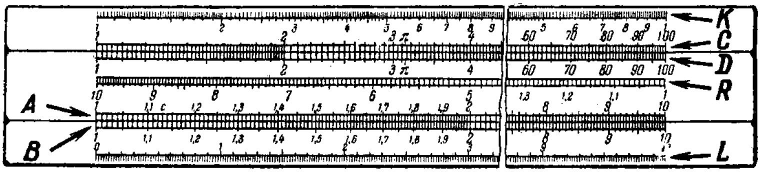

Рис. 6.

Таким образом, *рабочие шкалы счетной линейки позволяют решать пропорции, т. е. находить четвертый член пропорции по трем данным. В этом и состоит основной принцип работы счетной линейки.*

В следующих пунктах мы рассмотрим практические вопросы решения пропорций, связанные с тем, что рабочие шкалы счетной линейки содержат только один отрезок [1, 10] логарифмической шкалы.

Здесь же мы отметим одно важное следствие из правила пропорций (1.4). Если шкалу A сдвинуть относительно шкалы B вправо на длину отрезка [1, 10], то все числа шкалы B будут в 10 раз больше расположенных против них чисел шкалы A (рис. 7). Отсюда следует, что логарифмическая

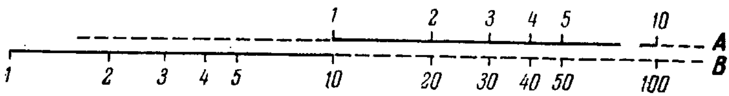

Рис. 7.

шкала на отрезке [10, 100] как бы повторяет отрезок [1, 10] этой шкалы с увеличением всех чисел в 10 раз. Точно так же любой отрезок $[10^n, 10^{n+1}]$ как бы повторяет отрезок [1, 10] с увеличением всех чисел в 10^n раз (n — целое). Благодаря этому свойству один отрезок [1, 10] позволяет восстановить, путем последовательного смещения, всю логарифмическую шкалу. Отмеченное свойство мы будем называть свойством *периодичности* логарифмической шкалы.

1.3. Строение рабочих шкал счетной линейки

Рабочие шкалы *A* (на движке) и *B* (на корпусе) представляют собой один и тот же отрезок [1, 10] логарифмической шкалы (см. рис. 6) с масштабным коэффициентом $\lambda_1 = 25$ *см* *). На этих шкалах целые числа обозначены (крупно) цифрами 1, 2, 3, ..., 9. Десятые доли на участке от 1 до 2 обозначены через 1,1; 1,2; ..., 1,9; на остальной части шкал *A* и *B* они отмечены лишь более удлиненными штрихами. Сотые доли отмечены короткими штрихами с разным шагом (вследствие неравномерности шкалы):

на участке от 1,00 до 2,00 — через 0,01;
на участке от 2,00 до 4,00 — через 0,02;
на участке от 4,00 до 10,00 — через 0,05.

Установка чисел, не отмеченных штрихами, производится на глаз; при этом считают, что между соседними короткими штрихами шкала приближенно равномерна. На шкалах *A* и *B*

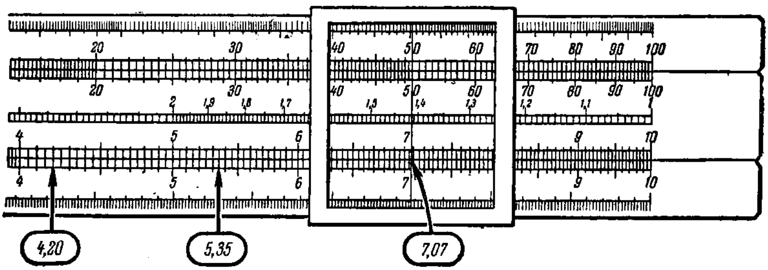

Рис. 8.

линейки можно установить лишь три знака числа (см. примеры на рис. 8). Относительная погрешность установки чисел на этих шкалах составляет около 0,2%.

Примечание. Шкалы *C* и *D*, находящиеся соответственно на корпусе и движке линейки (см. рис. 6), также можно применять в качестве рабочих шкал, поскольку они представляют собой отрезок [1, 100] логарифмической шкалы с одним и тем же масштабным коэффициентом $\lambda_2 = 12,5$. Здесь точность установки чисел в два раза меньше, чем на основных шкалах; например, на участке

*) Здесь приведена длина рабочих шкал так называемой *нормальной* счетной линейки. Нашей промышленностью выпускаются также укороченные линейки с меньшей длиной рабочих шкал и прецизионные линейки с большей длиной рабочих шкал.

от 1,00 до 2,00 короткие штрихи нанесены лишь через 0,02, а не через 0,01, как на шкалах *A* и *B*. Во избежание путаницы в дальнейшем мы называем рабочими шкалами лишь шкалы *A* и *B*.

Предупреждение. *Разность двух чисел x_1 и x_2, отмеченных соседними короткими штрихами* (так называемая *цена деления*), *может быть различной как для разных шкал, так и для разных участков одной и той же шкалы. Это всегда следует учитывать при установке или чтении чисел на шкалах линейки.*

Необходимый автоматизм в быстрой и безошибочной установке чисел на шкалах линейки можно постепенно выработать лишь при длительных тренировках и систематической работе с линейкой.

1.4. Решение пропорций на рабочих шкалах

Напомним, что *при любой фиксированной установке движка все числа шкалы A пропорциональны расположенным против них числам шкалы B.*

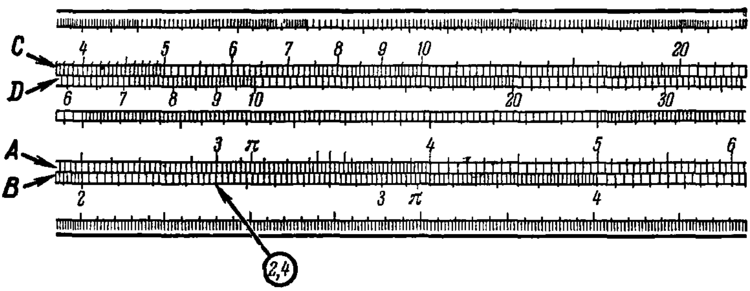

Рис. 9.

Пример. При установке движка, показанной на рис. 9, на шкалах *A* и *B* имеем

$$\frac{3}{2,4}=\frac{4}{3,2}=\frac{5}{4}=\frac{6}{4,8}.$$

Примечание. Та же установка движка порождает на шкалах *C* и *D* пропорции

$$\frac{4}{6,25}=\frac{5}{7,81}=\frac{6}{9,38}=\frac{7}{10,9}=\frac{8}{12,5}=\frac{9}{14,1}=\frac{10}{15,6}=\frac{20}{31,2}$$

Здесь числители выписаны с верхней из рассматриваемых шкал, а знаменатели — с нижней. Такой порядок записи удобен для чтения пропорций непосредственно со счетной линейки (ребро движка как бы заменяет черту в записи отношения). Поэтому в дальнейшем мы будем, как правило, придерживаться именно такого порядка записи.

Рассмотрим теперь более подробно метод решения пропорций на рабочих шкалах *A* и *B*.

Пусть в пропорции (1.4) заданы три члена a_1, b_1 и a_2, причем мы будем здесь считать, что все заданные числа заключены между 1 и 10; требуется найти четвертый член пропорции b_2.

Расчленим процесс решения задачи на отдельные операции (команды):

1) визирной линией бегунка отметить на шкале *B* число b_1;

2) установить движок так, чтобы число a_1 шкалы *A* оказалось под визирной линией;

3) переместить бегунок так, чтобы визирная линия отметила число a_2 шкалы *A*;

4) под визирной линией на шкале *B* прочесть искомое число b_2.

При этом может оказаться, что число a_2 шкалы *A* выйдет за границы шкалы *B* и, значит, против него не будет стоять никакого числа шкалы *B*. В этом случае для решения задачи надо воспользоваться отмеченным в п. **1.2** свойством периодичности логарифмической шкалы и продолжить шкалу *B* путем смещения ее на величину отрезка [1, 10] вправо или влево.

Продолжение рабочих шкал счетной линейки достигается переброской движка, состоящей из двух следующих операций, выполняемых *между* операциями 2) и 3):

2_{I}) отметить визирной линией положение того конца шкалы *A*, который не выходит за границы шкалы *B*;

2_{II}) передвинуть движок так, чтобы под визирной линией оказался второй конец шкалы *A* (см. ниже рис. 10).

Указанные два случая решения пропорций мы проиллюстрируем на примерах. При этом в дальнейшем мы будем записывать пропорции таким образом, чтобы искомое число (x) было в знаменателе, т. е. чтобы искомое число можно было прочесть на шкале *B* корпуса. (Разумеется, это вопрос не принципиальный, у каждого вычислителя вырабатывается привычка к определенному способу записи пропорции.)

Пример 1. Найти x из пропорции

$$\frac{5}{4}=\frac{3}{x}.$$

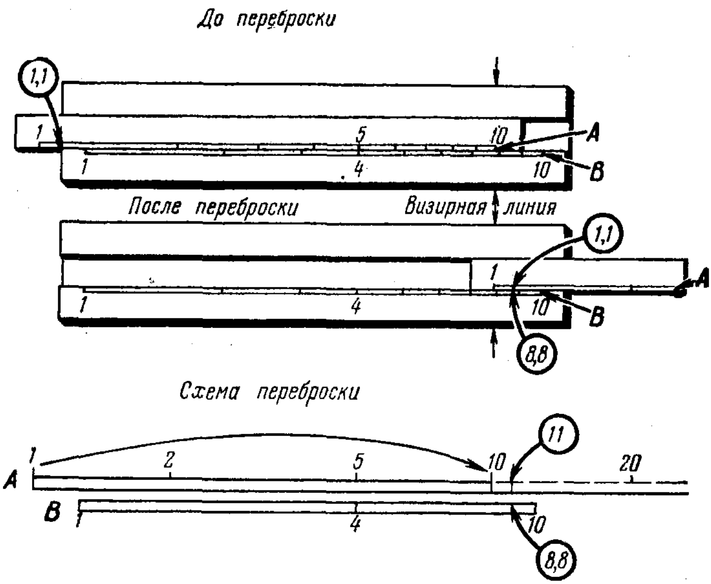

Рис. 10.

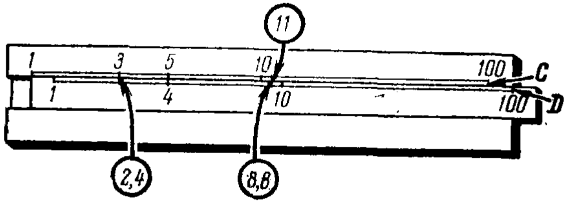

Рис. 11

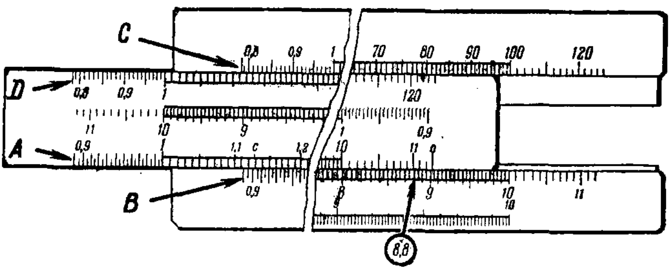

Рис. 12.

Решение. Установим движок так, чтобы число 5 шкалы A стало против числа 4 шкалы B (см. рис. 9); тогда против числа 3 шкалы A прочтем на шкале B искомое значение

$$x = 2{,}4.$$

Пример 2. Найти x из пропорции

$$\frac{5}{4} = \frac{1{,}1}{x}. \qquad (1.5)$$

Решение. Здесь начальная установка движка та же, что и в предыдущей задаче. Однако число 1,1 шкалы A выходит за левый конец шкалы B, и поэтому против него нельзя прочесть ответ на шкале B.

Перебросив движок вправо (рис. 10), мы сможем против числа 1,1 шкалы A прочесть на шкале B число 8,8.

Как видно из схемы переброски на рис. 10, устанавливая число 1,1 на переброшенном движке, мы фактически устанавливаем число 11 на продолжении шкалы A. Следовательно, в правой части пропорции (1.5) мы увеличиваем масштаб в 10 раз, что приводит к увеличению значения x в 10 раз. Другими словами, на шкале B мы читаем не x, а $10x = 8{,}8$, откуда $x = 0{,}88$.

Примечание 1. На шкалах C и D, содержащих по два отрезка логарифмической шкалы [1, 10] и [10, 100], можно решать любые пропорции без переброски движка (но с меньшей точностью, чем на шкалах A и B). На рис. 11 показано решение рассмотренных выше примеров 1 и 2 на шкалах C и D с помощью одной и той же установки движка.

Примечание 2. На некоторых линейках для уменьшения количества перебросок движка шкáлы A и B продлены влево до 0,88 и вправо до 11,2 (рис. 12). Например, пропорцию (1.5) на таких линейках можно решать на шкалах A и B без переброски движка (см. рис. 12).

1.5. Нормализация чисел. Определение порядка результата вычислений

До сих пор мы считали, что в пропорции $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{x}$ исходные данные a_1, b_1, a_2 заключены между 1 и 10. Определение порядка результата $x = \frac{b_1 a_2}{a_1}$ в этом случае не вызывает затруднений. В общем же случае при решении пропорций с любыми исходными данными, в частности при умножении (когда $a_1 = 1$) или при делении (когда $a_2 = 1$), для быстрого и точного определения порядка результата следует предварительно нормализовать исходные данные, т. е. представить их в подходящем виде.

Условимся говорить, что *число а нормализовано*, если оно записано в виде

$$a = a_0 \cdot 10^n, \tag{1.6}$$

где n — целое, а множитель a_0 заключен между 1 и 10 ($1 \leqslant a_0 < 10$). Будем называть a_0 *основой*, n — *порядком* числа a. Отметим, что целая часть основы есть одно из чисел 1, 2, ..., 9.

Примеры:

$$a = 3580 = 3{,}580 \cdot 10^3 \qquad (a_0 = 3{,}580, \quad n_a = 3);$$
$$b = 0{,}0432 = 4{,}32 \cdot 10^{-2} \qquad (b_0 = 4{,}32, \quad n_b = -2);$$
$$c = 7{,}33 = 7{,}33 \cdot 10^0 \qquad (c_0 = 7{,}33, \quad n_c = 0).$$

Рассмотрим умножение и деление чисел, представленных в нормализованном виде. Из формул

$$ab = (a_0 \cdot 10^n) \cdot (b_0 \cdot 10^m) = (a_0 b_0) \cdot 10^{n+m},$$
$$\frac{a}{b} = \frac{a_0 \cdot 10^n}{b_0 \cdot 10^m} = \left(\frac{a_0}{b_0}\right) \cdot 10^{n-m}$$

видно, что умножение и деление нормализованных чисел сводится к умножению и делению их основ. Насколько это упрощает определение порядка результата, мы покажем на следующем примере.

Пример. Вычислить

$$\frac{ab}{c} = \frac{3580 \cdot 0{,}0432}{7{,}33}.$$

Решение распадается на следующие этапы:

1) Производим нормализацию чисел a, b, c и записываем рассматриваемое выражение в виде

$$\frac{ab}{c} = \frac{3{,}58 \cdot 4{,}32}{7{,}33} \cdot 10^{3+(-2)-0} = \frac{a_0 b_0}{c_0} \cdot 10^1.$$

2) Прикидываем в уме:

$$\frac{a_0 b_0}{c_0} \approx \frac{3 \cdot 4}{7} \approx 2.$$

3) На счетной линейке выполняем необходимые вычисления, т. е. решаем пропорцию $\frac{c_0}{b_0} = \frac{a_0}{x}$, и записываем резуль-