

C. CARATHÉODORY

MASS UND INTEGRAL
UND
IHRE ALGEBRAISIERUNG

C. CARATHÉODORY

MASS UND INTEGRAL
UND IHRE ALGEBRAISIERUNG

LEHRBÜCHER UND MONOGRAPHIEN
AUS DEM GEBIETE
DER EXAKTEN WISSENSCHAFTEN

MATHEMATISCHE REIHE - BAND 10

MASS UND INTEGRAL UND IHRE ALGEBRAISIERUNG

VON

C. CARATHÉODORY

WEIL. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

HERAUSGEGEBEN VON

P. FINSLER, A. ROSENTHAL, R. STEUERWALD

ZÜRICH

LAFAYETTE

MÜNCHEN



BIRKHÄUSER VERLAG BASEL
UND STUTTGART

1956

Nachdruck verboten. Alle Rechte vorbehalten,
insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen und
der Reproduktion auf photostatischem Wege oder durch Mikrofilm
Birkhäuser Verlag Basel, 1956



Druck von Birkhäuser AG., Basel
Printed in Switzerland

VORWORT¹⁾

In seinem berühmten Buch über Logik, *Laws of Thought*, das 1854 erschienen ist, hat GEORGE BOOLE (1815–1862) einen Symbolismus entwickelt, den man heute Boolesche Algebra nennt. Das einfachste Beispiel einer solchen Algebra erhält man, wenn man die Operationen der Vereinigung, des Durchschnitts und der Differenz (oder den Übergang von einer Menge zu ihrer Komplementärmenge) auf Mengen anwendet.

Daraus erklärt sich, daß die Theorie des Maßes, die ja auf Mengen von beliebigen Elementen aufgebaut werden kann, auch für Ringe von Elementen einer Booleschen Algebra ihre Bedeutung nicht zu verlieren braucht.

Vor etwa zehn Jahren habe ich bemerkt, daß man auch das Analogon einer gewöhnlichen Punktfunktion auf Booleschen Ringen bilden kann, wodurch auch die Algebraisierung des Integrals ermöglicht wird.

Die Durchführung dieses Programms hat nicht nur theoretisches Interesse. Die Sätze und Beweismethoden, die man, bei näherer Einsicht in die neuen Verhältnisse, aufzustellen veranlaßt wird, sind nicht derart, daß sie in einem Raritätenkabinett ihren Platz finden sollten. Decken sie doch zwischen Resultaten, die man schon längst auf dem gewöhnlichen Wege fortschreitend erforscht hat, Zusammenhänge auf, welche sonst unbemerkt geblieben wären. Sie führen außerdem zu einem organischen, sehr einfachen und einheitlichen Aufbau der Theorie.

Freilich könnte man auf dem klassischen Wege, vom Borel-Lebesgueschen Maß ausgehend, diese Erfahrungen benutzen und die Eigenschaften des Maßes und des Integrals auf eine Weise ableiten, die von der in diesem Buche gebotenen Darstellung prinzipiell nicht verschieden ist. Ein solches Verfahren wäre aber in mehr als einer Hinsicht unnatürlich, und es scheint mir deshalb vorteilhafter, die Theorie in ihrer ganzen Allgemeinheit zu entwickeln.

Am Anfang wird also der Symbolismus der Booleschen Algebra erklärt, aber nicht in seiner ursprünglichen Gestalt. Es wird vielmehr hierzu das Axiomensystem benutzt, das M. H. STONE entdeckt hat und welches das denkbar einfachste ist. Ein äquivalentes Axiomensystem wird am Ende des Buches in einem Anhang besprochen.

Nun war es aber notwendig, in einem Buche, in welchem die Elemente einer Booleschen Algebra die einfachsten Bausteine bilden — im Hinblick auf die Tatsache, daß man dauernd gezwungen ist, gewisse Mengen solcher Elemente wieder als Elemente einer Menge zu betrachten —, einen besonderen Namen für die ersteren zur Hand zu haben, der dieselbe Funktion hat wie das Wort «Punkt» in der Theorie der abstrakten Räume. Dies ist der einzige Grund für die Einführung des Wortes «Soma», das ich auch in früheren Publikationen benutzt habe.

C. Carathéodory

¹⁾ Aus dem Nachlaß des Autors.

VORWORT DER HERAUSGEBER

Das vorliegende Werk gibt eine systematische und einheitliche Darstellung einer sehr allgemeinen Theorie, die CONSTANTIN CARATHÉODORY seit 1938 in einer Reihe seiner Arbeiten aufgestellt und entwickelt hat. Seine diesem Gegenstand gewidmeten Veröffentlichungen finden sich hier auf S. 334 verzeichnet.

Aus dem Vorwort seines Buches «Reelle Funktionen I» (B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1939) ist ersichtlich, daß demselben noch zwei weitere Bände folgen sollten. Nach Vereitlung dieses Planes durch den Krieg und dessen Auswirkungen entschloß sich der Verfasser, aus dem für diese beiden Bände vorgesehenen Material durch geeignete Sichtung und weitgehende Umarbeitung ein selbständiges, in sich abgeschlossenes Buch zu formen. Zugleich war es ihm dabei möglich, viele Vereinfachungen vorzunehmen und neue Aspekte der Theorie in den Vordergrund treten zu lassen. So entstand das vorliegende Werk, das der Schwanengesang des großen Gelehrten werden sollte; er konnte das Manuskript noch selbst zum Abschluß bringen, ehe er die Feder für immer aus der Hand legen mußte. Für die Korrektur hatte er sich der Mitwirkung von zweien der Unterzeichneten versichert. Nach seinem Ableben übernahmen sie mit dem Erstunterzeichneten unter Zustimmung der Erben und des Verlags die Herausgabe.

Der Text setzt sich zusammen aus teilweise modifizierten ausgewählten Stücken älterer Entwürfe und später neu geschriebenen Partien. Es war unvermeidlich, daß bei der Verschmelzung dieser heterogenen Bestandteile durch Streichungen, Umstellungen, Änderungen und Einfügungen da und dort Unstimmigkeiten entstanden; und es war unmöglich, diese bei der ersten Niederschrift schon völlig zu überblicken und restlos zu beseitigen. Sie aufzuspüren, in ihren Auswirkungen zu verfolgen und zu berichtigen, machte die Korrekturarbeit umfangreicher und zeitraubender als erwartet. Manche Entscheidung fiel den Herausgebern schwer: die Pietät gebot ihnen, nicht zu viel, ihr mathematisches Gewissen, nicht zu wenig zu ändern. Jedenfalls bemühten sie sich, immer möglichst das zu tun, was der Absicht des Autors und dem Interesse des Lesers zu entsprechen schien.

Herr Professor G. AUMANN, München, war so freundlich, die Korrekturen teilweise mitzulesen; wir danken ihm dafür und für manche wertvolle Anregung. Für einige gute Ratschläge haben wir auch Herrn Professor B. L. VAN DER WAERDEN, Zürich, zu danken.

Daß dieses Werk überhaupt erscheinen konnte, ist das große Verdienst des Verlages *Birkhäuser*. Er hat sich nicht nur in der kritischen Nachkriegszeit zum Risiko der Veröffentlichung entschlossen, sondern auch den erhöhten Schwierigkeiten, vor die sich die Unterzeichneten nach dem Heimgang des Verfassers gestellt sahen, volles Verständnis entgegengebracht und schließlich dem Buch die gewohnt vorbildliche Ausstattung gegeben. Für all dies sei ihm hiermit aufrichtig gedankt.

Zürich, Schweiz
Lafayette, Indiana, USA
München, Deutschland

PAUL FINSLER
ARTHUR ROSENTHAL
RUDOLF STEUERWALD

im Oktober 1955

INHALTSVERZEICHNIS

<i>Erstes Kapitel: Die Somen</i>	9
Die axiomatische Methode	9
Elementare Theorie der Somen	11
Die Somen als Elemente einer Algebra von Boole	17
Haupteigenschaften der Vereinigung	24
Die Zerlegbarkeit der Somen	28
Der Durchschnitt von unendlich vielen Somen	33
Hauptlimites und Grenzen	37
<i>Zweites Kapitel: Mengen von Somen</i>	45
Relativ zu einer Grundoperation abgeschlossene Somenmengen	45
Vollkommene Ringe	50
Die Zahlen der zweiten Zahlklasse	54
Vollständigkeit	59
Homomorphismen von Somenringen	62
<i>Drittes Kapitel: Die Ortsfunktionen</i>	72
Endlichwertige Ortsfunktionen	72
Somenskalen	76
Änderung des Definitionsbereiches	83
Haupteigenschaften der Somenfunktionen $\alpha(X)$ und $\beta(X)$	88
<i>Viertes Kapitel: Das Rechnen mit Ortsfunktionen</i>	99
Grenzprozesse	99
Die Elementaroperationen	106
Gleichmäßige und absolute Konvergenz	119
Zusammensetzung von Ortsfunktionen	121
Homomorphismen von Ortsfunktionen	132
<i>Fünftes Kapitel: Die Maßfunktionen</i>	142
Additive und vereinigungsbeschränkte Somenfunktionen	142
Meßbarkeit	146
Maßfunktionen	148
Maßfunktionen auf ihrem Meßbarkeitsring	153
Folgen von Maßfunktionen und ihre Grenzen	157
Transformation von Maßfunktionen bei Homomorphismen	159
Der Borel-Lebesguesche Inhalt	163
<i>Sechstes Kapitel: Das Integral</i>	171
Körper von Ortsfunktionen. Meßbare Ortsfunktionen	171
Der Begriff des Integrals	172
Die Linearität des Integrals und das Integral von Ortsfunktionen beliebigen Vorzeichens	181
Die vergleichbaren Maßfunktionen und die Lebesguesche Zerlegung	185
Die abstrakten Differentiale	191
Die Totalstetigkeit von zwei vergleichbaren Maßfunktionen	194
Transformation des Integrals bei Homomorphismen	195

<i>Siebttes Kapitel: Anwendung der Theorie des Integrals auf Grenzprozesse</i>	200
Der Satz von Egoroff	200
Die Stetigkeit des Integrals als Funktional	204
Die Konvergenz im Mittel	213
Die Ergodentheorie	220
<i>Achstes Kapitel: Die Berechnung von Maßfunktionen</i>	232
Die maximalen Maßfunktionen	232
Die Basen einer beliebigen Maßfunktion	236
Relative Meßbarkeit	239
<i>Neuntes Kapitel: Die regulären Maßfunktionen</i>	246
Definition und Haupteigenschaften der regulären Maßfunktionen	246
Das innere Maß	249
Vergleichung des äußeren und des inneren Maßes	255
Der Mittelwert des äußeren und des inneren Maßes	259
<i>Zehntes Kapitel: Gleichartige reguläre Maßfunktionen</i>	264
Haupteigenschaften der gleichartigen Maßfunktionen	264
Die Jordansche Zerlegung von totaladditiven Somenfunktionen	269
Die Differenz von gleichartigen regulären Maßfunktionen	274
Vergleichbare äußere Maße	281
<i>Elftes Kapitel: Die Inhaltsfunktionen</i>	284
Definition der Inhaltsfunktionen	284
Die reduzierten Inhaltsfunktionen und ihre Homomorphien	287
Der Jessensche unendlichdimensionale Torus	293
Der Vitalische Überdeckungssatz	295
Das Lebesguesche Integral	303
Die vergleichbaren Inhaltsfunktionen	309
Das lineare Maß	311
<i>Anhang: Die Somen als Elemente von teilweise geordneten Mengen</i>	317
Ein neues Axiomensystem für die Somen	317
Einteilung einer Menge in Klassen	322
Teilweise geordnete Mengen	325
Anwendung auf die Somentheorie	327
Systeme von Somen, welche nicht Teilmengen einer Menge isomorph sind	329
<i>Verzeichnis früherer Veröffentlichungen</i>	334
<i>Namen- und Sachregister</i>	335

ERSTES KAPITEL

Die Somen

Die axiomatische Methode

1. Die Theorien, aus denen die mathematische Wissenschaft besteht, handeln von Objekten sehr verschiedener Natur: nicht nur die reellen und komplexen Zahlen, die Punkte, Figuren und Punktmengen in endlich- oder unendlich-dimensionalen Räumen von beliebiger topologischer Struktur, die Funktionen verschiedenster Art, sondern auch die Operationen selbst, denen man alle derartigen Dinge unterwerfen kann, stellen Beispiele solcher Objekte dar.

Trotz der Vielfachheit dieses Materials gibt es sehr weit auseinanderliegende Teile der Mathematik, zwischen welchen eine auffallende Ähnlichkeit vorhanden ist. Dies rührt davon her, daß die meisten Aussagen, für welche man sich jeweils interessiert, gar nicht von der speziellen Wahl der Objekte abhängen, um welche es sich gerade handelt, sondern nur von einigen Eigenschaften, die diesen Objekten gemeinsam sind.

Es liegt also nahe, diese charakteristischen Eigenschaften selbst zum Hauptgegenstand der Untersuchung zu erheben, indem man abstrakte Objekte erfindet und behandelt, deren Attribute keiner weiteren Bedingung zu genügen haben, als der Theorie angepaßt zu sein, die gerade entwickelt werden soll.

Dieses Verfahren ist — mehr oder weniger bewußt — von den Mathematikern aller Zeiten angewandt worden. Die Geometrie des EUKLID und die Buchstabenalgebra des 16. und des 17. Jahrhunderts sind auf solchem Wege entstanden. Aber erst in neuerer und neuester Zeit hat man diese Methode, die man die *axiomatische Methode* nennt, folgerichtig entwickelt und bis zu ihren letzten Konsequenzen verfolgt.

2. Unsere Absicht ist, die Theorien des Inhalts und des Integrals nach der soeben geschilderten, axiomatischen Methode zu behandeln.

Im Laufe des 19. Jahrhunderts ist, besonders unter dem Einfluß von H. GRASSMANN (1809–1877), die Theorie der mehrdimensionalen Räume entwickelt worden. Andererseits hat G. CANTOR (1845–1918) die Lehre von den Mengen im allgemeinen und daneben auch die Lehre von den Punktmengen geschaffen. Mit Benutzung dieser beiden Theorien ist es gelungen, eine sehr vollkommene Inhalts- und Integraltheorie auszubilden, die in außerordentlichem Maße verallgemeinerungs- und in gleichem Maße anwendungsfähig ist. Die Objekte, deren Inhalt man messen will, sind bei allen diesen Verallgemeinerungen *Mengen von unteilbaren Dingen*, welche man *abstrakte Räume* nennt,

weil man ihre Elemente in Erinnerung an die Definition von EUKLID, σημείον ἐστίν, οὐ μέρος οὐθέν (Ein Punkt ist, was keine Teile hat), gleichfalls als Punkte bezeichnet.

Dagegen ist die älteste Maßtheorie, welche die Mathematik kennt und welche im ersten, zweiten und zwölften Buche von EUKLID enthalten ist, auf ganz anderen Prinzipien aufgebaut. Dort wird z. B. ein Parallelogramm in zwei kongruente Dreiecke zerlegt, indem man eine seiner Diagonalen zieht (Fig. 1), und hieraus schließt EUKLID (Buch 1, Satz 34), daß der Inhalt des Parallelo-

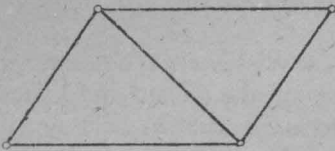


Fig. 1

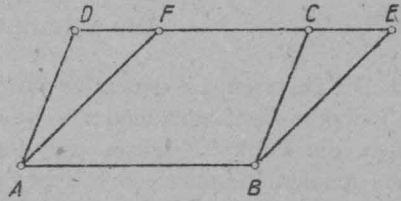


Fig. 2

gramms doppelt so groß ist als der Inhalt eines jeden dieser Dreiecke. Oder es wird mit Hilfe der Fig. 2 bewiesen (Satz 35), daß zwei Parallelogramme $ABCD$ und $ABEF$ mit gleicher Basis und gleicher Höhe denselben Inhalt besitzen.

Nun können aber geometrische Figuren, welche man auf diese Weise zerschneidet oder aus getrennten Stücken zusammenfügt, unmöglich auch als Mengen von Punkten aufgefaßt werden. In diesem letzteren Fall müßte über die Frage, ob die Punkte der Seiten eines Dreiecks diesem zugezählt werden sollen, oder ob man es vorzieht, das Dreieck als die Gesamtheit seiner inneren Punkte allein anzusehen, eine Festsetzung getroffen werden, und jede mögliche Festsetzung dieser Art führt zu einem Widerspruch: beispielsweise wird je nach der Wahl, die man getroffen hat, bei der Zusammensetzung von zwei Dreiecken zu einem Parallelogramm (Fig. 1) die eine Diagonale des Parallelogramms doppelt gezählt, oder aber sie fällt aus der Figur ganz heraus.

Trotzdem kann man die Übereinstimmung der Euklidischen Resultate mit denjenigen der modernen Inhaltstheorien verifizieren, indem man die Tatsache benutzt, daß die Punktmenge, welche aus allen inneren Punkten einer Figur der Elementargeometrie im Sinne EUKLIDS besteht, immer den gleichen Inhalt besitzt wie die Punktmenge, welche aus der ersteren durch Hinzufügen ihrer Randpunkte gewonnen wird. Auf diesem langwierigen Wege ist es aber nicht möglich, die gemeinsame Quelle zu erschließen, aus welcher die beiden Theorien entspringen.

Die Überlegungen, welche wir im nächsten Abschnitt auseinandersetzen werden, sind dagegen darauf zugeschnitten, eine allgemeine Inhaltstheorie zu begründen, welche sowohl die Euklidische Lehre als Spezialfall enthält als auch die allgemeinsten Maßtheorien, welche in diesem Jahrhundert entstanden sind.

Elementare Theorie der Somen

3. Nach dem Vorhergehenden müssen wir also abstrakte Dinge erfinden, welche Eigenschaften besitzen, die einerseits den Teilmengen einer festen, beliebigen Menge von Elementen und andererseits den Figuren der Elementargeometrie gemeinsam sind. Diese Objekte wollen wir *Somen* nennen ($\tau\omicron\ \sigma\omega\mu\alpha$ = der Körper) und mit großen lateinischen Buchstaben $A, B, \dots$ bezeichnen. Die Gesamtheit der Somen, die bei irgendeinem Komplex von Fragen auftreten, soll immer eine Menge bilden, die wir gewöhnlich mit $\mathfrak{M}_0$ bezeichnen werden. Dies soll besagen, daß die Axiome der Mengenlehre, insbesondere das Auswahlaxiom, auf die Untermengen von $\mathfrak{M}_0$ anwendbar sind.

Bei zwei Figuren der Elementargeometrie unterscheidet man scharf, ob sie sich teilweise überdecken oder nicht; ist letzteres der Fall, so sagt man, daß die beiden Figuren «fremd» sind. Von zwei Untermengen einer festen Menge sagt man auch, daß sie fremd sind, falls sie nämlich kein gemeinsames Element enthalten.

Für zwei Somen A, B aus $\mathfrak{M}_0$ soll nun auch immer feststehen, ob sie *fremd* sind oder nicht. Während aber in den zuerst besprochenen Fällen das Wort «fremd» jedesmal mit einem bestimmten Begriff verbunden ist, der Gesichts- oder Tastassoziationen auslöst, soll dieses Wort hier keinen derartigen festen Inhalt haben. Wir betrachten die Fremdheit als eine rein formale Relation zwischen Somen, welche die aus den folgenden Festsetzungen sich ergebenden Eigenschaften hat.

Falls die Somen A und B fremd sind, so schreiben wir

$$A \circ B \tag{3.1}$$

und verlangen, daß diese Beziehung *symmetrisch* ist: d. h. die Formeln $A \circ B$ und $B \circ A$ sollen *dieselbe* Relation bedeuten.

Wir betrachten jetzt höchstens abzählbare Mengen von *paarweise fremden* Somen $A_1, A_2, \dots$. Jeder solchen Menge von Somen soll eindeutig ein Soma A zugeordnet werden, das wir die *Summe* der Somen A_i nennen¹⁾. Die Summe von paarweise fremden Mengen oder die Summe von paarweise fremden elementargeometrischen Figuren sind bestimmte Begriffe, die mit Gesichts- oder Tastassoziationen verbunden sind. Hier soll für das Wort «Summe» ganz dasselbe gelten wie für das Wort «fremd».

Wir haben absichtlich die Summenoperation für *höchstens abzählbar viele* Somen postuliert. Bei Punktmengen wird zwar eine analoge Operation auch für nicht abzählbare Mengen von Punkten benutzt. Es hat sich aber gezeigt, daß in der Theorie, die wir entwickeln werden, die Existenz der Summe von überabzählbar vielen Somen nicht allgemein gefordert werden darf (vgl. Ziffer 13, S. 24).

¹⁾ Den Bereich der elementargeometrischen Figuren im Sinne EUKLIDS kann man durch Hinzunahme allgemeinerer Figuren so ergänzen, daß diese Forderung auch hier erfüllt wird.

Andererseits war es notwendig, den Summenbegriff von vornherein für unendlich viele Somen festzusetzen, weil ja schon der Kreis nicht aus endlich vielen, wohl aber aus abzählbar unendlich vielen Dreiecken zusammengesetzt werden kann (Fig. 3).

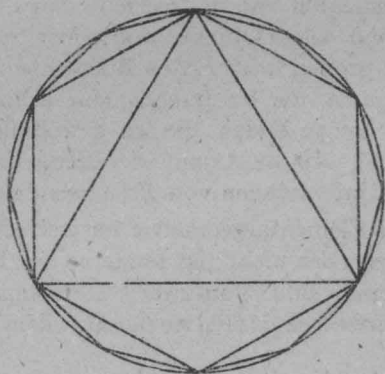


Fig. 3

Die Summe A der Somen A_j werden wir durch eines der Symbole

$$A = A_1 + A_2 + \dots \quad \text{oder} \quad A = \sum_j A_j. \quad (3.2)$$

ausdrücken.

Es sei nun B ein Soma, das zu *jedem* der Somen A_j , welche in der Summe (3.2) vorkommen, fremd ist. Dann soll immer auch $B \circ A$ sein. Dagegen soll kein einziges der Somen A_j (falls es nicht mit dem weiter unten eingeführten leeren Soma identisch ist) fremd zu A sein.

Die Summe A soll nach ihrer Definition nicht von der Reihenfolge der Summanden A_j abhängen: sie ist mit anderen Worten *kommutativ*. Wir verlangen außerdem, daß sie die *assoziative Eigenschaft*, und zwar im weitesten Sinne dieses Wortes, besitzen soll. Hierunter ist folgendes zu verstehen: wir betrachten z.B. ein System von höchstens abzählbar vielen, paarweise fremden Somen A_{kj} und setzen

$$A = \sum_{k,j} A_{kj}, \quad A_k = \sum_j A_{kj} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (3.3)$$

Nach unseren Voraussetzungen sind die Somen A_k paarweise fremd und besitzen eine Summe. Wir verlangen nun, daß diese Summe gleich A sein soll, so daß man schreiben kann

$$A = \sum_k A_k. \quad (3.4)$$

Es ist zweckmäßig, in die Menge $\mathfrak{M}_0$ unserer Somen noch ein uneigentliches Soma O aufzunehmen, das wir das *leere Soma* nennen wollen und das durch die Eigenschaften

$$O \circ A, \quad O + A = A, \quad (3.5)$$

welche für jedes Soma A gelten sollen, gekennzeichnet ist. Aus dieser Definition entspringt dann die Aussage, welche wir oben schon erwähnt haben:

$$\text{aus } A \circ A \quad \text{folgt} \quad A = O. \quad (3.6)$$

4. Es handelt sich jetzt darum, auch Somen, die nicht zueinander fremd sind, auf ähnliche Weise zu behandeln. Hierzu postulieren wir, daß die Somen zerlegbar sein sollen, d.h. daß folgendes gilt:

Sind beliebige Somen

$$A_1, A_2, \dots, A_p \quad (4.1)$$

in endlicher Anzahl gegeben, so sollen auch endlich viele, paarweise fremde Somen

$$S_1, S_2, \dots, S_n \quad (4.2)$$

auf mindestens eine Weise gefunden werden können, derart, daß jedes der Somen A_k , das nicht zufällig einem der S_j gleich ist, in der Gestalt

$$A_k = S_{j_1} + S_{j_2} + \dots + S_{j_q} \quad (4.3)$$

geschrieben werden kann (Fig. 4).

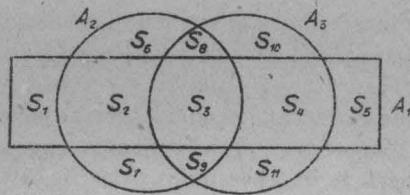


Fig. 4

Diese letzte Tatsache wird durch viel handlichere Formeln ausgedrückt, wenn man folgende Symbolik einführt: es sei S ein beliebiges Soma und x eine der Zahlen Null oder Eins. Unter xS verstehen wir das Soma S , falls $x = 1$ ist, und das leere Soma O , wenn $x = 0$ ist. Dann gibt es eine Zahlenmatrix

$$(a_{kj}) \quad (k = 1, \dots, p; j = 1, \dots, n), \quad (4.4)$$

deren Elemente alle gleich Null oder gleich Eins sind und mit deren Hilfe man an Stelle von (4.3) schreiben kann

$$A_k = \sum_{j=1}^n a_{kj} S_j \quad (k = 1, \dots, p). \quad (4.5)$$

Wir führen nun drei Zahlenfolgen ein, indem wir für $j = 1, 2, \dots, n$ setzen

$$\left. \begin{aligned} v_j &= \max(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{pj}), \\ r_j &= a_{1j} + a_{2j} + \dots + a_{pj} \pmod{2}, \\ d_j &= \min(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{pj}) = a_{1j} a_{2j} \dots a_{pj}. \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

Die auf diese Weise berechneten Zahlen v_j , r_j , d_j sind alle gleich Null oder Eins, und es existieren also auch die Somen

$$V = \sum_{j=1}^n v_j S_j, \quad R = \sum_{j=1}^n r_j S_j, \quad D = \sum_{j=1}^n d_j S_j. \quad (4.7)$$

Ist also z.B.

$$A_1 = S_1 + S_2, \quad A_2 = S_2 + S_3,$$

so hat man für die Zahlenmatrix

$$a_{11} = 1, \quad a_{12} = 1, \quad a_{13} = 0,$$

$$a_{21} = 0, \quad a_{22} = 1, \quad a_{23} = 1,$$

und man findet nach den obigen Regeln

$$V = S_1 + S_2 + S_3, \quad R = S_1 + S_3, \quad D = S_2.$$

Hierdurch haben wir jedem System (4.1) von endlich vielen Somen drei neue Somen V , R und D zugeordnet. Es wäre denkbar, daß diese letzteren Somen noch von der Wahl der Zerlegungsfolge (4.2) abhängen, die ja nicht eindeutig bestimmt ist.

Wir wollen nun als letztes Postulat unserer Somentheorie verlangen, daß für alle möglichen Zerlegungsfolgen (4.2) die Operationen (4.7) immer dasselbe Resultat ergeben.

Unsere verschiedenen Forderungen sind widerspruchsfrei, weil die Teilmenzen einer beliebigen Menge als spezielle Somen angesehen werden können. Sie sind dagegen sicherlich überbestimmt; da sie aber ihren elementaren Charakter verlieren würden, wenn man versuchen wollte, sie auf ein System von unabhängigen Axiomen zu reduzieren, wollen wir dies hier unterlassen, um es später (Ziffern 8–13, S. 17 ff.) auf anderem Wege nachzuholen.

5. Die drei Somen (4.7) können als Funktionen der Somen $A_1, \dots, A_p$ angesehen werden. Es ist vorteilhaft, Bezeichnungen für diese Funktionen zu wählen, mit deren Hilfe ein symbolischer Kalkül, der große Ähnlichkeit mit der gewöhnlichen Algebra hat, aufgestellt werden soll.

Wir setzen demnach

$$V = A_1 \dot{+} A_2 \dot{+} \dots \dot{+} A_p \quad \text{oder} \quad V = \sum_{k=1}^p \dot{+} A_k \quad (5.1)$$

und nennen das Soma V die *Vereinigung* der Somen A_k .

Zweitens schreiben wir

$$R = A_1 \dot{+} A_2 \dot{+} \dots \dot{+} A_p \quad \text{oder} \quad R = \sum_{k=1}^p \dot{+} A_k \quad (5.2)$$

und nennen R die *Verbindung* der Somen A_k .

Endlich nennen wir D den *Durchschnitt* der Somen A_k und schreiben

$$D = A_1 A_2 \dots A_p \quad \text{oder} \quad D = \prod_{k=1}^p A_k. \quad (5.3)$$

Die drei Somen V , R und D können mithin als Resultate von gewissen Operationen gedeutet werden, von denen jede nach (4.6) und (4.7) die kommutative und die assoziative Eigenschaft besitzt.

Für drei Zahlen a , b , c , die gleich Null oder Eins sind, gelten stets die Gleichungen

$$\begin{aligned} \min(a, b) &= a b, \\ \min(\max(a, b), c) &= \max(a, b) \cdot c = \max(a c, b c), \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\min((a+b) \bmod 2, c) = ((a+b) \bmod 2) \cdot c = (a c + b c) \bmod 2, \quad (5.5)$$

$$\max(a, b) = (a + b + a b) \bmod 2. \quad (5.6)$$

Mit Hilfe von (5.4) und (5.5) beweist man leicht, daß für irgend drei Somen A , B , C die beiden distributiven Gesetze

$$(A \dot{+} B) C = A C \dot{+} B C, \quad (A \dot{+} B) C = A C \dot{+} B C \quad (5.7)$$

bestehen müssen.

Ebenso folgt aus (5.6) die Gleichung

$$A \dot{+} B = A \dot{+} B \dot{+} A B, \quad (5.8)$$

die für irgend zwei Somen A , B gelten muß.

Endlich kann man mit Hilfe des leeren Somas O und der Darstellung $A = 1 \cdot S$, $O = 0 \cdot S$ auch die Gleichungen

$$A \dot{+} O = A, \quad A \dot{+} O = A, \quad A O = O, \quad (5.9)$$

$$A \dot{+} A = A, \quad A \dot{+} A = O, \quad A A = A \quad (5.10)$$

beweisen. Wir werden später zeigen, daß irgendwelche Dinge, für welche der symbolische Kalkül, dessen Regeln wir unter Ziffer 5 aufgestellt haben, formal besteht, Somen sein müssen. Zunächst stellen wir einige Folgerungen der letzten Relationen auf.

6. Wir bemerken, daß jede der Gleichungen

$$X \dot{+} A = B, \quad X = A \dot{+} B$$

eine Folge der anderen ist. Soll z.B. das Soma X die erste dieser Gleichungen befriedigen, so hat man

$$A \dot{+} B = B \dot{+} A = (X \dot{+} A) \dot{+} A = X \dot{+} O = X,$$

wodurch gezeigt ist, daß die zweite Gleichung besteht. Es folgt der

Satz 1. Die Gleichung

$$X \dot{+} A = B \quad (6.1)$$

besitzt immer eine und nur eine Lösung

$$X = A \dot{+} B. \quad (6.2)$$

Die Tatsache, daß zwei Somen A , B fremd sein sollen, kann sehr leicht mit Hilfe unserer Symbolik ausgedrückt werden. Ist nämlich $A \circ B$, so kann man setzen

$$A = S_1, \quad B = S_2 \quad (S_1 \circ S_2)$$

und erhält nach (4.6), (4.7) und (5.3)

$$AB = O. \quad (6.3)$$

Ist aber zweitens die Gleichung (6.3) erfüllt, so muß nach unseren Voraussetzungen $A \circ B$ sein. Man kann nämlich immer schreiben

$$A = a_{11} S_1 + a_{12} S_2, \quad B = a_{22} S_2 + a_{23} S_3,$$

und nach (6.3) muß $a_{12} a_{22} = 0$ sein.

Nun bemerke man, daß aus (6.3) wegen der Identität (5.8) folgt

$$A \dot{+} B = A \dot{+} B, \quad (6.4)$$

und daß umgekehrt die Gleichung (6.4) mit (5.8) kombiniert das Resultat

$$AB = (A \dot{+} B) \dot{+} (A \dot{+} B) = O$$

liefert. Wir haben also den

Satz 2. *Aus jeder einzelnen der drei Relationen*

$$A \circ B, \quad (6.5)$$

$$AB = O, \quad (6.6)$$

$$A \dot{+} B = A \dot{+} B \quad (6.7)$$

folgen stets die beiden anderen sowie die Relation

$$A \dot{+} B = A \dot{+} B = A + B.$$

Für die Somen kann man noch folgendes beweisen (vgl. Ziffer 22, S. 32):
Gibt man sich abzählbar viele Somen

$$A_1, A_2, A_3, \dots, \quad (6.8)$$

so kann man immer auf eine und nur eine Weise *paarweise fremde* Somen

$$S_1, S_2, S_3, \dots \quad (6.9)$$