

当代经济学系列丛书

Contemporary Economics Series

主编 陈昕

(第二版)

# 经济理论中的 最优化方法

当代经济学  
教学参考书系

[美] 阿维纳什·K. 迪克西特 著

冯曲 吴桂英 译



上海三联书店  
上海人民出版社

当代经济学系列丛书

Contemporary Economics Series

主编 陈昕

(第二版)

# 经济理论中的 最优化方法

[美] 阿维纳什·K.迪克西特 著

冯曲 吴桂英 译

当代经济学参考书系  
教学参考书



上海三联书店  
上海人民出版社

世纪高教

图书在版编目(CIP)数据

经济理论中的最优化方法,第2版/(美)迪克西特(Dixit, A.K.)著;  
冯曲,吴桂英译.

—上海:上海人民出版社,2006

(当代经济学系列丛书.当代经济学教学参考书系/陈昕主编)

书名原文:Optimization in Economic Theory

ISBN 7-208-06084-3

I. 经... II. ①迪...②冯...③吴... III. 经济理论—最佳化 IV. F0

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第008439号

责任编辑 钱敏

装帧设计 敬人设计工作室

吕敬人+笑阳

[美]阿维纳什·K.迪克西特 著

冯曲 吴桂英 译

经济理论中的最优化方法(第二版)

上海三联书店

上海人民出版社

200001 上海福建中路193号 www.ewen.cc



上海世纪出版股份有限公司

高等教育图书公司 出品

上海福建中路193号24层021-63914988

世纪出版集团发行中心发行

上海市印刷七厂印刷

2006年3月第1版

2006年3月第1次印刷

开本:787×1092 1/16

印张:11.25 插页:5 字数:165,000

ISBN 7-208-06084-3/F·1366

定价:22.00



世纪高教

上海世纪出版股份有限公司高等教育图书公司 出品

# 出版前言

为了全面地、系统地反映当代经济学的全貌及其进程,总结与挖掘当代经济学已有的和潜在的成果,展示当代经济学新的发展方向,我们决定出版“当代经济学系列丛书”。

“当代经济学系列丛书”是大型的、高层次的、综合性的经济学术理论丛书。它包括三个子系列:(1)当代经济学文库;(2)当代经济学译库;(3)当代经济学教学参考书系。该丛书在学科领域方面,不仅着眼于各传统经济学科的新成果,更注重经济前沿学科、边缘学科和综合学科的新成就;在选题的采择上,广泛联系海内外学者,努力开掘学术功力深厚、思想新颖独到、作品水平拔尖的“高、新、尖”著作。“文库”力求达到中国经济学界当前的最高水平;“译库”翻译当代经济学的名人名著;“教学参考书系”则主要出版国外著名高等院校的通用教材。

本丛书致力于推动中国经济学的现代化和国际标准化,力图在一个不太长的时期内,从研究范围、研究内容、研究方法、分析技术等方面逐步完成中国经济学从传统向现代的转轨。我们渴望经济学家们支持我们的追求,向这套丛书提供高质量的标准经济学著作,进而为提高中国经济学的水平,使之立足于世界经济学之林而共同努力。

我们和经济学家一起瞻望着中国经济学的未来。

# 中文版前言

我非常高兴为我这本关于最优化的书的中译本写一个简短的前言。在这本书首次问世 27 年、再版 13 年之后，其内容和阐述依旧被认为足够有趣而值得翻译成中文，这确实是一件让人感到欣慰的事。中国正在迅速崛起而成为世界上一个重要的经济力量。如果本书能够为中国经济决策的质量作出即使是非常微小的贡献，那也将是一个很大的成就。

自我写作本书以来，经济学中出现了很多新的思想。行为经济学中新的经验的和理论的发展，向关于消费者和厂商目标的某些传统假定提出了挑战。因而值得强调的是，除了内部逻辑的一致性之外，最优化的方法并不依赖于任何关于这些目标的特定的假定。这些方法只不过向我们显示了如何最好地追求我们的目标，而不论这些目标具体是什么。新的应用领域已经出现了，而其中不对称信息和金融经济学领域或许最为重要。如果我是在今天首次写作本书，那么除了书中目前提到的关于这两个领域的少量例题之外，我还将为这两个领域提供更深入的内容。但是书中最优化方法对于新的或成长中的领域依旧有用。

我要特别感谢冯曲先生和吴桂英小姐为翻译本书所作的工作。遗憾的是，我对中文一无所知，所以不能进行直接的判断。但是我确实知道他们是多么仔细地阅读了本书的英文版本。特别是冯曲先生，他发现了若干排印上和确实存在的错误，并使我注意到这些错误。因而该中译本应该会对原书的一个实际的改进，而且也会有助于英文版下一次印刷的改进。

Avinash K. Dixit  
Princeton 大学经济系  
2003 年 12 月 9 日

# 前 言

**最**优地利用稀缺资源,或者说,在约束条件下求最大化的问题,是经济学的中心主题。但约束条件下最大化的数学方法往往作为数学的一个分支被传授给经济学系的学生们,并且它的经济学应用也是分开进行的。也许,从一开始就将数学与经济学联系起来统一论述,能给学生提供更快更深刻的理解。此书就旨在给出这样的阐述。但我所强调的是经济学上的直觉而并非数学上的严谨。数学定理证明的构造是为了说明经济学上感兴趣的观点和便于经济学上的应用。我也挑选了一些说明性的例题和习题,而之所以挑选这些是因为它们在经济学上是有趣和有用的。

本书的第一版出版于1976年。时隔多年,本书的中心目标依然不变,但是主题有了很大的变化。因而我对原书作了大量的修改。例如,有关不确定性以及金融和不对称信息等主题,现在已是必不可少。因此,我新增一章专门来讨论这些问题,同时也扩充了关于动态规划的那章来讨论不确定性。

大部分章节已完全重写,并增加了很多新的例子和习题。有一个创新特别值得提及。在我写第一版时,初级和中级微观经济学中主要的阐述模式是几何模式,即基于预算线和无差异曲线之间,或者成本线和等产量线之间的相切。而今,相切这一老套做法似乎不再流行。因而我使用了一个更加简单,在经济学上更加直观的出发点,即通过“套利”操作对无成本改进的搜寻。这一做法允许统一地处理相切和角点最优解,并且其直觉更容易扩展到有时间和不确定性等的情形。

自本书第一版问世至今,经济学专业学生的数学

训练已大大改进。利用这一点,我引进了一些更深一点的论题,加深的内容体现在最后三章中,并在数学附录中概述了约束最大化的中心结论——库恩—塔克定理——的证明。但是本书的主要对象依旧是大部分经济学专业的高年级本科生和硕士一年级的学生,而并非少数打算成为数理经济学家的学生们。

本书的主要用途是作为中级和高级微观经济学的一个补充教材。它也可以用作主要教材,但是应当配以其他的书本或论文,包括那些列在每章末作为“进一步阅读”的论文和书本。关于消费者和生产者行为的短期课程可以将第1—8章作为基础。第9和第10章则相互独立。因而,包括时间维度上的最优化问题但不包括不确定性的课程可以略过第9章以及第11章的部分内容。相反地,包括不确定性但是与时间无关的课程可以略过第10章和第11章。

就推理的主线而言,书中的例题都得到了充分的解答,但是某些细节被省略了。习题包含了正文中的理论的进一步发展和应用。例题和习题也是学习本书不可缺少的部分,我强烈建议读者们仔细地完成它们。

我要感谢那些对改进第一版给了我有用建议的诸多读者,尤其是 Pete Kyle。同时,我也非常感谢 Richard Quandt,他极其仔细地阅读了第二版的全部手稿并且指出了其中的几个错误。我还要感谢 Barry Nalebuff 和 Carl Shapiro,他们也阅读了本书的部分章节。Peter Kenen 的法则是说,总会有你想象不到的排印错误,我为本书中仍然可能存在的错误负责。

A. K. Dixit  
Princeton  
1989年12月



# 目 录

|     |   |                 |
|-----|---|-----------------|
| 001 |   | 出版前言            |
| 001 |   | 中文版前言           |
| 001 |   | 前言              |
| 001 | 1 | 导论              |
| 002 |   | 1.1 套利方法        |
| 004 |   | 1.2 使用微积分的相切条件  |
| 005 |   | 1.3 角点解         |
| 006 |   | 1.4 收入的边际效用     |
| 006 |   | 1.5 多种商品和多个约束条件 |
| 007 |   | 1.6 非紧的约束条件     |
| 008 |   | 基础阅读            |
| 009 | 2 | 拉格朗日方法          |
| 009 |   | 2.1 问题的陈述       |
| 010 |   | 2.2 套利方法        |
| 012 |   | 2.3 约束规格        |
| 013 |   | 2.4 相切方法        |
| 014 |   | 2.5 必要条件和充分条件   |
| 016 |   | 2.6 拉格朗日方法      |
| 017 |   | 例题              |

|     |   |                    |
|-----|---|--------------------|
| 020 |   | 习题                 |
| 022 |   | 进一步阅读              |
| 023 | 3 | 扩展与一般化             |
| 023 |   | 3.1 多个变量和多个约束条件的情形 |
| 025 |   | 3.2 非负变量           |
| 027 |   | 3.3 不等式约束          |
| 029 |   | 例题                 |
| 034 |   | 习题                 |
| 036 |   | 进一步阅读              |
| 037 | 4 | 影子价格               |
| 037 |   | 4.1 比较静态分析         |
| 038 |   | 4.2 等式约束           |
| 039 |   | 4.3 影子价格           |
| 041 |   | 4.4 不等式约束          |
| 044 |   | 例题                 |
| 048 |   | 习题                 |
| 049 |   | 进一步阅读              |
| 050 | 5 | 最大值函数              |
| 050 |   | 5.1 目标函数中的参数       |
| 052 |   | 5.2 包络定理           |
| 054 |   | 5.3 影响所有函数的参数      |
| 055 |   | 5.4 某些选择变量固定不变     |
| 057 |   | 例题                 |
| 060 |   | 习题                 |
| 061 |   | 进一步阅读              |
| 062 | 6 | 凸集及其分离             |

|     |     |                |
|-----|-----|----------------|
| 062 | 6.1 | 分离性质           |
| 063 | 6.2 | 凸集和凸函数         |
| 068 | 6.3 | 分离角度的最优化定理     |
| 070 | 6.4 | 惟一性            |
| 073 |     | 例题             |
| 075 |     | 习题             |
| 076 |     | 进一步阅读          |
| 078 | 7   | 凹规划            |
| 078 | 7.1 | 凹函数及其导数        |
| 079 | 7.2 | 凹规划            |
| 087 | 7.3 | 拟凹规划           |
| 089 | 7.4 | 惟一性            |
| 090 |     | 例题             |
| 093 |     | 习题             |
| 094 |     | 进一步阅读          |
| 095 | 8   | 二阶条件           |
| 095 | 8.1 | 局部和全局最大值       |
| 096 | 8.2 | 无约束最大化问题       |
| 099 | 8.3 | 约束最优化          |
| 102 | 8.4 | 包络性质           |
| 103 |     | 例题             |
| 107 |     | 习题             |
| 108 |     | 进一步阅读          |
| 110 | 9   | 不确定性           |
| 110 | 9.1 | 期望效用           |
| 114 | 9.2 | 一种无风险资产和一种风险资产 |
| 116 | 9.3 | 投资组合选择         |

|     |             |
|-----|-------------|
| 120 | 例题          |
| 127 | 习题          |
| 128 | 进一步阅读       |
| 130 | 10 时间:最大值原理 |
| 130 | 10.1 问题的论述  |
| 132 | 10.2 最大值原理  |
| 135 | 10.3 连续时间模型 |
| 137 | 例题          |
| 142 | 习题          |
| 143 | 进一步阅读       |
| 145 | 11 动态规划     |
| 145 | 11.1 贝尔曼方程  |
| 148 | 11.2 不确定性   |
| 149 | 11.3 连续时间   |
| 150 | 11.4 横截条件   |
| 152 | 11.5 无限期界   |
| 153 | 例题          |
| 159 | 习题          |
| 160 | 进一步阅读       |
| 162 | 附录——库恩—塔克定理 |
| 165 | 进一步阅读       |
| 166 | 英汉名词对照表     |
| 168 | 译者后记        |

# ▶ 1 导论

经济学已经被定义为最优地利用稀缺资源的研究，即在约束条件下最大化的研究。被最大化的对象以及施加在选择上的约束，从一个背景变化到另一背景：家庭的消费和劳动供给，企业的生产和政府的政策。但是所有约束条件下的最大化问题有一个共同的数学结构，这一数学结构又反过来为分析这些问题提供了一个共同的经济直觉。本书旨在概述这一数学内容并且培养这种直觉。

消费者选择的标准模型提供了一个好的起点。其基本概念为一条预算线和一组无差异曲线。预算线上的点代表了所有支付得起的两种商品的组合。而无差异曲线组则代表了目标，即要达到尽可能高的曲线。最优选择落在一条无差异曲线和预算线的相切之处。图 1.1 给出了我们熟悉的图形。

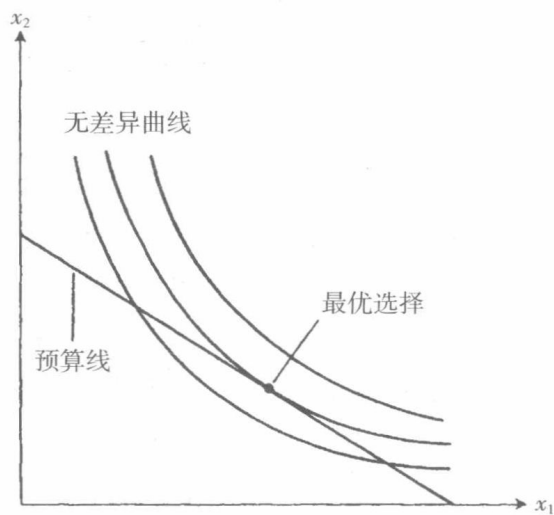


图 1.1 消费者的最优选择

在这一章中,我将运用文字和几何的方法进一步发展这个模型,但着眼于对数学方法的锐化和一般化,虽然我们在后面的章节才强调这些方法。

赋予图 1.1 中各个不同的量以一些代数上的含义是有益的。记  $I$  为消费者的货币收入,  $p_1$  和  $p_2$  为两种商品的价格,  $x_1$  和  $x_2$  为它们的数量。因而预算线,即支出恰好等于收入的线,可以用方程

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = I \quad (1.1)$$

来表达。

消费者对这两种商品的数量  $x_1$  和  $x_2$  的偏好用一个称为效用函数的数值尺度(numerical scale)来表示。它给商品的每一个消费束  $(x_1, x_2)$  赋予一个称为效用水平的数值  $U(x_1, x_2)$ 。在对任何可供选择的消费束进行比较时,最终被偏好的消费束就是得到最高效用数值的那个消费束。沿着一条无差异曲线,所有的点必须具有相同的效用数值。因而这样的曲线有一个方程

$$U(x_1, x_2) = \text{常数} \quad (1.2)$$

现在通过计算预算线和无差异曲线的斜率可以继续这一理论的阐述。由于两者相切,斜率必然相等。稍后我将继续阐述。但是让我从一个更简单更直观的方法开始。

## 1.1 套利方法

这一想法是让消费者从他预算的任意试验性的配置开始,考虑一个变动。如果这种变动产生了一个给他带来更高效用的消费束,那么它就将作为一个新的试验性配置而被消费者采取。一旦发现某个消费束已经无法用这种方式来改进,那么它将成为最优配置,而且也将在实际中被消费。所以,不可能再找到一个改进将作为最优化的检验条件。

这样的变动不会造成任何额外的支出;它仅仅是某一数量的货币从购买一种商品转到另一种商品的重新配置。如果最初的配置并非最优,这样的变动可以提高消费者的效用。当消费者已作出了最优选择,达到了他的个人均衡后,这种获得效用改进而同时支出没有净增加的机会就消失了。金融市场中有与此非常相似之处。在市场均衡之外,利用相同资产在不同

市场间的价格差, 参与人能够以零的净费用获得“套利”利润, 而在市场均衡时就不存在这样的机会。事实上, 正是人们寻求套利利润的过程导致了均衡。通过将这整个推理过程记为“套利方法”, 并将由此导致的最优条件记为“无套利条件”, 我将充分利用这种直觉上的相似之处。

如果商品是不可分的, 这些变动必须按离散的步骤发生。然而, 假定商品是完全可分的, 通常是一个好的近似。因而, 这些变动能够以无穷小的量进行, 或者以经济学家们所说的“边际调整”进行。甚至对那些看起来不可分的商品, 例如汽车或其他大宗耐用消费品, 也存在质量等其他维度, 允许连续的调整。无论如何, 这样的边际变动是本书中我们分析的主题。

变量  $x$  的“一个微小(边际、无穷小量)变动”的标准符号是  $dx$ 。它不可以被看作两个变量  $d$  和  $x$  的乘积, 而本身就是一个整体  $dx$ 。使用这种无穷小量的合理性可以被严格证明, 但是大部分时候, 我将以宽松而富有启发性的方式使用它们。当你对涉及使用无穷小量的陈述有所质疑, 或不能确信我是否正确地使用它们时, 你应该使用正确的微积分方法重新论证, 从有限的变动  $\Delta x$  开始, 然后趋向极限如  $\Delta x \rightarrow 0$ 。

首先, 假定预算的最初配置对两种商品都有正的消费量  $x_1$  和  $x_2$ 。现在考虑一个小的套利操作, 或将少量的但是数量为正的收入  $dI$  从商品 2 转到商品 1 进行边际上的再配置。从实物角度来看, 这意味着多购买  $dI/p_1$  单位的商品 1, 少购买  $dI/p_2$  单位的商品 2。用  $MU_1$  和  $MU_2$  表示这两种商品的边际效用。这意味着商品 1 数量上的微小变动  $dx_1$  改变了  $MU_1 dx_1$  个单位的效用, 类似地, 商品 2 数量上的微小变动  $dx_2$  导致了  $MU_2 dx_2$  个单位的效用变化。当两种商品的数量同时变动, 这两种效应可以被加在一起, 所以效用的变化为

$$MU_1 dx_1 + MU_2 dx_2 \quad (1.3)$$

在后面的章节中, 我将使用偏导数和泰勒级数更严格地表达此式, 但在此处这样简单的陈述就足够了。关键之处在于, 任何一个边际调整都是如此之小, 以至于在这个过程中边际效用自身的变化可以被忽略不计。当然, 如果很多这样的边际调整同时进行, 边际效用就会随着这一系列的变动而逐渐变化。特别地, 如果  $x_2$  上升, 和/或  $x_1$  下降,  $MU_2/MU_1$  将会下降; 这就是消费中的边际替代率递减原理。但是在目前, 我所讨论的仅是一个边

际调整。

这样,套利操作对效用的影响就很容易计算。商品 1 的数量增加  $dI/p_1$  使得效用提高  $MU_1 dI/p_1$ , 而商品 2 数量的减少  $dI/p_2$  使得效用降低  $MU_2 dI/p_2$ 。因而效用的净增加为

$$(MU_1/p_1 - MU_2/p_2)dI$$

如果这一表达式的值为正,消费者就会实行这个再配置并试图作出相同方向上的进一步的再配置。如果最初的消费束是最优的,那么这一表达式的值不可能为正。这是最优化的“无套利”标准的一部分。由于所选择的  $dI$  是正的,因而我们可以将该表达式除以  $dI$  并把这个标准写作

$$(MU_1/p_1 - MU_2/p_2) \leq 0 \quad (1.4)$$

现在假定这个标准没有被满足,也就是假定(1.4)式的左边大于零,那么把一些支出转到商品 1 上就是值得的。这一转移应该进行到何种程度呢? 回忆起当  $x_1$  增加而  $x_2$  减少时,相对于  $MU_2$ ,  $MU_1$  会逐渐下降,最终会到达使得(1.4)式的左边为零的那一点,并且在这个方向上的继续变动将无法再提高消费者的效用水平。

接下来考虑一个相反方向的再配置。这会改变上面所有变量的符号。如果最初的配置是最优的,我们必然会有

$$(MU_1/p_1 - MU_2/p_2) \geq 0 \quad (1.5)$$

如果这是错的,即如果上式的左边小于零,那么增加  $x_2$  而减少  $x_1$  的过程就一直会进行下去,直到上式的左边等于零为止。

我们可以将这两个关于最初消费束为最优的标准结合成一个:如果数量均为正的配置  $(x_1, x_2)$  是最优的,那么在这点处边际效用必须满足

$$MU_1/p_1 = MU_2/p_2 \quad (1.6)$$

这就是完整的“无套利条件”。其经济学解释为,在最优选择处消费者对于将额外一单位的货币配置给这种商品还是那种商品是无差异的。

## 1.2 使用微积分的相切条件

更复杂但更常用的导出相同的最优化条件的方法,是基于预算方程



(1.1)所表示的预算线和效用函数(1.2)所表示的无差异曲线的相切。将预算线方程写为

$$p_1x_1 + p_2x_2 = I \quad \curvearrowright \\ x_2 = (I/p_2) - x_1(p_1/p_2)$$

我们马上看到这条线的斜率的数值为 $(p_1/p_2)$ 。无差异曲线的斜率是消费中的边际替代率(MRS),它等于边际效用的比率 $(MU_1/MU_2)$ 。对此的一个启发性的推导如下。如果 $dx_1$ 单位的商品1的边际损失恰好被 $dx_2$ 单位的商品2的边际收益所补偿,那么边际替代率(MRS)就是比率 $dx_2/dx_1$ 。但是对这一收益的精确补偿可以写成以效用为单位的一个等式

$$MU_1 dx_1 = MU_2 dx_2$$

所以

$$MRS = dx_2 / dx_1 = MU_1 / MU_2 \quad (1.7)$$

顺便说一句,注意在这两个比例的分子和分母之间下标1和2的颠倒。这并非排印的错误;而是这两个比例之间的关系。你可以看到通过交叉相乘就回到上面的等式了。

在最优选择处,无差异曲线的斜率(消费中的边际替代率)等于预算线的斜率(价格比)。因而

$$MU_1 / MU_2 = p_1 / p_2 \quad (1.8)$$

这等价于前面我们导出的最优化标准(1.6)式。但是(1.6)式所蕴涵的文字论证方法要比(1.8)式所蕴涵的几何论证方法更有优势。

### 1.3 角点解

套利方法在其中一种商品根本不被购买的情形下更容易被采用。由于这种情况发生在预算线的顶端,这样的最优选择通常被称为角点解。假定在最初配置中所有的收入都被花在了商品2上,于是 $x_1 = 0, x_2 = I/p_2$ 。现在,在两种改进方向之中,即试图增加 $x_1$ 或者减少 $x_1$ ,只有前者是可能的。因而,只有对应于这种检验条件的标准(1.4)式成立。由于 $x_1$ 不能再减少,得出(1.5)式的论证也就不能进行了。对消费束 $(0, I/p_2)$ 成立的(1.4)式的经济学解释同样简洁明了:即使是花在商品1上的第一个单位的