Л. Л. ТЕРЕХОВ

Применение математических методов в экономике

ГОССТАТИЗДАТ · 1963

Л. Л. ТЕРЕХОВ

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ЭКОНОМИКЕ

ГОССТАТИЗДАТ
ЦСУ СССР

МОСКВА 1962

Настоящая брошюра содержит популярное описание математических методов и средств вычислительной техники, используемых при решении планово-экономических и статистических задач. Брошюра рассчитана на самый широкий круг экономистов, статистиков, студентов и других лиц, интересующихся вопросами применения математики в экономике и имеющих математическую подготовку в объеме общеобразовательной школы.

ВВЕДЕНИЕ

В Программе КПСС подчеркивается, что применение науки становится решающим фактором могучего роста производительных сил в период развернутого строительства коммунизма.

Экономическая наука призвана развивать научные методы руководства развитием общества применительно к новым условиям. В Программе КПСС говорится: «Задача экономической науки состоит в том, чтобы обобщать новые явления в экономической жизни общества, разрабатывать народнохозяйственные проблемы, решение которых способствует успешному строительству коммунизма. Внимание экономистов должно быть направлено на изыскание путей наиболее эффективного использования в народном хозяйстве материальных и трудовых ресурсов, наилучших методов планирования и организации промышленного и сельскохозяйственного производства, на разработку принципов рационального размещения производительных сил и технико-экономических проблем строительства коммунизма».

Для успешного решения этих задач требуются глубокие и всесторонние экономические исследования. В Программе КПСС указывается: «Возрастание масштабов народного хозяйства, быстрое развитие науки и техники требуют повышения научного уровня планирования, проектирования, учета и статистики». Теоретической основой экономических исследований была и остается марксистско-ленинская политическая экономия, ибо только она дает правильное научное понимание экономических законов развития общества. Политическая экономия как наука непрерывно развивается и совершенствуется, обогащается новым опытом, разрабатывает сложные теоретические проблемы строительства коммунизма. Тем более не могут оставаться неизменными практические методы решения конкретных экономических задач: они уточняются и углубляются. В последнее время все более широкое применение в экономических исследованиях находят новейшие достижения математики и современной вычислительной техники. Этот процесс знаменует переход экономической науки на новую, более высокую ступень, на стадию точного количественного анализа.

Каждое явление или процесс в природе и обществе имеют две стороны, две определенности: качественную и количественную. Чтобы составить представление о предмете, нужно в первую очередь отличать его от других предметов, распознать его сущность и характерные черты и лишь после этого определить его с количественной стороны. Еще более необходимо предварительное качественное изучение, когда речь идет не об отдельных предметах или явлениях, а об их взаимной связи и сложном взаимодействии. Пока наука не исследует с необходимой полнотой и точностью качественные особенности, закономерности и связи явлений, она не в состоянии правильно применять к этим явлениям количественный анализ.

Тот факт, что объекты экономического изучения хорошо поддаются количественному измерению, известен, конечно, давным-давно, и элементы счетоводства, учета, экономической статистики существовали сотни лет назад. Но количественный анализ предполагает не просто счет, а установление количественных связей, зависимостей, закономерностей, и такая задача не может быть решена раньше, чем эти экономические связи, зависимости и закономерности установлены и изучены с качественной стороны.

Современное состояние экономической науки, позволяющее успешно использовать сложные математические методы, подготовлено всем ходом ее развития. Применение математики в той или иной отрасли знаний служит не только показателем прогресса математических исследований, но и свидетельством зрелости самой науки, применяющей математику. Математические методы — мощный инструмент исследования, но, как и всякий инструмент, они приносят пользу лишь в умелых руках.

Только на основе марксистско-ленинской теории, на основе правильного и точного качественного анализа социально-экономических явлений и закономерностей можно с успехом применять математические приемы решения экономических задач. Если же исходные предпосылки исследования ошибочны, то использование математических методов может только усугубить заблуждение и привести к совершенно искаженным выводам. Именно такую картину часто наблюдаем мы в буржуазной науке, которая охотно пользуется формально-математическими приемами, но при этом, как правило, исходит в своих построениях из ложных теоретико-экономических предпосылок. Ни к чему, кроме ошибок и путаницы, такое применение математики не приводит.

Применение математики в экономических расчетах отвечает потребностям практики социалистического планирования и управления производством.

Можно назвать немало различных вопросов, от правильного решения которых зависит эффективность планирования. Например, как распределить огромные средства, ежегодно выделяемые для капиталовложений в народное хозяйство, между отраслями производства, а затем и между отдельными объектами строительства, чтобы в наиболее короткие сроки и в максимально возможном объеме получить необходимую продукцию? Какие конкретные пропорции в развитии различных отраслей экономики в наилучшей степени удовлетворяют интересам общества? Эти проблемы относятся к народохозяйственному планированию в целом. Но подобного рода вопросы появляются и при планировании по отраслям, экономическим районам, отдельным предприятиям. Как с наибольшим эффектом распределить программу производства различных видов продукции между предприятиями данной отрасли? Как закрепить потребителей сырья или материалов за поставщиками, чтобы общая стоимость транспортных перевозок этих грузов была наименьшей? Производство каких видов продукции целесообразнее всего развивать в данном экономическом районе? Как распределить посевные площади колхоза между различными сельскохозяйственными культурами, чтобы получить наилучший эффект с учетом сочетания общегосударственных и колхозных интересов?

Решение таких вопросов невозможно без правильного качественного анализа, без знания многообразных связей и зависимостей, лежащих в основе экономических процессов. Но наряду с этим остается необходимость численного решения таких задач. Оно достигается на основе тщательного изучения соответствующих статистических данных, на основе опыта, накопленного в прошлом, и оценки имеющихся возможностей. Однако почти всегда в плановых решениях допускается элемент некоторой произвольности, некоторой приближенности. А от нее не так уж далеко до ошибки.

Поэтому естественно поставить вопрос: нельзя ли вооружить экономистов такими точными методами решения конкретных задач хозяйственного управления и планирования, которые исключали бы элемент неоправданной произвольности и давали объективную возможность выбирать, из всей массы имеющихся вариантов действительно наилучший? Опыт применения современных математических методов к решению широкого круга экономических проблем позволяет ответить на этот вопрос положительно. Наряду с точным качественным анализом изучаемых явлений и процессов экономика может овладеть и точным количественным анализом.

Однако успешное применение математических методов в экономических исследованиях связано с преодолением ряда трудностей и выдвигает некоторые особые проблемы. Они возникают на каждой стадии работы над решением задачи, а таких стадий насчитывается по крайней мере четыре: 1) постановка задачи; 2) получение необходимых исходных данных; 3) математическая формулировка задачи; 4) решение задачи и анализ полученных результатов. Рассмотрим основные моменты, характеризующие эти стадии.

От правильной постановки задачи во многом зависит успех ее решения. Прежде всего в задаче должна быть четко и недвусмысленно сформулирована цель наших поисков — конечный результат. Типичная задача планирования вкратце сводится к тому, что нужно из многих возможных вариантов плана выбрать наилучший. Но понятие «наилучший» в каждом отдельном случае нуждается в конкретизации, иначе поставленная проблема окажется неразрешимой. Так, при решении вопроса, как с наибольшим эффектом распределить программу производства различных видов продукции между предприятиями данной отрасли, мы обнаружим ряд возможных вариантов, так как данные предприятия могут производить разную продукцию из имеющегося ассортимента. Задача так и останется неопределенной, если не уточнить, какой же из вариантов считать наилучшим. В данном случае наиболее эффективным может считаться вариант, при котором общая сумма затрат на производство всей запланированной продукции окажется наименьшей. Однако можно принять и другой критерий эффективности, например ориентироваться на максимально возможный выпуск продукции при заданном ассортименте. В других задачах берутся иные критерии эффективности: наибольшая рентабельность или прибыль, минимальный расход дефицитного сырья, наиболее полное использование оборудования, наименьший процент отходов производства и т. д. Наилучший с точки зрения выбранного критерия вариант называется оптимальным вариантом, а задача на отыскание оптимального варианта принадлежит к числу основных экономических задач, решаемых с применением современных математических методов.

Постановка экономической задачи вообще и выбор показателей эффективности в частности — это проблема исключительно качественного анализа. Хотя задача уже самой своей формулировкой должна допускать возможность количественного решения, она возникает вначале не как математическая, а как чисто экономическая проблема.

Второй этап исследования — получение и подготовка необходимых исходных данных. Совершенно очевидно, что для математического решения задачи все ее исходные данные должны иметь количественное выражение в виде системы взаимосвязанных и взаимозависимых показателей, отражающих количественные закономерности реальной действительности. Если, например, поставлена задача наилучшим образом распределить производственную программу между несколькими предприятиями, с тем чтобы сумма расходов на всю планируемую продукцию была наименьшей, то, помимо данных о заданном объеме выпуска, о производственной мощности предприятий и т. п., необходимо знать, какова будет себестоимость изготовления каждого вида изделий на каждом из этих предприятий. Вопрос не такой уж простой, особенно если продукция новая и раньше на предприятиях данной отрасли не производилась. Нужно хорошо знать, из каких элементов затрат складывается себестоимость, как отражается на ее величине уровень производительности труда, затраты материалов, электроэнергии, различные транспортные расходы и т. п. Эти показатели на разных предприятиях будут неодинаковы по величине и во всех случаях их нужно оценить как можно точнее. Если же в расчете себестоимости будут допущены ошибки, то и все последующее решение задачи окажется неверным, так как именно по показателю себестоимости определяется в нашем примере оптимальный вариант. Отсюда понятно значение проверенных и точных исходных данных. Для их получения требуется тщательно изучить статистические материалы, установить методами статистики зависимость одних показателей от других, произвести необходимые технико-экономические расчеты.

Третья стадия работы — математическая формулировка задачи. Цель этой стадии — представить исходные данные и неизвестные величины в таком виде, чтобы можно было при помощи вычислений получить значения неизвестных величин. Для такой цели, например, хорошо подходят всем известные математические уравнения: уравнение с одним неизвестным, система двух уравнений с двумя неизвестными и т. д.

В уравнениях математически выражается связь между некоторыми переменными величинами, причем с изменением одних переменных определенным образом изменяются и другие. Математические уравнения могут применяться для формулировки многих экономических задач, поскольку экономические категории поддаются количественному выражению и в своих изменениях связаны определенными закономерностями.

Трудность состоит в том, что экономические величины складываются обычно под влиянием не одного-двух, а очень многих факторов. Попытаться учесть и выразить математически воздействие всех факторов без исключения — задача, как правило, практически невыполнимая. Приходится ограничиваться выявлением главных факторов, решающих связей и зависимостей. И все же математическая форма экономической задачи редко содержит, скажем, одно уравнение. Обычно это целая система уравнений или неравенств, либо система специальных математических таблиц с рядом исходных данных и неизвестных величин, подлежащих определению. Такая взаимосвязанная система экономических величин называется экономико-математической моделью.

При составлении модели мы обычно отвлекаемся, абстрагируемся от несущественных, второстепенных связей и тем более от всяких случайных влияний на изучаемые показатели. Это вполне допустимо, если не упущены из виду решающие связи и типичные факторы. Конечно, экономико-математическая модель всегда в той или иной степени упрощеннее, «беднее», чем реальная экономическая действительность. Но делая такую уступку, мы в то же время получаем и неоспоримые преимущества. Прежде всего, на модели можно экспериментировать. Можно как угодно изменять одни показатели модели и смотреть, как при этом изменяются другие. В реальных условиях проводить такие опыты очень трудно, а чаще всего совсем невозможно. В конечном счете, исследуя модель математическими методами, можно получать наивыгоднейшие решения.

Таким образом, решение экономико-математической задачи, которое является четвертым этапом работы над ней, сводится к исследованию соответствующей модели определенными математическими приемами. Разработка и строгое обоснование этих приемов является делом математики, важно лишь отметить, что их практическое использование часто не требует никаких особых знаний, кроме знания основных арифметических действий. Конечно, при этом должен быть известен и сам порядок вычислений. Трудность заключается в другом — в объеме вычислений. Даже сравнительно простые модели, построенные для решения реальных экономических задач, требуют выполнения десятков и сотен арифметических действий, а в сложных моделях, учитывающих много факторов, количество необходимых действий возрастает до миллионов. С помощью обычных счетных машин и приспособлений выполнить такую массу вычислений в краткие сроки просто невозможно, для этого потребовались бы нередко годы непрерывного труда. К тому же нельзя было бы дать никаких гарантий, что в расчетах не окажется ошибок. Поэтому еще каких-нибудь десять лет назад мы не могли говорить о широком применении математики в экономике. Положение коренным образом изменилось с появлением электронных вычислительных машин. Эти машины производят тысячи операций в секунду, сосредоточивают в своей «памяти» огромный цифровой материал и достаточно прочно гарантируют от ошибок. Применение электронных вычислительных машин позволяет смело браться за решение задач, требующих многих миллионов вычислительных операций. Этим ликвидируется еще одно препятствие на пути успешного овладения экономикой методами количественного анализа.

Использование средств математики экономической наукой и практикой не является, вообще говоря, новым делом. Достаточно напомнить о давнем и широком применении в экономико-статистических расчетах методов теории вероятностей и математической статистики. Однако в последние годы математика начинает глубоко проникать в такую область, где внедрение точных методов может стать наиболее действенным и эффективным — в область планирования и оперативного руководства хозяйственной деятельностью. Этот процесс еще очень далек от своего завершения, но уже сейчас имеются серьезные достижения в разработке некоторых математических методов, позволяющих успешно решать многие реальные плановые и учетно-статистические задачи. Прежде всего сюда относятся методы, основанные на применении линейной алгебры, — методы линейного программирования и анализа балансов межотраслевых связей, о которых и пойдет речь в настоящей брошюре. Мы рассмотрим также некоторые вопросы использования в экономических расчетах электронных вычислительных машин, так как внедрение в экономику новых методов количественного анализа тесно связано с применением современной быстродействующей вычислительной техники. Практическое значение и эффективность математических методов, к рассмотрению которых мы переходим, в сочетании с электронной техникой уже проверены на опыте советских и зарубежных экономических исследований, и наряду с дальнейшим совершенствованием самих этих методов сейчас уже вполне актуальным является вопрос о значительном расширении их практического применения в планировании и организации социалистического производства.

ГЛАВА I

ПРИНЦИПЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В практике планирования и оперативного руководства постоянно появляется необходимость выбирать один-единственный вариант плана или производственной программы из многих возможных вариантов. Различные выполнимые варианты могут быть лучше или хуже с точки зрения интересующего нас конечного результата, и тщательный анализ прошлого опыта помогает в таких случаях остановиться на приемлемом, удачном варианте. Но интуиции и опыта оказывается обычно недостаточно, чтобы судить, является ли выбранный вариант наилучшим из возможных. Возникает необходимость в точных методах, позволяющих сравнивать различные варианты, находить действительно оптимальные решения и закреплять их в плане.

Во введении были приведены примеры ряда конкретных задач оптимального планирования от крупных народнохозяйственных проблем до задач внутрипроизводственного характера. Далеко не для всех этих задач уже имеются готовые и надежные приемы решения. Но существующие математические методы позволяют успешно решать многие экономические задачи на отыскание оптимальных вариантов. К числу таких хорошо разработанных и достаточно освоенных практических методов и относятся методы линейного программирования.

Графический метод. Ознакомление с сущностью задач линейного программирования и приемами их решения начнем с простого примера.

Предположим, что на каком-то предприятии решено организовать побочный цех для использования остающихся от основного производства материалов. Цеху поручено освоить производство шкафов двух видов: закрытых канцелярского типа и застекленных книжных шкафов. Задача состоит в том, чтобы запланировать ежемесячный выпуск шкафов по видам, при этом желательно обеспечить наибольшую рентабельность работы цеха.

Очевидно, что для решения этой задачи потребуется ряд отправных данных. Зададимся прежде всего таким вопросом: от чего будет зависеть величина возможного выпуска шкафов? Конечно, существует много факторов, влияющих на величину выпуска, но главные из них легко назвать сразу, это — наличие оборудованных рабочих мест и материалов.

Ограниченное количество рабочих мест, которое зависит и от производственной площади цеха, и от наличия необходимого производственного оборудования, приводит к тому, что в цехе может работать лишь определенное число рабочих. Поэтому для учета первого фактора при составлении плана достаточно знать общее количество рабочего времени, которым будем располагать при данном числе рабочих мест, и производительность труда рабочих при изготовлении шкафов первого и второго вида. Предположим, что месячный фонд рабочего времени — 660 чел.-час., а средние затраты рабочего времени на производство канцелярского шкафа — 6, книжного шкафа — 10 чел.-час.

Второй фактор — материалы. Здесь тоже нужно знать общее количество материалов и их затраты на единицу продукции. Учтем, что для изготовления канцелярского шкафа требуется в основном только древесина, а для книжного — древесина и стекло (расход других материалов невелик и учитывать их не будем). Предположим, что имеются следующие данные: цех будет располагать ежемесячно 47 $м^3$ древесины и 45 $м^2$ стекла; средний расход древесины на один канцелярский шкаф — 0,5 $м^3$, на книжный шкаф — 0,3 $м^3$, расход стекла на один книжный шкаф — 1,5 $м^2$. Отметим, что в реальной обстановке для получения всех приведенных нами данных нужно владеть приемами нормирования и статистического анализа и с помощью этих приемов тщательно изучить исходный материал, с тем чтобы избежать неточностей и ошибок в самом начале работы над задачей.

Итак, имеются необходимые данные, характеризующие производственные возможности цеха. Для удобства сведем их в таблицу.

Таблица 1

	Рабочее время (в чел.-час.)	Древесина (в $м^3$)	Стекло (в $м^2$)
Шкаф канцелярский	6	0,5	—
Шкаф книжный	10	0,3	1,5
Располагаемое количество	660	47	45

Теперь следует вернуться к исходному условию задачи, требующему не только составить реальный план выпуска, но и обеспечить наиболее рентабельную работу цеха. Условимся, что рентабельность будет тем выше, чем больше сумма реализации, цены реализации составляют для канцелярского шкафа 20 руб. и для книжного — 25 руб.

Попробуем составить план, не прибегая ни к каким специальным приемам. Можно, например, рассуждать так: поскольку более высокую цену имеют книжные шкафы, следует начать с них и запланировать их выпуск в максимально возможном количестве. Анализируя исходные данные, мы придем к выводу, что предельный выпуск книжных шкафов составляет 30 штук, на большее количество не хватит стекла (всего стекла 45 $м^2$, на один шкаф нужно 1,5 $м^2$, отсюда предельный выпуск равен $\frac{45}{1,5}=$ $=30$ шкафов). На 30 книжных шкафов уйдет 9 $м^3$ древесины, из остальных 38 $м^3$ можно изготовить дополнительно 76 канцелярских шкафов. С другой стороны, на 30 книжных шкафов будет затрачено 300 чел.-час. рабочего времени, а оставшихся 360 чел.-час. хватит на изготовление только 60 канцелярских шкафов. Следовательно, не нарушая исходных условий, можно изготовить 60 канцелярских шкафов и 30 книжных. При этом рабочее время будет использовано полностью, стекло — также полностью, а древесины потребуется $60\times0,5+30\times0,3=39$ $м^3$. Общая выручка от реализации этого количества шкафов составит $20\times60+25\times30=1950$ руб.

Совершенно ясно, что показанная здесь программа выпуска не является единственно возможной. Могут быть и другие варианты плана. Но неизвестно, какой вариант является наилучшим. Да и не у всякого хватит терпения и времени перебирать вслепую различные варианты без особой уверенности в успехе.

Воспользуемся теперь для решения нашей задачи одним из методов линейного программирования, а именно — графическим методом. Прежде всего представим условия задачи в математической форме. Неизвестными величинами, которые нужно найти, являются размеры ежемесячного выпуска шкафов. Обозначим выпуск шкафов канцелярского типа через x_1, а книжных шкафов — через x_2.

Выразим уравнением цель, которая заключается в обеспечении наибольшей суммы реализации. Если последнюю обозначить через C, то при известных ценах реализации уравнение будет иметь следующий вид:

$$C=20x_1+25x_2.$$

Итак, цель наших поисков — найти такое из возможных сочетаний выпуска канцелярских шкафов x_1 и книжных шкафов x_2, при котором C будет иметь наибольшую величину.

Представим математически и те ограничения, которые связаны с располагаемым нами количеством рабочего времени и материалов. Здесь придется воспользоваться не уравнениями, а неравенствами. Действительно, если взять, например, рабочее время, то потребность в нем для всего выпуска составит $6x_1+10x_2$, где коэффициенты 6 и 10 показывают затраты рабочего времени на единицу продукции (см. табл. 1). Эта общая потребность не должна превышать фонд рабочего времени, равный 660 чел.-час., но она может быть равна этому фонду, или быть меньше его. Следовательно, для математического выражения этого условия нужно применить неравенство:

$$6x_1+10x_2 \leqslant 660.$$

В виде неравенств следует представить и два других ограничения, относящихся к располагаемому количеству древесины и стекла. Таким образом, в целом ограничивающие условия задачи выражаются тремя неравенствами:

$$6x_1+10x_2 \leqslant 660,$$
$$0{,}5x_1+0{,}3x_2 \leqslant 47,$$
$$1{,}5x_2 \leqslant 45.$$

С математической точки зрения имеет значение еще одно условие — условие неотрицательности значений x_1 и x_2, которое запишется так:

$$x_1 \geqslant 0,$$
$$x_2 \geqslant 0.$$

Это условие совершенно очевидно: выпуск шкафов первого или второго вида может быть величиной положительной или равной нулю, но не может, конечно, иметь отрицательного значения.

Изобразим теперь условия нашей задачи графически. В прямоугольной системе координат предназначим горизонтальную ось для значений x_1, вертикальную — для значений x_2. Проведем на графике прямую, соответствующую уравнению $6x_1+10x_2=660$ (оно получено из нашего первого неравенства). Для этого найдем две точки, в которых искомая прямая пересекает оси x_1 и x_2. Очевидно, что в точке пересечения прямой с осью x_1 величина x_2 равна нулю. Подставляя $x_2=0$ в уравнение, получим значение x_1:

$$x_1=\frac{660}{6}=110.$$

В точке пересечения той же прямой с осью x_2 нулю равна величина x_1. Подставляя в уравнение $x_1=0$, имеем:

$$x_2=\frac{660}{10}=66.$$

Отметив на оси x_1 значение $x_1=110$, на оси x_2 — значение $x_2=66$ и соединив эти точки прямой, получим прямую, соответствующую уравнению $6x_1+10x_2=660$.

Аналогичным образом найдем точки пересечения с осями и проведем прямую для уравнения $0{,}5x_1+0{,}3x_2=47$. Третья прямая, соответствующая уравнению $1{,}5x_2=45$, будет параллельна оси x_1 и пересечет ось x_2 в точке

$$x_2=\frac{45}{1{,}5}=30.$$

В итоге получим график, представленный на рис. 1, где первому уравнению соответствует прямая AB, второму — KL, третьему — MN.

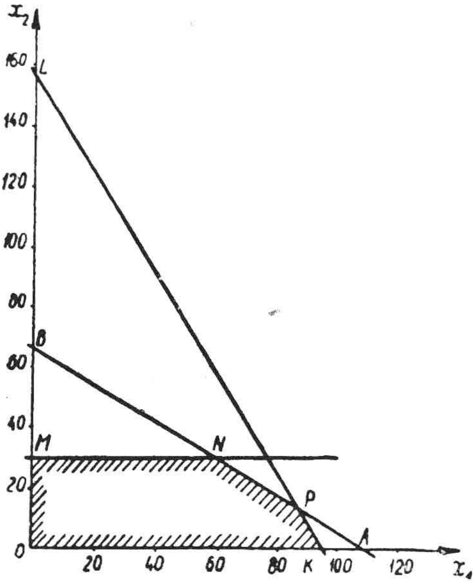

Рис. 1

Любая намеченная программа выпуска характеризуется на графике определенной точкой. Так, программе выпуска 60 канцелярских шкафов и 30 книжных соответствует точка N с координатами $x_1=60$ и $x_2=30$.

Если для выполнения программы потребуется весь располагаемый фонд рабочего времени, то соответствующая точка на графике будет лежать на прямой AB, так как эта прямая включает все точки, для которых справедливо равенство $6x_1+10x_2=660$. Поскольку при плане выпуска 60 канцелярских и 30 книжных шкафов используются все 660 чел.-час. рабочего времени, точка N также лежит на прямой AB. Может быть намечен и такой план, при котором фонд рабочего времени используется неполностью; тогда соответствующая точка на графике окажется внутри треугольника OAB. Вообще при любой программе, учитывающей органичения

$$6x_1+10x_2\leqslant 660,$$

$$x_1\geqslant 0,$$

$$x_2\geqslant 0,$$

соответствующая точка будет лежать либо на одной из сторон треугольника OAB, либо внутри его. Выходя за пределы треугольника OAB, мы нарушаем хотя бы одно из этих трех ограничений.

С другой стороны, точка, характеризующая намеченную программу, не может находиться за пределами треугольника

OKL, иначе будет нарушено ограничение, связанное с имеющимся количеством древесины.

Наконец, любая реальная программа должна учитывать запасы стекла, поэтому на графике соответствующая точка должна располагаться не выше прямой MN. При программе $x_1=60$ и $x_2=30$ запас стекла используется полностью, и точка N находится на прямой MN.

Таким образом, каждая прямая на графике представляет одно из ограничений, налагаемых условиями задачи. Реальная программа выпуска требует учета всех этих ограничений вместе взятых. Поэтому, какой бы план выпуска ни был намечен, ему должна соответствовать на графике точка, не выходящая за пределы пятиугольника $OMNPK$ (на рисунке он заштрихован). Лишь в пределах этого пятиугольника не нарушается ни одно из наших пяти неравенств.

Итак, мы четко ограничили на графике область допустимых решений задачи. Однако и в этих ограниченных пределах существует очень много возможных вариантов программы. Нужно выбрать из них такой, который обеспечивает наибольшую выручку, т. е. максимальную величину C в уравнении

$$C=20x_1+25x_2.$$

Если придать C какое-либо определенное значение, то соответствующее уравнение тоже можно представить на графике в виде прямой. Возьмем, например, $C=1000$. Тогда уравнение будет иметь вид $1000=20x_1+25x_2$. По этому уравнению можно построить прямую на графике (она пересечет ось x_1 в точке $x_1=50$ и ось x_2 в точке $x_2=40$). Прямая для $C=1000$ проведена на рис. 2, на этом же рисунке перечерчен пятиугольник допустимых решений. Точки на этой прямой соответствуют таким парам значений x_1 и x_2, при которых общая выручка составит 1000 руб. Но это не максимально возможная сумма реализации. Первоначально намеченный нами вариант выпуска 60 канцелярских и 30 книжных шкафов обеспечивает выручку 1950 руб. Проведем на графике и эту прямую ($1950=20x_1+25x_2$). Она параллельна прямой для $C=1000$.

Если придавать величине C все более высокие значения, то соответствующие прямые будут располагаться все дальше от начала координат, причем параллельно друг другу. Однако нас не могут интересовать прямые, расположенные за пределами нашего пятиугольника, так как за этими пределами отсутствуют допустимые решения задачи. Нам нужна прямая, которая расположена дальше других, но имеет хотя бы одну общую точку с пятиугольником допустимых решений. Нетрудно видеть, что при увеличении значений C последней прямой, не «оторванной» от пятиугольника, окажется прямая, проходящая через точку P (она показана на рис. 2). Поэтому можно считать, что точка P соответствует той предельной реальной программе выпуска, при которой выручка C является максимальной. Более высокую выручку нельзя обеспечить без нарушения исходных ограничений, так как при большем значении C прямая будет целиком лежать за пределами пятиугольника.

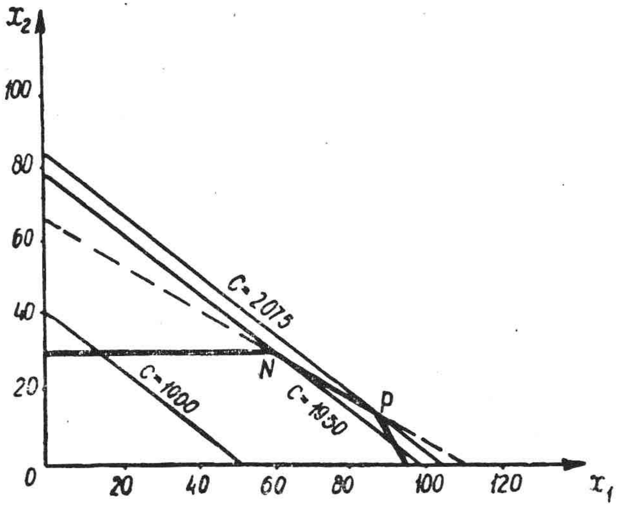

Рис. 2

Какой же программе соответствует точка P и какую выручку даст эта программа? Точка P нашего пятиугольника находится на пересечении двух прямых: AB и KL (см. рис. 1). Значит, ее координаты должны удовлетворять уравнениям обеих этих прямых, иными словами, для нахождения координат точки P нужно решить систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$6x_1+10x_2=660,$$
$$0{,}5x_1+0{,}3x_2=47.$$

Решая эту систему, находим значения:

$$x_1=85,$$
$$x_2=15.$$

Таким образом, мы нашли программу выпуска, предусматривающую изготовление в месяц 85 канцелярских шкафов и 15 книжных. При этой программе полностью используются фонд рабочего времени и выделяемое количество древесины, а стекла потребуется 22,5 $м^2$. Сумма реализации при данной программе составит: $20\times85+25\times15=2075$ руб.

Эта сумма, как видим, выше, чем при первоначальной программе. Примененный метод позволяет утверждать, что это вообще максимальная реализация, которую можно обеспечить