БИБЛИОТЕКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТАБЛИЦ

ВЫПУСК 16

А. ТОМПСОН

ТАБЛИЦЫ
ДВАДЦАТИЗНАЧНЫХ ДЕСЯТИЧНЫХ ЛОГАРИФМОВ ЧИСЕЛ

ТОМ II

ЛОГАРИФМЫ ЧИСЕЛ ОТ 55 000 ДО 100 000

Обработка таблиц
и перевод текста с английского
М. Г. РАППОПОРТА и Л. И. САЗОНОВОЙ

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР АН СССР

МОСКВА — 1961

А. Томпсон

Таблицы двадцатизначных десятичных логарифмов чисел, том II

* * *

Утверждено к печати Ученым советом Вычислительного центра АН СССР

Редактор *И. А. Орлова* Технический редактор *Н. С. Попова*

Т-00808. Подписано в печать 29/I-62 г. Формат бумаги 84 × 108 1/16. Уч. изд. л. – 66,8. Усл. печ. л. – 51,27. Тираж 2200 экз. Заказ 88. Цена 3 руб. 64 коп.

Отпечатано на ротапринтах
в Вычислительном центре АН СССР
Москва, В–133, 1–й Академический проезд, дом 28

Вычислительный центр
Академии наук СССР

LOGARITHMETICA BRITANNICA

BEING A

STANDARD TABLE OF LOGARITHMS

TO

TWENTY DECIMAL PLACES

OF THE

NUMBERS 10,000 TO 100,000

BY

ALEXANDER JOHN THOMPSON, PH.D. LOND.

VOLUME II

ISSUED BY THE

DEPARTMENT OF STATISTICS, UNIVERSITY COLLEGE, LONDON

TO COMMEMORATE THE TERCENTENARY OF

HENRY BRIGGS'

PUBLICATION OF THE *ARITHMETICA LOGARITHMICA*, 1624

CAMBRIDGE

AT THE UNIVERSITY PRESS

1952

БИБЛИОТЕКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТАБЛИЦ

выходит под редакцией

К. А. КАРПОВА

Двухтомные таблицы двадцатизначных десятичных логарифмов чисел с пятизначным входом рассчитаны как на прямую, так и на обратную интерполяции со вторыми и четвертыми разностями, которые приводятся в таблицах. При меньших требованиях к точности интерполяция значительно упрощается. Таблицы предназначены для широкого круга специалистов, сталкивающихся в своей практике с вычислениями высокой точности.

ОТ РЕДАКТОРА

Несмотря на громадные успехи в развитии вычислительной техники, многозначные таблицы логарифмов принесут большую пользу при индивидуальных и несложных вычислениях большой точности.

Двадцатизначные десятичные таблицы логарифмов чисел профессора Томпсона являются одними из лучших в табличной литературе. Их преимущества заключаются в том, что они одинаково пригодны как для прямой, так и для обратной интерполяции и достаточно надежны.

Проведенный нами контроль по разностям выявил всего несколько ошибок в последних знаках разностей. Заметим, что автор предполагал возможность наличия в своих таблицах именно таких ошибок.

Во введении к таблицам приведен ценный материал по вычислению многозначных таблиц логарифмов и антилогарифмов, который может оказаться полезным и при вычислении других многозначных таблиц. Автор высказывает интересные мысли о классификации математических таблиц и их точности, хотя не все они являются бесспорными. Дается обширный цифровой материал (более чем с двадцатью знаками значения логарифмов, антилогарифмов и др.), который может представить самостоятельный интерес. Наконец, приведены списки ошибок прежних таблиц логарифмов [6; 8] и значительный исторический материал.

Читатели могут найти этот материал в части II английского издания таблиц, так как нами были опущены те разделы введения, которые, как нам казалось, представляют интерес для ограниченного круга специалистов.

Контроль таблиц проведен под руководством М.Г. Раппопорта. Им же выполнена обработка введения, первоначальный перевод которого был сделан Л.И. Сазоновой.

К.А. Карпов

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЙ

Около тридцати лет профессор А.Дж.Томпсон работал над созданием двадцатизначных таблиц логарифмов чисел. Автору пришлось преодолеть как вычислительные трудности, так и трудности, связанные с разработкой методов прямой и обратной интерполяции. Накопленный им опыт безусловно будет полезен будущим составителям таблиц.

Двадцатизначные логарифмы Томпсона были изданы в девяти частях. Первая публикация относится к 1924 г. (часть IX), последняя – к 1952 г. (часть II). Каждая часть снабжалась необходимым введением и лишь во второй части были опубликованы общее введение к таблицам и рекомендации по распределению числового материала в два тома.

Серьезное внимание уделялось точности таблиц. После выхода из печати в них не было обнаружено ни одной ошибки.

Автор выражает особую признательность покойному профессору Карлу Пирсону, который проявил большой интерес к этой работе.

БИБЛИОТЕКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТАБЛИЦ

ВЫШЛИ:

Выпуск 1. Таблицы круговых и гиперболических синусов и косинусов в радианной мере угла. М., Вычислительный центр АН СССР, 1958 г.

Выпуск 2. Таблицы вероятностных функций, том I,

$$H'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \text{ и } H(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\alpha^2} d\alpha.$$

М., Вычислительный центр АН СССР, 1958 г.

Выпуск 3. Таблицы вероятностных функций, том II,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ и } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^{x} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha.$$

М., Вычислительный центр АН СССР, 1959 г.

Выпуск 4. Таблицы функций Бесселя дробного индекса, том I, $J_\nu(x)$. М., Вычислительный центр АН СССР, 1959 г.

Выпуск 5. Таблицы функций Бесселя дробного индекса, том II, $I_\nu(x)$. М., Вычислительный центр АН СССР, 1959 г.

Выпуск 6. Таблицы круговых и гиперболических тангенсов и котангенсов в радианной мере угла. М., Вычислительный центр АН СССР, 1959 г.

Выпуск 7. Таблицы натуральных логарифмов, том I. Логарифмы чисел от 0 до 5. М., Вычислительный центр АН СССР, 1960 г.

Выпуск 8. Таблицы натуральных логарифмов, том II. Логарифмы чисел от 5 до 10. М., Вычислительный центр АН СССР, 1960 г.

Выпуск 9. Многозначные таблицы элементарных функций ($\sin x$, $\cos x$, e^x и e^{-x}). М., Вычислительный центр АН СССР, 1960 г.

Выпуск 10. Таблицы $\arcsin x$ и $\operatorname{arctg} x$. М., Вычислительный центр АН СССР, 1960 г.

Выпуск 11. Таблицы обратных гиперболических функций, М., Вычислительный центр АН СССР, 1960 г.

Выпуск 12. Таблицы функций Бесселя целого положительного индекса. М., Вычислительный центр АН СССР, 1960 г.

Выпуск 13. М.Шулер и Х.Гебелейн. Таблицы эллиптических функций. М., Вычислительный центр АН СССР, 1961 г.

Выпуск 15. Таблицы двадцатизначных десятичных логарифмов чисел, том I. Логарифмы чисел от 10 000 до 55 000. М., Вычислительный центр АН СССР, 1961 г.

Выпуск 16. Таблицы двадцатизначных десятичных логарифмов чисел, том II. Логарифмы чисел от 55 000 до 100 000. М., Вычислительный центр АН СССР, 1961 г.

ГОТОВЯТСЯ К ПЕЧАТИ:

Таблицы присоединенных функций Лежандра (сборник).

1

ВВЕДЕНИЕ

I. ОПРЕДЕЛЕНИЕ, ОБОЗНАЧЕНИЯ И СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ

Таблицы десятичных логарифмов чисел, изданные в девяти частях в период с 1924 г. по 1952 г., состоят из основной таблицы логарифмов целых чисел от 10 000 до 55 000 (том I) и от 55 000 до 100 000 (том II) с двадцатью десятичными знаками и нескольких вспомогательных таблиц с двадцатью одним знаком, облегчающих пользование основными таблицами. Основной таблице в первом томе предпослана таблица логарифмов первой тысячи чисел (1 – 1000). В оба тома включены таблица логарифмов чисел $1+\frac{N}{10^7}$; $1+\frac{N}{10^{10}}$ и $1+\frac{N}{10^{13}}$, где $N = 0(1)1000$ (таблица I), таблица антилогарифмов 0000000(1)0000450 (таблица II) и таблица некоторых функций и постоянных (таблица III).

Основные таблицы непосредственно дают двадцатизначные мантиссы логарифмов любых пятизначных чисел; с помощью интерполяции по ним можно найти логарифмы чисел и большой значности с ошибкой, не превосходящей единицы двадцатого знака.

Логарифмом числа N при основании a является степень y, в которую нужно возвести основание, чтобы получить число N, т. е., если

$$N = a^y, \tag{I. 1}$$

то y является логарифмом числа N при основании a, что записывается так

$$y = \log_a N. \tag{I. 2}$$

Обозначение $\log N$ используется здесь для логарифма N при основании 10*.

Центральные разности второго и четвертого порядков, помещенные в таблицах, соответственно обозначаются через $\delta^2\log N$ и $\delta^4\log N$ и определяются соотношениями:

$$\delta^2\log N = \log(N-1) - 2\log N + \log(N+1), \tag{I. 3}$$

$$\delta^4\log N = \delta^2\log(N-1) - 2\delta^2\log N + \delta^2\log(N+1) =$$
$$= \log(N-2) - 4\log(N-1) + 6\log N - 4\log(N+1) + \log(N+2), \tag{I. 4}$$

*В нашей литературе приняты следующие обозначения: $\log_a N$ – логарифм числа N при основании a, $\lg N$ – логарифм числа N при основании 10 и $\ln N$ – логарифм числа N при основании e (натуральный логарифм). – *Прим. ред.*

где $(N-2)$, $(N-1)$, N, $(N+1)$ и $(N+2)$ – последовательные числа из колонки аргумента N таблицы. Знак разностей (плюс или минус) записан под символом δ (например $\underset{+}{\delta}^2$; $\underset{-}{\delta}^4$ и т.д.).

Погрешность логарифмов и их разностей меньше половины единицы последнего табличного знака, так как они получены округлением двадцатого десятичного знака из значений, вычисленных с большим числом знаков. Справа от логарифмов и разностей, оканчивающихся значащей цифрой 5, стоят знаки плюс (+) или минус (–). Они показывают, больше (+) или меньше (–) табличные значения истинных. Это важно знать при сокращении данных таблиц до меньшей значности.

Логарифм числа N при основании a равен его логарифму при основании 10, деленному на логарифм a при основании 10

$$\log_a N = \frac{\log N}{\log a}. \tag{I. 5}$$

В частности, для натурального логарифма имеем

$$\log_e N = \frac{\log N}{\log e}, \tag{I. 6}$$

где $e = 2{,}71828\ \dots$, $\log e = k = 0{,}43429\ \dots$ и $\dfrac{1}{\log e} = \log_e 10 = c = 2{,}30258\ \dots$*.

Разности, в свою очередь, являются логарифмами некоторых чисел. Так, для центральных разностей четного порядка имеем

$$\delta^2 \log N = \log \frac{(N-1)(N+1)}{N^2}, \tag{I. 7}$$

$$\delta^4 \log N = \log \frac{(N-2)N^6(N+2)}{(N-1)^4(N+1)^4}, \tag{I. 8}$$

а для разностей нечетного порядка соответственно

$$\delta_{\frac{1}{2}} = \log(N+1) - \log N = \log\frac{(N+1)}{N}, \tag{I. 9}$$

$$\delta^3_{\frac{1}{2}} = \delta^2\log(N+1) - \delta^2\log N = \log\frac{N^3(N+2)}{(N-1)(N+1)^3}. \tag{I.10}$$

II. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Различают прямую и обратную интерполяции. При прямой интерполяции по числу, которого нет среди табличных значений аргумента, находят его логарифм. При обратной интерполяции известно значение логарифма, отсутствующее в таблице, а необходимо найти соответствующее ему число.

---

*В нашей литературе k называется модулем десятичной системы и обозначается через M. – *Прим. ред.*

Обратная интерполяция обычно выполняется гораздо труднее, чем прямая. Поэтому неоднократно публиковались таблицы антилогарифмов, в которых значения логарифмов являются аргументом, а соответствующие им числа – функциями. Из таких таблиц наиболее обширными являются таблицы [10; 34].

Методы интерполяции, которые здесь рассматриваются, делятся на четыре группы в зависимости от возможностей их применения в данных таблицах.

Метод множителей (§ 1) и интерполяция по формулам Эверетта (§ 2), являющиеся для данных таблиц наиболее удобными, описываются подробно. Интерполяция по разностным формулам, отличным от формул Эверетта (§ 3), и по формулам Лагранжа (§ 4), как менее эффективная, излагается кратко.

При всех методах интерполяции вычисления желательно выполнять с одним запасным знаком.

§ 1. Интерполяция методом множителей

При прямой интерполяции определяются множители числа, затем суммированием их логарифмов находится логарифм числа. Если множители известны или могут быть найдены из таблиц разложения целых чисел на множители (см., например, [7]), каждый из которых имеет не более пяти знаков, то задача нахождения логарифма становится простой. Но этот метод редко применяется к числам более чем с семью или восемью знаками и в общем случае приходится пользоваться несколько другим приемом.

Так как логарифм любого пятизначного числа имеется в таблице, то число N_x, логарифм которого ищется, делится на число N_0, образованное его первыми пятью цифрами. N_0 и принимается за первый множитель числа N_x. Частное $N_x : N_0$, имеющее вид $1{,}0000\,pqrst$, в свою очередь делится на число $1{,}0000\,pqr$, образованное его первыми восемью (5 + 3) знаками. Оно будет вторым множителем числа N_x; обозначим его через $(1 + a)$. Полученное частное $1{,}0^7stu\ldots$ делится затем на число, образованное его первыми одиннадцатью (8 + 3) знаками, т.е. на $1{,}0^7stu$, которое является третьим множителем и обозначается через $(1+b)$. Вновь полученное частное, имеющее вид $1{,}0^{10}vw\ldots$ (с двадцатью десятичными знаками), является четвертым множителем числа N_x и обозначается через $(1 + c)$. Таким образом, все число представится следующим образом:

$$N_x = N_0(1+a)(1+b)(1+c). \qquad \text{(II.1)}$$

Логарифм первого множителя N_0 берется из основной таблицы, а логарифмы остальных множителей – из таблицы I: логарифм $(1 + a)$ – из первой колонки, логарифм $(1 + b)$ – из второй. Как упоминалось, таблица I имеет трехзначный вход, а следовательно $\log(1 + c)$ может быть получен из третьей колонки таблицы I, либо линейной интерполяцией (для третьей колонки первая разность постоянна и равна $0{,}0^{13}43429\,448$), либо более удобным способом. Легко заметить, что с достаточной для наших целей точностью число $(1 + c)$ можно представить произведением четырех сомножителей $(1+c_0)(1+c_1)(1+c_2)(1+c_3)$, где $1+c_0+c_1+c_2+c_3 = 1+c$ и каждое c_i, кроме c_3, включает три последовательных значащих цифры числа c. Логарифм первого сомножителя находится непосредственно из третьей колонки таблицы I, второго — из той же колонки со сдвигом на три разряда вправо и т.д.*

Пример 1. Дано $\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846$. Найти $\log \sqrt{2\pi}$.

$$2\pi = 6{,}28318\ 53071\ 79586\ 47692.$$

Разделив на $6{,}2831 (= N_0)$, получим $1{,}00001\ 35772\ 43651\ 45818\ 5$.
Разделив на $1{,}0^4 135 (= 1 + a)$, получим $1{,}0^7\ 772\ 42608\ 68296\ 8$.
Разделив на $1{,}0^7 772 (= 1 + b)$, получим $1{,}0^{10}\ 42608\ 67967\ 9 = (1 + c)$.

Деление последнего частного $(1 + c)$ на $1{,}0^{10}426$ оставляет последующие цифры без изменения.

Далее находим:

в основной таблице	$\log 6{,}2831$ =	0,79817 39718 76146 66092;
в первой колонке таблицы I	$\log 1{,}0^4 135$ =	0,00000 58629 35930 96540 8;
во второй колонке таблицы I	$\log 1{,}0^7 772$ =	335 27532 70876 8;
в третьей колонке таблицы I	$\log 1{,}0^{10} 426$ =	18500 94492 9;
сдвигом на 3 разряда вправо	$\log 1{,}0^{13} 086$ =	03 73493 3;
сдвигом на 6 разрядов вправо	$\log 1{,}0^{16} 796$ =	3457 0;
сдвигом на 9 разрядов вправо	$\log 1{,}0^{19} 79$ =	3 4.
Суммируя эти логарифмы, получим	$\log 2\pi$ =	0,79817 98683 58115 04956 2.
Отсюда после деления на 2 окончательно находим	$\log \sqrt{2\pi}$ =	0,39908 99341 79057 52478.

Этот логарифм верен до последнего десятичного знака.

Метод множителей возможно использовать по-разному. Первый множитель может быть любым пятизначным числом при условии, что второй множитель $(1 + a)$ будет укладываться в пределах первой колонки таблицы I, т.е. будет меньше 1,0001. В примере 1 N_0 может быть одним из пятизначных чисел в диапазоне от 6,2826 до 6,2831.

Далее, не обязательно выписывать множители, лежащие за пределами второй колонки таблицы I (в приведенном примере можно остановиться на множителе $1{,}0^7 772\ 42608\ 68296\ 8$). Так как вторая разность в этой колонке не превышает четырех единиц двадцать первого десятичного знака, то логарифм последнего из выписанных множителей можно найти линейной интерполяцией.

Если пользоваться машиной с достаточной емкостью, то процесс деления возможно упростить путем объединения первых двух множителей N_0 и $(1 + a)$. Так, в примере 1 можно деление 2π на N_0 выполнять только до получения частного $1{,}0^4 135$ и его произведение на 6,2831 (= 6,28318 48218 5) использовать как делитель.

Изложенные особенности метода множителей почти всегда позволяют без особых трудностей проверить полученные результаты, изменяя схему вычислений.

Предыдущий пример можно решить, и не пользуясь таблицей I, если разложить 2π на те же два множителя 6,2831 и 1,00001 35772 43651 45818 5 и найти логарифм второго множителя непосредственно по ряду

$$\log (1+x) = k\left(x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \ldots\right), \qquad \text{(II.2)}$$

*Все, что говорилось относительно нахождения $\log (1 + c)$, вытекает, например, из ряда (II.2), так как в этом случае в нем можно отбрасывать все члены, начиная со второго. Отсюда же следует, что $\log(1+c)$ можно найти умножением c на k. — *Прим. ред.*

где

$$k = 0{,}43429\ 44819\ 03251\ 828; \qquad \frac{1}{3}k = 0{,}14476\ 48273,$$

$$\frac{1}{2}k = 0{,}21714\ 72409\ 516; \qquad \frac{1}{4}k = 0{,}10857.$$

Так как 2π ближе к 6,2832, чем к 6,2831, то лучше первоначально делить 2π на 6,2832, откуда

$$2\pi = 6{,}2832\ (1 - 0{,}00000\ 23384\ 29528\ 50825\ 7).$$

Здесь второй множитель нужно рассматривать как множитель вида $(1 - x$

Единственная трудность в использовании указанного логарифмического ряда состоит в нахождении произведения многозначных чисел k и x.

Процесс обратной интерполяции методом множителей в наипростейшей форме состоит из:

1) нахождения в основной таблице $\log N_0$ и $\log N_1$, между которыми лежит данный $\log N_x$, и вычитания $\log N_0$ из $\log N_x$; число N_0 будет первым множителем числа N_x;

2) нахождения двух логарифмов в первой колонке таблицы I, между которыми лежит предыдущая разность, и вычитания из нее меньшего из двух найденных логарифмов; соответствующее этому логарифму число $(1 + a)$ будет вторым множителем числа N_x;

3) продолжения процесса вычитания логарифмов, найденных таким же образом из колонок два и три, до тех пор, пока данный логарифм не будет исчерпан; так будут найдены третий $(1 + b)$ и четвертый $(1 + c)$ множители числа N_x.

Если число вычисляется до двадцать первого знака, то, как и при прямой интерполяции, последний множитель $(1 + c)$ находится по третьей колонке как произведение четырех чисел $(1 + c_0)(1 + c_1)(1 + c_2)(1 + c_3)$, которое с достаточной точностью равно $1 + c_0 + c_1 + c_2 + c_3$ (см. стр. IX).

Таким образом, искомое число будет

$$N_x = N_0(1 + a)(1 + b)(1 + c).$$

Произведение последних трех множителей равно

$$1 + (a + b + c) + a(b + c) + bc + abc, \tag{II.3}$$

где произведение abc меньше $0{,}0^3 1 \times 0{,}0^6 1 \times 0{,}0^9 1$, т. е. меньше $0{,}0^{20}1$. Так как оно редко влияет на точность двадцатого десятичного знака, то им можно пренебречь.

Пример 2. Дано $\log \Gamma(0{,}5) = 0{,}24857\ 49363\ 47066\ 92718$. Найти $\Gamma(0{,}5)$.

В основной таблице находим ближайший меньший логарифм

	$\log 1{,}7724 (= N_0)$	=	0,24856 17413 59574 32352,
	разность $\log \Gamma(0{,}5) - \log N_0$	=	1 31949 87492 60366.
В первой колонке таблицы I находим	$\log 1{,}0^4 303 (= 1 + a)$	=	1 31589 23444 98508 0,
	разность	=	360 64047 61858 0.
Во второй колонке таблицы I находим	$\log 1{,}0^7 830 (= 1 + b)$	=	360 46440 50204 3,
	разность	=	17607 11653 7.
В третьей колонке таблицы I находим	$\log 1{,}0^{10} 405$	=	17588 92651 7,
	разность	=	18 19002 0.
сдвигом на 3 разряда вправо	$\log 1{,}0^{13} 418$	=	18 15350 9,
	разность	=	3651 1.
сдвигом на 6 разрядов вправо	$\log 1{,}0^{16} 840$	=	3648 1,
	разность	=	3 0.
сдвигом на 9 разрядов вправо	$\log 1{,}0^{19} 69$	=	3 0.

Произведение последних четырех чисел составляет множитель $(1 + c)$. Как указывалось, это произведение заменяется суммой первого числа с дробными частями остальных трех. Суммирование же сводится к простой приписке справа к первому числу последовательно значащих цифр дробных частей остальных чисел.

Произведение множителей $1{,}0^4303$; $1{,}0^7830$ и т.д. равно сумме следующих строк:

$$\begin{aligned} 1+a+b+c &= 1{,}00003\ 03830\ 40541\ 88406\ 9 \\ a(b+c) &= \phantom{1{,}00003\ 03830\ 4}2516\ 12841\ 9 \\ bc &= \phantom{1{,}00003\ 03830\ 40541\ 88}336\ 5 \\ \text{Сумма} &= 1{,}00003\ 03830\ 43058\ 01585\ 3. \end{aligned}$$

Произведение этой суммы на 1,7724 есть $\Gamma(0{,}5) = 1{,}77245\ 38509\ 05516\ 02730$ и с точностью до двадцати десятичных знаков равно $\sqrt{\pi}$. Строка $1 + a + b + c$ составляется припиской справа к числу $1 + a$ значащих цифр дробных частей всех последующих чисел, выписанных в предыдущей таблице.

Точно так же, как и при прямой интерполяции, первый логарифм, который вычитается, может быть любым из табличных при условии, что разность не превышает последнего логарифма в первой колонке таблицы I, т.е. $0{,}0^4 4\ 34272\ \ldots$. Следовательно, число N_x можно получить с помощью двух или более различных последовательностей чисел. В рассмотренном выше примере первоначальное вычитание $\log 1{,}7723$ приведет к тому же самому результату с ошибкой, которая возникает неизбежно.

Пример 2 можно было бы решить вычитанием $\log 1{,}7724$ из $\log \Gamma(0{,}5)$ с последующей подстановкой разности ($\log N$) в антилогарифмический ряд

$$N = 1 + c\log N + \frac{1}{2!}(c\log N)^2 + \frac{1}{3!}(c\log N)^3 + \frac{1}{4!}(c\log N)^4 + \ldots, \qquad \text{(II.4)}$$

где

$$c = 2{,}30258\ 50929\ 94045\ 684; \qquad \frac{1}{3!}c^3 = 2{,}03467\ 85923,$$
$$\frac{1}{2!}c^2 = 2{,}65094\ 90552\ 39199; \qquad \frac{1}{4!}c^4 = 1{,}17126.$$

Так как $\log \Gamma(0{,}5)$ ближе к $\log 1{,}7725$, чем к $\log 1{,}7724$, то целесообразнее вычитать $\log 1{,}7725$.

Единственная трудность в использовании антилогарифмического ряда состоит в получении произведений пар чисел по 16 или 17 цифр каждое.

Третий метод нахождения числа по его логарифму после вычитания ближайшего логарифма состоит в использовании таблицы II (таблицы антилогарифмов) и прямой интерполяции по разностям.

Как и в примере 2,

$$\log \Gamma(0{,}5) - \log 1{,}7724 = 0{,}00001\ 31949\ 87492\ 60366.$$

Из таблицы II выписываем значения

$\log N$	N	δ^2_+
0,00001 31	1,00003 01643 19652 16354 5	53 02058 0
0,00001 32	1,00003 03945 85133 56451 9	53 02059 3,

а из таблицы коэффициентов Эверетта [33] найдем

при приращении аргумента, т.е. $\log N$ на $0{,}0^7949$;				при приращении аргумента, т.е. $\log N$ на $0{,}0^{10}874$			
t	$E_2(t)$	s	$E_2(s)$	t	$E_2(t)$	s	$E_2(s)$
0,949	–0,01572 16085	0,051	–0,00847 78915	0,874	–0,03440	0,126	–0,02067
0,950	–0,01543 75000	0,050	–0,00831 25000	0,875	–0,03418	0,125	–0,02051.

При первом приращении аргумента, т.е. для

$$t = 0{,}949, \quad s = 0{,}051; \qquad t = 0{,}950, \quad s = 0{,}050,$$

по формуле Эверетта (II. 7) со вторыми разностями* получим

$\log N$	N	δ^2
0,00001 31949	1,00003 03828 41592 72999 7	5 3
0,00001 31950	1,00003 03830 71858 23523 1	5 3.

Используя полученные значения для второго приращения аргумента, т.е. при

$$t = 0{,}874, \quad s = 0{,}126; \qquad t = 0{,}875, \quad s = 0{,}225,$$

интерполяцией по той же формуле получим

$\log N$	N
0,00001 31949 874	1,00003 03830 42844 78156 9
0,00001 31949 875	1,00003 03830 43075 04707 4.

Так как вторые разности равны нулю, то между последними двумя значениями $\log N$ можно провести линейную интерполяцию. Для $t = 0{,}92\ 60366$ и $s = 0{,}07\ 39634$, таким образом, получим

$$N = 1{,}00003\ 03830\ 43058\ 01585\ 4.$$

Этот результат отличается на единицу последнего знака от результата на стр. XII.

Как и раньше, процесс завершается умножением полученного числа на 1,7724.

Если при интерполяции пользоваться формулой Эверетта (II. 8), то можно обойтись без таблиц коэффициентов.

Приведем некоторые рекомендации на случай, когда при интерполяции требуется точность меньшая двадцати знаков и когда целесообразно применять упрощенные схемы вычислений.

1. Логарифмы и антилогарифмы пяти и менее значных чисел находятся непосредственно из основной таблицы.

2. Логарифмы и антилогарифмы шести–десяти значных чисел проще всего вычислять по формуле линейной интерполяции вида

$$u(x) = u_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}(u_1 - u_0),$$

где $u(x)$ – искомое, а u_0 и u_1 – табличные значения функции, соответствующие значениям аргумента x, x_0, x_1. При прямой интерполяции $\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x - x_0}{h} = t$, где где h – шаг таблиц.

3. При вычислении логарифмов с десятью–семнадцатью знаками целесообразно пользоваться формулой Эверетта со вторыми разностями.

*О вычислении δ^2 см. стр. XV. Для таблицы II при первой интерполяции всюду $\delta^2 = 53$, а при второй – нулю. – *Прим. ред.*

4. Антилогарифмы с десятью и большим числом знаков следует вычислять методом множителей, обрывая его на соответствующем шаге.

5. При прямой интерполяции четвертыми разностями всегда следует пренебрегать, если они меньше 21 единицы знака, который следует учитывать.

§ 2. Интерполяция методом разностей. Формулы Эверетта

Вместе с логарифмами в основной таблице приводятся центральные разности второго δ^2 и четвертого δ^4 порядков. Таким образом, таблица удобна для интерполяции по формуле Эверетта с центральными разностями четного порядка, которую можно записать так

$$u_t = su_0 + tu_1 + \{\frac{s(s^2-1)}{3!}\delta^2 u_0 + \frac{t(t^2-1)}{3!}\delta^2 u_1\} +$$

$$+ \{\frac{s(s^2-1)(s^2-4)}{5!}\delta^4 u_0 + \frac{t(t^2-1)(t^2-4)}{5!}\delta^4 u_1\} + \ldots, \qquad \text{(II.5)}$$

где u_0, u_1 – соседние табличные значения функции, между которыми заключено искомое значение u_t и которые соответствуют значениям аргумента x_0 и x_0+h (h – шаг таблиц); $t = \frac{x-x_0}{h}$ и $s = 1-t$; $\delta^2 u_0$, $\delta^2 u_1$, $\delta^4 u_0$, $\delta^4 u_1$ – центральные разности второго и четвертого порядка, соответствующие значениям функции u_0 и u_1.

В рассматриваемых таблицах значениям u_0 и u_1 соответствуют $\log N_0$ и $\log N_1$, значениям $\delta^2 u_0$, $\delta^2 u_1$ соответствуют $\delta^2 \log N_0$, $\delta^2 \log N_1$ и т.д., значению u_t соответствует $\log N_x$.

Введем обозначения:

$$\left.\begin{aligned} E_2(t) &= \frac{t(t^2-1)}{3!}, & E_2(s) &= \frac{s(s^2-1)}{3!}, \\ E_4(t) &= \frac{t(t^2-1)(t^2-4)}{5!}, & E_4(s) &= \frac{s(s^2-1)(s^2-4)}{5!}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II.6)}$$

Тогда формула (II. 5) примет вид

$$u_t = su_0 + tu_1 + \{E_2(s)\delta^2 u_0 + E_2(t)\delta^2 u_1\} + \{E_4(s)\delta^4 u_0 + E_4(t)\delta^4 u_1\} + \ldots . \qquad \text{(II.7)}$$

В таблицах коэффициентов формулы Эверетта [9; 24; 33] даны коэффициенты E_2 и E_4 с шагом 0,001 по t и s.* Каждая из этих таблиц обеспечивает прямую интерполяцию по всей таблице логарифмов, если t содержит не более трех десятичных знаков. В противном случае для аргументов, увеличенных на три цифры, вычисляют по одному логарифму по обеим сторонам искомого логарифма и соответствующие центральные разности. Используя полученные результаты, повторяют процесс, вычисляя логарифмы и разности для второго увеличения аргумента на три цифры и т.д. Таким образом избегают интерполяции коэффициентов формулы Эверетта.

---

* Для коэффициентов E_2 в таблицах даются точные значения. – *Прим. ред.*