確率統計入門 2

《ベイズの方法による》

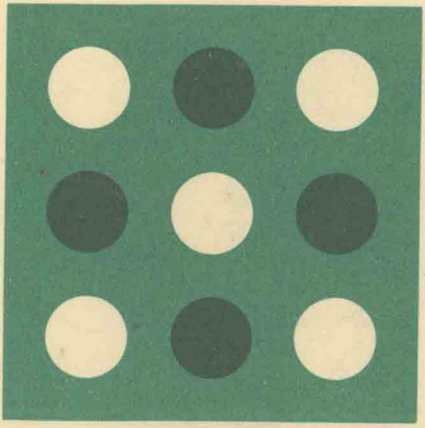
統計的推測

D·V·リンドレー 著

東京大学助教授経博 竹内 啓

福島大学助教授 新家 健精

共訳



Introduction to Probability and Statistics

確率統計入門 2

《ベイズの方法による》

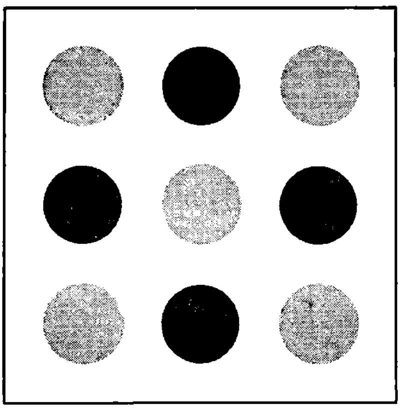
統計的推測

D·V·リンドレー 著

東京大学助教授経博 竹内 啓

福島大学助教授 新家 健精

共訳



Introduction to
Probability
and Statistics

D. V. Lindley

INTRODUCTION TO PROBABILITY AND STATISTICS

FROM A BAYESIAN VIEWPOINT

PART 2 INFERENCE

日本語版への序文

私は同じ研究者仲間である竹内，新家両先生が拙著の日本語訳を手がけられていることに対し深甚なる謝意を申しあげる。日本の読者がこの訳書から，近代統計学に対するベイジアンの態度をいくらかでも理解下さることを希望してやまない。

本書は3年前，英国で上梓されたものを直接翻訳したものである。もし今日，私がこれを改訂するとしたら，次の二つの重要な点を変更するであろう。まず，第1章では頻度概念を強調しすぎており，それに加えて§1.6の確信の度合に関する議論はいささかものたりない。これについては主観的概念を通じて確率を取り扱った格好の説明がある。それは，J. W. Pratt, H. Raiffa, および R. Schlaifer によるものである (Journal of American Statistical Association. vol. 59, 1964, p. 353)。もし書直しをするとすればこの文献に負うところが大きいと思われる。第2巻の展開では，従来の考え方にあまりにもとらわれすぎた感がある。改訂を行なう場合には，事後分布自体の説明を主とする方向に内容があらためられ，したがってこれまでの信頼区間や仮説検定の考え方は比較的重要ではなくなるであろう。ベイズ流統計学はいまや完全に一人歩きができるまでに成長したのである。

1967年8月

D. V. Lindley

序　文

本書は第1巻および第2巻からなっている。内容については，数学に関心をもっている人なら誰であろうと，確率現象，すなわち確率および統計について知っていなければならない最小限のものであると考えている。第1巻では確率，すなわち確率現象の演繹的な局面を取り上げ，第2巻では，統計，すなわち確率現象の推測的な局面を問題にしている。

本書は主として数学科の学生を対象に書いたものであるが，数学の予備知識としては通常の計算になれていることと，ベクトルおよび行列の代数に精通していること以外は特に要求していない。測度論や一般の積分論の知識をも前提にしたかったが，これはとりやめた。したがって，たとえばボレル集合族の概念などは用いていない。もちろん，こうした諸概念を用いるならば，いろいろな取り扱いも一層簡潔になったはずであるが，そうしたならば本書を通じて確率現象を勉強することができる学生諸君の数はいちじるしく減ってしまったであろう。いずれにしても，確率現象への手引きを提供しさえすれば，本書の目的は十分果たせるわけであり，この段階では測度論の諸概念が必ずしも理解の援けになるとはいえない。統計学を専攻しようとするものはもちろん，こうしたより高度の研究を続けなければならない。しかし，私のみるところでは純粋数学専攻の大学院学生諸君の中でも相当優秀でなければ，測度論についてはこれを十分理解できないようである。

以上の見方は証明についても同様である。もちろん，本書の水準でも厳密に証明する必要がある場合にはそのように努めたが，そうでなければ省略したり(たとえば，特性関数の収束定理など)，あるいは詳細な点には触れずに内容に飛躍のあることを明示して，証明の大略を与えておいた(たとえば，最尤推定量の漸近的性質)。確率および統計は文字通り広い意味における応用数学の分野に属しており，普通よくいわれる物理学への応用だけにとどまっているものではない。こうした観点から，厳密さに多少欠ける個所があったとしてもそれは認めていただけるものと思う。研究対象である確率現象は応用的な性格をもっている。したがって，本書で勉強する諸君も実際のデータを取り扱った経験を生かしながら読んでいただきたい。本書にはこのような経験を豊富にするよう

な配慮はしていない。この理由はもしそうするとすれば，きわめてぼう大な本になってしまうからであり，また現に，そのような書物を入手することは簡単だからである。諸君はいろいろな計算機を援用し，データの処理に習熟すべきである。そうすることにより，数学に至る実際上の必要性が洞察でき，数値データを解析する際，数学的諸結果を一層活用できるようになろう。これら数学上および実際上の二つの局面は互いに補いあっていて，確率現象を十分に理解するためには双方が不可欠である。本書では一方の局面のみを論じているが，これは他方の局面を決して無視しているわけではない。

本書は8章からなっており，各章はそれぞれ6節に分かれている。式と定理には次のような番号をつけた。たとえば，式(3.5.1)は第3章，第5節の第1式である。各節はまず定義を列挙することから始め，定理を証明し，次にこれらについての議論を展開し，あわせて具体例や数値例をあげた。特に議論の内容には一般のレベル以上のことをつけ加えて，概念が理論の中に正しく位置づけられるようにした。これにより，単に諸概念の直接的な効果を説明するだけでなく，より広い範囲への活用をはかったつもりである。また，各章の終わりにはぼう大な量の練習問題を付した。その中には容易なものもあるが，大部分は難解である。これらの練習問題の多くは試験問題である。ここにこのような問題形式で収録を許可されたロンドン，ケンブリッジ，アバディーン，ウェールズ，マンチェスター，レスターの各大学にお礼を申しあげたい(問題によってはそれをベイズ流の形式に書き改めるため，字句の修正を施したものもあるが，それ以外は原典をそのまま載せた)。

第2巻は後半の4章，すなわち，第5章から第8章よりなっており，統計学もしくは推測に費やされている。ここでは第1巻のはじめの3章の知識を前提としている。第2巻ではその大部分に2重の説明が付されている。つまり一つは正統派の頻度確率のみを用いる方式で，一つは確信の度合としての確率表現によってである。前者の取り扱い方にはきわめて多くの不満足な点があるように思われる。つまり，そこでは確率概念を理解するために必要な心的模索の面を捨象してしまったために，学生諸君に示すにはかなりの困難を伴うように思われる。もちろん，ここは純粋な頻度論的立場からの接近がもつ欠点に対してことこまかに批判をする場所ではないが，ある程度の補足説明はつけておいた(たとえば §5.6)。一例として通常の意味における信頼区間の概念を取り上げてみよう。技術的には信頼水準は長期間にわたってその区間が真の値をおおう

割合である。しかし実際はその通りにはほとんど理解されておらず，確信の度合として受けとられているのが通常である。本書の接近方法では，形式的な数学面および実際面の双方について，信頼区間をそのようなものとして理解しているのである。われわれはベイズの定理の繰り返し使用を基盤とする接近方法を説明する場合に**ベイジアン**(またはベイズの方法による)という形容詞を用いる。

第5章では正規分布に関する推測の問題を論ずる。事前の確信の度合がデータによってどのように事後の確信の度合に移行するか，そのためのベイズの定理の使用法を説明する。また重要な概念であるばくぜんとした事前の知識についても検討する。こうした考え方は6章にはいって，いくつかの正規分布の場合へとさらに拡張され，初歩的な分散分析にまで進む。7章では正規分布以外の分布に関する推測を論じ，特に適合度検定および最尤法の考え方を導入する。8章は最小2乗法，特に線型仮説に関する検定と推定とを取り扱っている。いうまでもなく本書の目的は最も重要な推測概念を含んだ健全な基礎知識を提供することにある。そしてこのような基盤に立つならば，統計学におけるより特殊な問題，たとえばより複雑な実験計画や標本抽出計画の解析，にこれらの概念が適用可能になろう。

新しい方法(ベイズの方法は従来の統計学に対する新しい接近である)を教科書に採用する際の主な難点は，これまでとられてきた方法に対してその新しい概念を適用する場合に生ずる。たとえば，標準的な統計的方法では仮説検定がいたるところに出てくるが，ベイズの方法による接近ではほとんどあらわれない。不偏推定についても確信の度合に関連してはほとんど必要とされない。第2の難点はベイズ流の学派が一般に容認されていないという事実にある。こうした接近方法はきわめて最近のものであり，まだその骨組みさえ整っていない(このことは逆に学生諸君が自分自身で自由にそれを考えうるという利点をもっている)。私が本書で行なったことは確信の度合とベイズの定理との適用を展開することにある。しかし，従来の正統的な統計学における重要な概念についてはそれを含ませてある。この点について私のベイジアン仲間達は私があまりにもこれについて配慮しすぎていると強く述べているが，おそらく彼等が正しいであろう。しかし一例を有意性検定にとるならば，私は実際的にはこれまでの正統的な定式化とまったく一致するようにベイジアンのわく組の中でそれを説明したつもりである。近代統計学の大部分は実際上にはまったく健全な働

きをしているが，それを用いる際の理由づけに間違いがある。統計家は直観によってその誤りから救われているのである。私の意図は，統計家がこれまで行なってきたことをベイズの方法によって正当化し，正統派の接近方法にはない新しい考え方を展開することにある。最近，正統派の統計学の分野において有意性検定よりも区間推定へと力点が移行しているようであるが，これは区間の方が事後分布に対してよりよい説明を与えるという点でベイジアンにとっては意味がある。

ベイジアンのわく組の中で従来の概念を説明する場合，本書ではこれまで使用してきた用語を用いた。したがって事後分布の区間に対して**信頼区間**という用語を使っている。そして最初にそれを用いるときにのみベイズの方法による信頼区間と呼び，以後は最初の形容詞を省いている。この点混乱しないようにしていただきたい。また，事後の区間といった用語も用いているが，従来からの用語の方が適切である。これら二つの区間，すなわちベイズの方法によるものと正統派の方法によるものとは，ほとんどすべての応用面においてまったく一致しているか，あるいはだいたい同じである。こうした理由から，実際上は従来からあった区間とまったく区別できないような区間について，第2の用語をわざわざ導入してもそれは無意味になろう。

決定理論については§5.6で短い説明を行なっている以外には触れていない。私の仕事は主としてデータによって確信の度合がどのように変化するかを事後分布の形式で論ずる点にあり，意志決定に際して確信の度合をいかに用いるべきかを説明することではない。いずれにしてもどこかで一定の線を引かなくてはならない。がしかし，これ以後2,3年におけるベイジアンの主流が決定理論にあることは疑問の余地がないであろう。本書の考え方はこうした展開に特に有用であろう。通常，多くの異なった意志決定の場にまったく同一の実験結果が用いられるが，事後分布こそがそれらすべての状況に対する共通の要素なのである。

本書の作成に際して，特に J. W. Pratt, H. V. Roberts, M. Stone, D. J. Bartholomew の諸氏に対し深甚なる謝意を申しあげる。また，原稿の初期の段階で有益なコメントをいただいた D. R. Cox ならびに A. M. Walker 両先生に深くお礼申しあげる。いろいろな点で多くの貴重な時間を割いていただき，さらには証明を読んで下さった D. A. East 氏にも感謝申しあげる次第である。M. V. Bloor 夫人と C. A. Davies 嬢は能率のよいしかも正確なタイプで私

を援助していただいた。最後に，このように素晴らしい本に仕上げて下さった University Press に心から御礼を申しあげる。

Aberystwyth
1964年4月

D. V. Lindley

目　次

1巻 確　率

主要目次

5. 正規分布に関する推測

本章では第2巻全体にわたる課題，すなわち推測の問題あるいはデータによって確信の度合がどのように変化するかの問題にとりかかる。まずデータを形成する確率変数が正規分布に従う場合から出発する。読者には，本章にはいる前に§1.6にもう一度目を通すようおすすめする。ただし公理系の妥当性に関する部分はとばしてもさしつかえない。

5.1 ベイズの定理と正規分布

ある分布からの**大きさ $\boldsymbol{n}$ の無作為標本**は各々がこの分布に従う n 個の独立した確率変数の集合として定義される(§1.3, §3.3を参照)。ある集合(たとえば正数の集合とか実数全体とか)に属する各々の実数 θ に対して，$f(x|\theta)$ が確率変数の密度であるとき，θ を密度 $\{f(x|\theta)\}$ によって定義される分布族の**母数**という(§2.1 二項分布の母数 p と比較せよ)。以下，われわれは無作為標本として，関数形はわかっているが θ が未知の一定値である密度 $f(x|\theta)$ の分布からのものを考える。標本を抽出する以前のわれわれの知識の状態を H で表わそう。したがって，θ は H に基づくある分布に従っている。つまりこれが確信の度合の意味における確率分布であり，この密度を $\pi(\theta|H)$ で表わす。以下，できる限り確信の度合に関する密度を π で，頻度概念——この考え方については第2~4章の応用例についてふれてきたが——に関する密度を p で表わすことにする。標本を $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ とすれば，x_i が各々独立であることから，その密度は

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) = p(\boldsymbol{x}|\theta, H) \tag{5.1.1}$$

である(厳密には右辺における θ の後にも記号 H を記さねばならない)。標本

を得たときの θ についての確信の密度はベイズの定理(定理 1.4.6 ならびにその一般式(3.2.9))から，すなわち定理の密度形式(式(3.2.9))に従って，次の $\pi(\theta|\boldsymbol{x}, H)$ に移行する。

$$\pi(\theta|\boldsymbol{x}, H) \propto p(\boldsymbol{x}|\theta, H)\pi(\theta|H). \tag{5.1.2}$$

(5.1.2) では比例定数が省略されているが，これについては

$$\left\{\int p(\boldsymbol{x}|\theta, H)\pi(\theta|H)d\theta\right\}^{-1} = \{\pi(\boldsymbol{x}|H)\}^{-1} \tag{5.1.3}$$

で与えられ，θ を含んでいない。これまである事象が常に条件事象の一部分であるとき，それを省略してきたが(§1.6)，同様に上のような，あるいはこれに類似した式ではしばしば H を省略する。§1.6 の用語にあわせるため $\pi(\theta|H)$ を θ の**事前**密度と呼び，θ の関数としての $p(\boldsymbol{x}|\theta, H)$ を**尤度**といい，$\pi(\theta|\boldsymbol{x}, H)$ を θ の**事後**密度と呼ぶ。まず観測値が 1 個，すなわち $\boldsymbol{x}=x$ かつ $f(x|\theta)$ が正規分布である場合を考察しよう。

定理 1. x を $N(\theta, \sigma^2)$，ただし σ^2 は既知，さらに θ の事前密度を $N(\mu_0, \sigma_0^2)$ とするならば，θ の事後密度は $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ である。ただし

$$\mu_1 = \frac{x/\sigma^2 + \mu_0/\sigma_0^2}{1/\sigma^2 + 1/\sigma_0^2} \qquad \sigma_1^{-2} = \sigma^{-2} + \sigma_0^{-2} \tag{5.1.4}$$

である。

(結局，これは $N(\theta, \sigma^2)$ から大きさ 1 の無作為標本を得た場合の結果である。) 尤度は (H を省略して)

$$p(x|\theta) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp[-(x-\theta)^2/2\sigma^2] \tag{5.1.5}$$

であり，事前密度は次で与えられる。

$$\pi(\theta) = (2\pi\sigma_0^2)^{-1/2} \exp[-(\theta-\mu_0)^2/2\sigma_0^2] \tag{5.1.6}$$

θ を含まない項を省略し，比例定数に一括するならば事後確率は，

$$\begin{aligned}
\pi(\theta|x) &\propto \exp\left\{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2} - \frac{(\theta-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right\} \\
&\propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\theta^2\left(\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_0^2}\right) + \theta\left(\frac{x}{\sigma^2}+\frac{\mu_0}{\sigma_0^2}\right)\right\} \\
&= \exp\left\{-\frac{1}{2}\theta^2/\sigma_1^2 + \theta\mu_1/\sigma_1^2\right\} \\
&\propto \exp\left\{-\frac{1}{2}(\theta-\mu_1)^2/\sigma_1^2\right\}.
\end{aligned} \tag{5.1.7}$$

になる。上の展開の第1および第3の段階では，それぞれ θ を含まない項をおとしたり，つけ加えたりしている。省略した比例定数については $\pi(\theta|x)$ が密度であり，したがって全範囲の積分が1に等しいことから容易に求められる。ここではあきらかに $(2\pi\sigma_1^2)^{-1/2}$ であり，よって定理は証明された。(定数を考える必要はまったくないことに注意しよう。つまり $\pi(\theta|x)$ の積分が1になる，すなわち(5.1.7)と定数との積が正規分布になればよい。)

系　$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を $N(\theta, \sigma^2)$ からの大きさ n の無作為標本とする。ただし σ^2 は既知であり，θ の事前密度は $N(\mu_0, \sigma_0^2)$ である。このとき θ の事後密度は $N(\mu_n, \sigma_n^2)$ になる。ただし

$$\mu_n=\frac{n\bar{x}/\sigma^2+\mu_0/\sigma_0^2}{n/\sigma^2+1/\sigma_0^2}, \qquad \sigma_n^{-2}=n\sigma^{-2}+\sigma_0^{-2} \tag{5.1.8}$$

$$\bar{x}=n^{-1}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

である。

尤度は(式(5.1.1)から)

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{x}|\theta)&=(2\pi\sigma^2)^{-n/2}\exp\left[-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2/2\sigma^2\right] \\ &\propto \exp\left[-\frac{1}{2}\theta^2(n/\sigma^2)+\theta\bar{x}(n/\sigma^2)\right] \\ &\propto \exp\left[-\frac{1}{2}(\bar{x}-\theta)^2(n/\sigma^2)\right]. \end{aligned} \tag{5.1.9}$$

ここでも θ を含まない項を適当に省いたり，つけ加えたりしている。式(5.1.9)は定数項を除けば $\bar{x}$ の代わりに x を，n/σ^2 の代わりに σ^{-2} を入れ替えれば(5.1.5)と同じである。したがって(5.1.4)で x の代わりに $\bar{x}$ を，σ^2 の代わりに σ^2/n を代入すれば(5.1.8)を得，よって系を得る。

無作為抽出

無作為標本については前(§1.3, §3.3)に述べたが，一般に無作為抽出は二つの状況のうちの一方の場合である。つまり各標本が大規模な(あるいは無限の)母集団から抽出される場合か，あるいはある未知の量に対して何回か測定が繰り返される場合である。最初の状況については，もし標本としての各々の成員が次の法則，すなわち母集団の成員がどれも同じチャンスで抽出され，かつ一

つの成員が標本として抽出されたとしてもそれによって残りの成員が標本に選ばれるチャンスが影響を受けない，このような法則で抽出されるならば，各標本値に対応する確率変数 x_i は同一の分布に従い，かつ独立であり，したがって無作為標本たる二つの条件を満たしている†。後の場合については，もし繰り返しが同一の状況の下で行なわれ，一つの測定値が他の測定値に影響を与えないならば，やはり無作為標本たる二つの条件を満たすことが確かめられる。いずれの場合にも繰り返しの目的は同じである。すなわち，最初の場合には母集団に関する知識を，後の場合には未知の量に対する知識を増大するためである。後の場合については通常，決定に伴う偶然誤差を減少するためなどと表現されている。本節はこれまでよりもさらに詳しく特別な場合についてこの知識の増大に関する量的表現方法を解明しようとするものである。そのためには知識の量的表現が必要であるが，これについては確信の度合としての確率 (§1.6) を用いることによりそれが可能になった。したがって，われわれの目的は特別な場合について，確信の度合が無作為標本抽出によってどのように変化するかを究明することである。もちろん実際には無作為抽出法以外の方法もしばしば用いられるが(たとえば Cochran (1953) をみよ)，そのような場合については無作為抽出の結果を修正すれば十分応用可能であり，それゆえ無作為抽出はすべての抽出方法の基本である。本書では無作為抽出のみを取り扱っている。

尤度と母数

知識がどのように変化してゆくかは事後確率が尤度と事前確率の積に比例することを述べたベイズの定理に示される。ベイズの定理およびその結果を考察する前に，定理の三つの構成要素について尤度から順次考えてゆこう。あきらかに尤度も同様に標本を形成する確率変数の確率密度であり，(5.1.1) の形式をとる。ここで積の形式になっているのは独立性および乗法法則(式 (3.2.10))からである。同一の分布に従っているため，すべての項が同一の密度を含んでいる。したがって尤度に対する考察は，単一の標本の密度に対する考察に帰着することになる。この密度は完全に頻度概念であり，経験的にはヒストグラム

† 著者によっては「母集団からの無作為標本」といった場合，元に戻さない場合 (§1.3) のものだけに限定している人もいる。しかしいずれの場合にもわれわれの結果は近似的にのみ成立しているのである。この近似も母集団に対して標本の大きさが小さくなければ有効ではない。

(§2.4)を通じて得られるはずであるが，通常は未知である。実際，もし密度がわかっているならば，無作為抽出を行なったところでなんの効果もみいだせないであろう。たとえば，測定値に偏りがないとすれば，その分布の平均値が求める量であろう。したがってその場合には密度に関する知識はそのまま求める量に関する知識になっている。一方「未知である」といった場合にもそれが意味するところは「完全にはわかっていない」ということであって，ほとんどの場合はそれについてなにかは知っているものである。たとえば密度は測定値とともに次第に増加し，最大値に達し，以後次第に減少する——一山分布である——とか，ある範囲外の密度の値は小さい，確率変数がこの範囲外にはいることはきわめてまれである，といったことである。このような知識すなわち「未知」の部分全体は密度の構造についての確信の度合からできており，事前分布を通じて表現されよう。したがって，もしこれらの確信が有限個の実変数の密度として表現されるならば，それによってこれまで展開してきた分析用具が利用可能になり，これらの確信は強力な援助を与えるであろう。そうでない場合には確信の度合を表現するいろいろな関数形の密度，つまり頻度的密度について意見を述べてもらう必要が生じよう。もっともこの頻度的密度に対しては適切な分析用具を用いることはできないが。このような理由から通常は x の密度についてそれが母数と呼ばれる s 個の実数値 θ_i に依存する関数形式 $f(x|\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_s)$ によって表現できると仮定する。ただしこの際，関数形 f は既知であるが，母数の値は未知であり，それゆえ事前分布を用いてそれを表現する必要がある。一方，s 個の実変数の分布の取り扱いについてはすでに知っており，たとえば同時密度を考慮すればよいから，その表現は可能である。関数形を固定した場合にも，母数を動かすことによってかなり広範囲の種類の密度が得られることはあきらかである。このような同じ種類の分布の集まりを**分布族**といい，後節(§5.5)では**指数型分布族**と呼ばれる特に有用な分布の集まりを取り扱う。本節では母数が1個のみの場合を考察する。これはかなり制約されてはいるが重要な場合である。

ときおり f は問題の内容構成から決定される。たとえば，母集団からの個々の無作為標本としてある事象 A が生起したか，しないかのいずれかしか観測できず，それが生起した回数 x を数えあげるだけであるとしよう。このとき x は二項分布(§2.1)に従い，唯一の母数は1回の試行において A の生起する確率 $\theta=p$ である。したがって未知母数の値は別として，分布の密度は二項分