БИБЛИОТЕКА СБОРНИКА МАТЕМАТИКА

Г. РУТИСХАУЗЕР

АЛГОРИТМ ЧАСТНЫХ И РАЗНОСТЕЙ

Г. Рутисхаузер

АЛГОРИТМ ЧАСТНЫХ И РАЗНОСТЕЙ

Редактор *В. В. Зарицкая*

Художественный редактор *В. И. Шаповалов*
Художественный редактор *Е. И. Подмарькова*
Технический редактор *Е. С. Потапенкова*
Корректор *В. С. Соколов*

Сдано в производство 16/V—1960 г.
Подписано к печати 6/X—1960 г.
Бумага 84×108 1/32=1,5 бум. л.
4,9 печ. л.
Уч. изд. л. 4,0. Изд. № 1/5642
Цена 2 р. 80 к. Зак. 322
С 1/1—1961 г. цена 28 к.

*

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва, 1-й Рижский пер., 2

*

Московская типография № 5 Мосгорсовнархоза
Москва, Трехпрудный пер., 9

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

ВЫПУСКАЕТ СЕРИЮ БРОШЮР
ПОД ОБЩИМ НАЗВАНИЕМ

«БИБЛИОТЕКА СБОРНИКА „МАТЕМАТИКА“»

Вышли из печати

Микусинский Я., Сикорский Р., **Элементарная теория обобщенных функций**, 1. Варшава, 1957, перевод с английского, 3,5 изд. л., ИЛ, 1959.

Хёрмандер Л., **К теории общих дифференциальных операторов с частными производными.** Уппсала, 1955, перевод с английского, 6 изд. л., ИЛ, 1959.

Халмош П. Р., **Лекции по эргодической теории.** Токио, 1956, перевод с английского, 7 изд. л., ИЛ, 1959.

Капланский И., **Введение в дифференциальную алгебру.** Париж, 1957, перевод с английского, 4 изд. л., ИЛ, 1959.

Карлеман Т., **Математические задачи кинетической теории газов.** Уппсала, 1957, перевод с французского, 6 изд. л., ИЛ, 1960.

Хейман В. К., **Многолистные функции.** Кембридж, 1958, перевод с английского, 8,4 изд. л., ИЛ, 1960.

Номидзу К., **Группы Ли и дифференциальная геометрия**, 1956, перевод с английского, 6 изд. л., ИЛ, 1960.

Судзуки М., **Строение группы и строение структуры ее подгрупп.** Берлин, Гёттинген, Гейдельберг, 1956, перевод с английского, 6 изд. л.

Ито К., **Вероятностные процессы**, вып. I. Токио, 1957, перевод с японского, 6 изд. л.

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

ВЫПУСКАЕТ СЕРИЮ БРОШЮР
ПОД ОБЩИМ НАЗВАНИЕМ

«БИБЛИОТЕКА СБОРНИКА „МАТЕМАТИКА"»

Находятся в печати

Судзуки М., **Строение группы и строение структуры ее подгрупп.** Берлин, Гёттинген, Гейдельберг, 1956, перевод с английского, 6 изд. л.

Гудстейн Р. Л., **Математическая логика.** Лейчестер, 1957, перевод с английского, 5 изд. л.

Гренандер У., **Случайные процессы и статистические выводы.** Стокгольм, 1950, перевод с английского, 7 изд. л.

Дей М. М., **Нормированные линейные пространства.** Берлин, 1958, перевод с английского, 8 изд. л.

Гординг Л., **Задача Коши для гиперболических уравнений.** Чикаго, 1958, перевод с английского, 5 изд. л.

Лере Ж., **Дифференциальное и интегральное исчисления на комплексном аналитическом многообразии.** Париж, 1959, перевод с французского, 6 изд. л.

Готовятся к печати

Гротендик А., **О некоторых вопросах гомологической алгебры.** Япония, 1957, перевод с французского, 7 изд. л.

Ито К., **Вероятностные процессы,** вып. II. Токио, 1958, перевод с японского, 6 изд. л.

И * Л

Издательство

иностранной

литературы

*

Mitteilungen aus dem Institut für angewandte Mathematik

AN DER EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN ZÜRICH
HERAUSGEGEBEN VON PROF. DR. E. STIEFEL

DER QUOTIENTEN-DIFFERENZEN-ALGORITHMUS

von

Heinz Rutishauser

Professor an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich

BIRKHÄUSER VERLAG·BASEL/STUTTGART
1957

БИБЛИОТЕКА СБОРНИКА «МАТЕМ

Г. РУТИСХАУЗЕР

АЛГОРИТМ ЧАСТНЫХ И РАЗНОСТЕЙ

Перевод с немецкого
В. М. КУРОЧКИНА

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва — 1960

АННОТАЦИЯ

В настоящей брошюре изложен новый метод численного решения некоторых часто встречающихся на практике задач. Метод развивается на базе теории непрерывных дробей. Он позволяет значительно сократить объем вычислительной работы. Рассматривается применение этого метода к решению таких «классических» задач, как решение алгебраических уравнений, нахождение собственных значений и собственных векторов и др.

Книга представляет интерес для лиц, интересующихся новыми, численными методами, а также для студентов физико-математических факультетов университетов и педагогических институтов.

Редакция литературы по математическим наукам

ПРЕДИСЛОВИЕ ПЕРЕВОДЧИКА

В этой небольшой книге рассматриваются очень интересные вопросы, связанные с применением непрерывных дробей для численного решения некоторых часто встречающихся на практике задач, в том числе и таких «классических», как решение алгебраических уравнений (нахождение всех корней — действительных и комплексных), нахождение собственных значений и собственных векторов и др. Многие из применяемых сейчас методов для решения этих задач связаны либо с большим объемом вычислительной работы, либо с какими-нибудь ограничениями, суживающими область их применения. Методы, развиваемые автором на базе теории непрерывных дробей, представляются в этом отношении весьма заманчивыми. Некоторые из них неожиданно оказываются просто красивыми. Следует, однако, заметить, что вся эта теория создана сравнительно недавно и, по-видимому, не получила еще достаточно широкой проверки при практических расчетах, особенно при полностью автоматизированных расчетах, выполняемых современными быстродействующими вычислительными машинами. Недостаточно использовались эти методы и у нас. Можно надеяться, что издание русского перевода этой книги будет способствовать более широкому распространению и дальнейшему развитию предлагаемых автором численных методов.

Книга состоит, по существу, из трех отдельных журнальных статей, лишь незначительно переработанных автором. Это наложило известный отпечаток на характер изложения материала и может создать некоторые трудности при чтении. В частности, в тексте содержатся многочисленные ссылки на другие статьи, и часто терминология и обозначения из этих статей используются без достаточных разъяснений. Мы не сочли возможным делать в таких случаях примечания, так как их было бы слишком много.

ВВЕДЕНИЕ

В связи с практическим применением ВО-алгоритма (алгоритм биортогонализации, предложенный Ланцошем, см. [4], [5]) проф. Е. Штифель обратил мое внимание на проблему получения старших собственных значений непосредственно по константам Шварца, без использования обходного пути с биортогонализацией. Это послужило автору поводом для разработки алгоритма, решающего указанную задачу.

Правда, уже Айткен [1] предложил метод, предназначавшийся им главным образом для решения алгебраических уравнений и также дающий возможность получать старшие собственные значения по константам Шварца. Далее, Ланцошу [1]) принадлежит алгоритм построения характеристического уравнения матрицы по константам Шварца. Адамар в своей диссертации [2] дал способ определения полюсов функции по ее разложению в степенной ряд. Как будет показано в § 1, он решил тем самым и упомянутую выше проблему о собственных значениях. Уже решенная проблема изучается здесь снова только потому, что предлагаемый алгоритм имеет также ряд других примене-

---

[1]) Речь идет не о ВО-алгоритме. См. главу VI работы [4] и стр. 173—179 работы [5].

ний, и в частности он указывает на весьма интересную связь с теорией непрерывных дробей [1]).

Книга состоит из трех глав; в первых двух излагается теория и применение QD-алгоритма, глава III посвящена распространению QD-алгоритма на векторы. Наконец, в приложении рассматриваются некоторые связанные с этим вопросы и, в частности, LR-преобразования. Главы I, II и III были опубликованы отдельными статьями в журнале ZAMP [2]), а главы I и II для этого издания были частично переработаны.

[1]) Я благодарен проф. Штифелю за указания на возможность упростить некоторые доказательства с помощью непрерывных дробей.

[2]) Глава I — ZAMP 5 (1954), 233—251; глава II — ZAMP 5 (1954), 496—508; глава III — ZAMP 6 (1955), 387—401.

Глава I

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

§ 1. Постановка задачи

Пусть A — квадратная матрица порядка n, A^* — транспонированная матрица, а $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{y}_0$ — два вектора, находящихся в «общем положении» по отношению к матрицам A и A^* соответственно; другими словами, отличны от нуля все компоненты вектора $\mathbf{x}_0$ (соответственно $\mathbf{y}_0$) в базисе, состоящем из собственных и присоединенных векторов матрицы A (соответственно A^*).

Образуем теперь из $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{y}_0$ бесконечное количество векторов $\mathbf{x}_\nu = A^\nu \mathbf{x}_0$ и $\mathbf{y}_\nu = (A^*)^\nu \mathbf{y}_0$, а также их скалярные произведения $s_{\mu+\nu} = (\mathbf{x}_\mu, \mathbf{y}_\nu)$, которые зависят, очевидно, только от суммы индексов μ и ν и будут в дальнейшем называться *константами Шварца матрицы A по отношению к начальным векторам* $\mathbf{x}_0$ *и* $\mathbf{y}_0$.

Функция

$$f(z) = \sum_0^\infty \frac{s_\varkappa}{z^{\varkappa+1}}, \tag{1}$$

образованная с помощью этих констант, рациональна, причем ее полюсы совпадают с собственными значениями матрицы A, так как

$$f(z) = (B\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0), \quad \text{где} \quad B = (zE - A)^{-1}.$$

Таким образом, стоящая перед нами задача, а именно нахождение собственных значений матрицы A с помощью констант Шварца, сводится к определению полюсов рациональной функции

$$f(z) = \frac{s_0}{z} + \frac{s_1}{z^2} + \dots .$$

В случае когда A — бесконечная матрица или интегральный оператор, функция $f(z)$ не обязательно должна быть рациональной, однако ее полюсы по-прежнему оказываются собственными значениями для A. Можно доказать, что в определенных случаях $f(z)$ является мероморфной функцией, в частности, если константы Шварца получаются из самосопряженной и положительно определенной задачи на собственные значения, для которой справедлива теорема о разложении.

Исходя из изложенного, целесообразно изучать не задачу нахождения собственных значений, а вслед за Адамаром [2] более общую задачу нахождения полюсов функции $f(z)$, определяемой рядом (1) с произвольными комплексными числами $s_\varkappa$. Кроме того, в некоторых случаях будет отыскиваться также разложение $f(z)$ на простейшие дроби (если, конечно, оно существует).

§ 2. Алгоритм частных и разностей (QD-алгоритм)

Для случая когда функция

$$f(z)=\sum_{0}^{\infty}\frac{s_\varkappa}{z^{\varkappa+1}} \tag{1}$$

вне некоторого круга $|z|=R$ имеет в точности один простой полюс λ_1, уже Д. Бернулли дал формулу

$$\lambda_1=\lim_{\nu\to\infty}\frac{s_{\nu+1}}{s_\nu}. \tag{2a}$$

Для определения последующих полюсов можно применить формулы (21), приведенные у Айткена [1]; например, для нахождения полюса λ_2 при дополнительном предположении $|\lambda_1|>|\lambda_2|>|\lambda_3|$ может служить соотношение

$$\lambda_2=\lim_{\nu\to\infty}\frac{\begin{vmatrix} s_{\nu+1} & s_{\nu+2}\\ s_{\nu+2} & s_{\nu+3}\end{vmatrix} s_{\nu+1}^{-1}}{\begin{vmatrix} s_{\nu} & s_{\nu+1}\\ s_{\nu+1} & s_{\nu+2}\end{vmatrix} s_{\nu}^{-1}}. \tag{2b}$$

Аналогичные формулы могут быть выписаны для нахождения и последующих полюсов. Однако, использовав тождество

$$\begin{vmatrix} s_{\nu} & s_{\nu+1}\\ s_{\nu+1} & s_{\nu+2}\end{vmatrix} s_{\nu}^{-1}=s_{\nu+1}\left(\frac{s_{\nu+2}}{s_{\nu+1}}-\frac{s_{\nu+1}}{s_\nu}\right),$$

можно получить λ_2 из констант Шварца $s_\nu = s_1^{(\nu)}$ [1]) также с помощью следующего процесса:

Образуем частные $q_1^{(\nu)} = s_1^{(\nu+1)}/s_1^{(\nu)}$, затем из $q_1^{(\nu)}$ образуем разности $d_1^{(\nu)} = q_1^{(\nu+1)} - q_1^{(\nu)}$ и, наконец, произведения

$$s_2^{(\nu)} = s_1^{(\nu+1)} d_1^{(\nu)} \left(= \frac{1}{s_\nu} \begin{vmatrix} s_\nu & s_{\nu+1} \\ s_{\nu+1} & s_{\nu+2} \end{vmatrix} \right).$$

Тогда, согласно (2b), λ_2 будет равно пределу частных $q_2^{(\nu)} = s_2^{(\nu+1)}/s_2^{(\nu)}$ при $\nu \to \infty$ точно так же, как λ_1 равно пределу $q_1^{(\nu)}$ [согласно (2a)].

При практических расчетах все числа $s_1^{(\nu)}$, $q_1^{(\nu)}$, ... пишут столбцами друг за другом: колонка констант Шварца $s_1^{(\nu)}$, затем столбец частных $q_1^{(\nu)}$, столбец разностей $d_1^{(\nu)}$ и т. д. (См. пример на стр. 12.)

Можно предположить, что при соответствующем продолжении этого процесса в качестве предельных значений последовательностей частных $q_3^{(\nu)}$, $q_4^{(\nu)}$, ... мы получим также и следующие полюсы λ_3, λ_4, ... (предполагается, что $|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| > |\lambda_4| > \ldots$).

В действительности дело так и обстоит; нужно только последующие столбцы разностей $d_\sigma^{(\nu)}$ ($\sigma = 2, 3, \ldots$) перед умножением на $s_\sigma^{(\nu+1)}$ несколько изменить; в результате получается следующее правило для применения QD-*алгоритма* к заданному ряду коэффициентов (констант Шварца) $s_\nu = s_1^{(\nu)}$.

Отправляясь от $s_1^{(\nu)}$, считаем последовательно ($\sigma = 1, 2, 3, \ldots$)

$$\left.\begin{array}{ll} q_\sigma^{(\nu)} = s_\sigma^{(\nu+1)}/s_\sigma^{(\nu)} & \text{последовательность частных,} \\ d_\sigma^{(\nu)} = q_\sigma^{(\nu+1)} - q_\sigma^{(\nu)} & \text{последовательность разностей,} \\ e_\sigma^{(\nu)} = d_\sigma^{(\nu)} + e_{\sigma-1}^{(\nu+1)} & \text{модифицированные разности}^{2)}, \\ s_{\sigma+1}^{(\nu)} = s_\sigma^{(\nu+1)} e_\sigma^{(\nu)} & \text{последовательность новых величин } s. \end{array}\right\} \quad (3)$$

---

[1]) В дальнейшем мы будем также обозначать константы Шварца s_ν через $s_1^{(\nu)}$.

[2]) Для $\sigma = 1$ величины $e_1^{(\nu)}$ и $d_1^{(\nu)}$ совпадают, т. е. $e_0^{(\nu)} = 0$.

Получаемые таким образом величины можно расположить по следующей схеме (QD-схема):

$$
\begin{array}{ccc||cccc||ccc}
s_1^{(0)} & & & & & & & & & \\
 & q_1^{(0)} & & & & & & & & \\
s_1^{(1)} & & d_1^{(0)} = e_1^{(0)} & s_2^{(0)} & & & & & & \\
 & q_1^{(1)} & & & q_2^{(0)} & & & & & \\
s_1^{(2)} & & d_1^{(1)} = e_1^{(1)} & s_2^{(1)} & & d_2^{(0)} & e_2^{(0)} & s_3^{(0)} & & \\
 & q_1^{(2)} & & & q_2^{(1)} & & & & q_3^{(0)} & \\
s_1^{(3)} & \cdot & d_1^{(2)} = e_1^{(2)} & s_2^{(2)} & \cdot & d_2^{(1)} & e_2^{(1)} & s_3^{(1)} & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & &
\end{array}
$$

Пример QD-алгоритма. В качестве $s_1^{(\nu)}$ возьмем так называемые числа Фибоначчи; тогда

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - z - 1},$$

$s_1^{(\nu)}$	$q_1^{(\nu)}$	$d_1^{(\nu)} = e_1^{(\nu)}$	$s_2^{(\nu)}$	$q_2^{(\nu)}$	$d_2^{(\nu)}$	$e_2^{(\nu)}$	$s_3^{(\nu)}$
1							
	1						
1		1					
	2		1				
2		−0,5		−1			
	1,5		−1		+0,5	0	0
3		0,166667		−0,5			
	1,666667		0,5		−0,166667	0	0
5		−0,066667		−0,666667			
	1,6		−0,333333		+0,066667	0	0
8		+0,025		−0,6			
	1,625		+0,2		−0,025	0	0
13		−0,009615		−0,625			
	1,615384		−0,125	↓			
21	↓						
	$\lambda_1 \approx 1,618034$			$\lambda_2 \approx -0,618034$			

Уже на этом простом примере можно подметить один факт, который в дальнейшем будет доказан в общем виде:

Если $f(z)$ — рациональная функция, знаменатель которой имеет степень n, то QD-схема обрывается после *образования столбца n-х модифицированных разностей аналогично тому, как обрывается на n-м шаге схема образования обычных разностей для многочлена.*

Указанное свойство позволяет в таких случаях заполнять QD-схему сверху вниз, если только нам известны все величины, стоящие в верхнем (косом) ряду:

$$s_0,\ q_1^{(0)},\ e_1^{(0)},\ q_2^{(0)},\ \ldots,\ e_{n-1}^{(0)},\ q_n^{(0)}.$$

Этот процесс, аналогичный хорошо известным схемам с обычными разностями, особенно важен для приложений.

§ 3. Правила ромба

Если не требуется получить величины $s_\sigma^{(\nu)}$ $(\sigma > 1)$, то можно руководствоваться при вычислениях следующим, более простым правилом (считаем, что $e_0^{(\nu)} = 0$ и $q_1^{(\nu)} = s_{\nu+1}/s_\nu$):

$$\left.\begin{aligned} e_\sigma^{(\nu)} &= e_{\sigma-1}^{(\nu+1)} + q_\sigma^{(\nu+1)} - q_\sigma^{(\nu)}, \\ q_{\sigma+1}^{(\nu)} &= q_\sigma^{(\nu+1)} \cdot \frac{e_\sigma^{(\nu+1)}}{e_\sigma^{(\nu)}}, \end{aligned}\right\} \sigma = 1,\ 2,\ \ldots, \tag{4}$$

и получить упрощенную форму QD-схемы

$$\begin{array}{ccccccccc}
s_1^{(0)} & & & & & & & & \\
& q_1^{(0)} & & & & & & & \\
s_1^{(1)} & & e_1^{(0)} & & & & & & \\
& q_1^{(1)} & & q_2^{(0)} & & & & & \\
s_1^{(2)} & & e_1^{(1)} & & e_2^{(0)} & & & & \\
& q_1^{(2)} & & q_2^{(1)} & & q_3^{(0)} & & & \\
s_1^{(3)} & . & e_1^{(2)} & . & e_2^{(1)} & . & . & & \\
. & . & . & . & . & . & & . & \\
. & . & . & . & . & . & & & . \\
. & & . & & . & & & &
\end{array}$$

Вышеприведенные формулы (4), по которым строится упрощенная QD-схема, могут быть сформулированы по предложению Штифеля [1]) в виде так называемых *правил ромба*.

---

[1]) См. Штифель ([13], стр. 42).