Б. М. ЩИГОЛЕВ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА НАБЛЮДЕНИЙ

*Допущено
Министерством высшего образования СССР
в качестве учебного пособия
для механико-математических
и физико-математических
факультетов университетов*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1960

14-5-2

Щиголев Борис Михайлович

Математическая обработка наблюдений

Редактор *П. Т. Резниковский*

Техн. редактор *С. С. Гаврилов* Корректор *Г. Г. Желтова*

Сдано в набор 30/X 1959 г. Подписано к печати 26/I 1960 г. Бумага $60\times92\,^1/_{16}$.
Физ. печ. л. 21,50. Условн. печ. л. 21,50. Уч.-изд. л. 22,28. Тираж 6500 экз.
Т-01015. Цена книги 8 р. 70 к. Заказ 841.

Государственное издательство физико-математической литературы.
Москва, В-71. Ленинский проспект, 15.

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УПП Ленсовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

СОДЕРЖАНИЕ

ЧАСТЬ III

СВЕДЕНИЯ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ЧАСТЬ IV

ОСНОВЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ОШИБОК ИЗМЕРЕНИЙ (СПОСОБ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ)

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга написана по программе курса «Математическая обработка наблюдений» для студентов астрономической специальности механико-математических и физико-математических факультетов университетов. При составлении книги был использован опыт чтения курса в МГУ. В течении семестра студенты обычно успевают прослушать материал, включенный в программу. В книгу включен также дополнительный материал, не входящий в программу; его можно предложить студентам для самостоятельного изучения или включить в курс, если число часов может быть увеличено.

Программа курса несколько шире его названия, так как в него включены не только задачи, связанные с обработкой наблюдений в тесном смысле, но и задачи приближенных вычислений, которые не всегда оказываются задачами обработки наблюдений, хотя их и приходится решать именно в связи с ней. Достаточно указать, например, на точечное интерполирование по таблицам функции, если значения функции вычислёны по ее определению (например, с помощью ряда). Такого рода задачи также включены в книгу.

Название «Математическая обработка наблюдений» в подобном расширенном смысле укоренилось, и вряд ли есть надобность менять его.

Задачи, рассмотренные в этой книге применительно к потребностям астрономии, приходится весьма часто решать в самых разнообразных отделах естествознания и техники. Поэтому автор надеется, что книга или по крайней мере некоторые ее части будут полезны не только астрономам.

Книга подразделена на части и главы.

Нумерация глав и параграфов в книге сквозная. Для формул выбрана двойная нумерация: формула (16.10) будет десятой по порядку в главе 16.

В конце книги приведен небольшой список литературы — в основном учебные пособия и руководства. Список составлен применительно к частям книги.

Автор считает своей приятной обязанностью поблагодарить сотрудников кафедры небесной механики МГУ Е. М. Славцеву и А. И. Рыбакова за помощь при подготовке рукописи к печати.

Автор будет очень благодарен читателям за указания на недостатки книги; просьба посылать такие указания по адресу: Москва, В-234, МГУ, Астрономическая обсерватория.

Б. М. Щиголев

ВВЕДЕНИЕ

Основой всего естествознания являются *наблюдения* и *эксперименты*. Особое значение имеют наблюдения и эксперименты, дающие числа — *результаты измерений*. Надлежащая обработка таких чисел приводит к теоретическому осмысливанию результатов наблюдений и к конечной цели естествознания — установлению законов явлений, позволяющих предсказывать ход интересующих нас явлений на будущее.

Все результаты измерений содержат ошибки различного происхождения. Поэтому результаты вычислений с числами, результатами измерений, также содержат ошибки. Очень существенно для практики уметь оценивать как ошибки самих результатов измерений, так и результатов действий над ними, ибо только в этом случае можно с достаточной уверенностью пользоваться выводами из наблюдений. Не менее важна такая организация вычислений и наблюдений, которая обеспечивает по возможности малую ошибку результата. Все сведения о линейных размерах в солнечной системе, в Галактике и т. д. опираются в конечном счете на прямые измерения сравнительно малых величин на поверхности Земли. Эти величины содержат ошибки. Чтобы получить сведения о размерах в солнечной системе, и тем более в Галактике, приходится эти величины умножать на большие числа; ошибки измерений при этом также умножаются и приводят к большим ошибкам результатов. Из этих кратких замечаний ясно, что обработка результатов наблюдений не может выполняться любым способом. Чтобы результаты содержали возможно меньшие ошибки, должны быть разработаны как методы оценок ошибок, так и методы вычислительной работы, обеспечивающие возможно более точные результаты.

Выше шла речь об обработке наблюдений в узком смысле, когда производятся действия над числами, непосредственно получаемыми из наблюдений. Однако при построении теории явления и вычислении величин, непосредственно не наблюдаемых, но выводимых путем обработки наблюдений, приходится пользоваться разными математическими приемами, в частности, широко использовать различные функциональные зависимости.

Как известно, функция может быть определена разными способами. В простейшем случае указывается, какие арифметические действия нужно произвести над значением аргумента (или аргументов), чтобы получить значение функции (полиномы, рациональные функции и т. п.). Но функция может быть определена и так, что из определения не видно, как вычислять ее значения (например синус дуги); в подобных случаях определение используется для вывода свойств функции, позволяющих построить бесконечный ряд, который можно считать другим определением функции. Функция может быть определена также интегралом, дифференциальным уравнением и т. п.; каждый из этих способов задания тоже не дает прямых указаний на способ вычисления значения функции по значению аргумента. В подобных случаях приходится либо подыскивать бесконечный ряд, либо прибегать к численным методам решения, которые дают функцию в виде таблицы. В тех случаях, когда функция определена сходящимся бесконечным рядом (обычно степенным), этот ряд используется для составления таблицы значений функции, если эта функция часто встречается в практических задачах. Составление таблицы всегда представляет приближенную операцию, поскольку бесконечный ряд всегда приходится обрывать на том или ином члене. Хотя табличные значения функций не получаются в результате измерений, но и они подобно результатам измерений содержат неизбежные ошибки. Эти ошибки тоже должны оцениваться; необходимо оценивать также и ошибки действий над табличными значениями функций.

Таким образом, есть общие пункты в задачах, связанных с измерениями, и в задачах, в которых используются таблицы функций. Оба типа задач связаны и непосредственно тем, что весьма часто результат измерения является аргументом табличной функции. По этим причинам задачи о действиях над табличными функциями обычно входят в курсы обработки измерений.

Среди ошибок измерений видное место занимают *случайные ошибки*, т. е. такие, величины которых не могут быть указаны до наблюдений. Надо, впрочем, заметить, что они не могут быть указаны и после наблюдений, так как наличие случайных ошибок лишает нас возможности определить точное значение измеряемой величины. Для обработки измерений, содержащих случайные ошибки, должен быть использован аппарат *теории вероятностей*; этот же аппарат необходим и в статистических работах. Чтобы дать возможность студентам пользоваться только одним учебником, с одной стороны, и обеспечить единую систему обозначений, терминологии и т. п., с другой, в курс «Математическая обработка наблюдений» включаются основные сведения по теории вероятностей.

Задачи обработки наблюдений и отчасти связанные с ними задачи приближения функции возникли давно и в первую очередь в связи с задачами астрономии. Впервые вполне четко они были поставлены в работах французского математика Лежандра (1752—1833) и немецкого математика Гаусса (1777—1855).

В разработке теории ошибок и теории приближения функций видную роль играли русские математики П. Л. Чебышев (1821—1894), А. А. Марков (1856—1922), А. М. Ляпунов (1857—1918). Представители советской школы теории вероятностей и конструктивной теории функций С. Н. Бернштейн, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гончаров, А. Н. Колмогоров, В. И. Романовский, А. Я. Хинчин и др. вели и ведут сейчас интенсивную работу в этих областях.

ЧАСТЬ I
ДЕЙСТВИЯ С ПРИБЛИЖЕННЫМИ ЧИСЛАМИ

ГЛАВА I
ОЦЕНКИ ОШИБОК ПРИБЛИЖЕННЫХ ЧИСЕЛ

§ 1. Основные задачи теории приближенных вычислений

В естествознании очень редко приходится иметь дело с *точными* числами. Если астроном исследует движения в тройной звездной системе, то число 3, конечно, является точным. Когда геофизик занимается строением снежинок, то число лучей в каждой отдельной снежинке он тоже определяет точно. Однако число подобных примеров в каждой области естествознания весьма ограничено.

Обычные же результаты измерений всегда являются *приближенными* прежде всего вследствие ограниченной точности измерительных приборов.

Действительно, каждый измерительный инструмент имеет шкалу, на которой промежутки между делениями не могут быть как угодно малыми. Иногда говорят о «пороге чувствительности прибора», подразумевая под этим наименьшую величину, изменение на которую еще регистрируется прибором. Если, например, круг, предназначенный для измерения углов, имеет деления через $10'$ и нониус, дающий $1'$, то можно считать порогом чувствительности этого прибора $1'$, поскольку изменение угла на $1'$ будет отмечено прибором, а изменение на величину, меньшую $1'$, может быть зарегистрировано, но не поддается точному определению. Если измерительный указатель инструмента попадает между двумя делениями, то десятые доли промежутка еще могут быть отсчитаны либо на глаз, либо с помощью нониуса. Таким образом, можно только утверждать, что ошибки измерения меньше половины или одной десятой промежутка между делениями шкалы. Это утверждение будет верным, если нет других источников ошибок, кроме ошибки, зависящей от ограниченной точности измерительного инструмента или прибора.

Есть довольно много измерений, особенно лабораторных, при которых можно указать верхнюю границу абсолютной величины модуля ошибки измерения. Ниже мы будем рассматривать именно такие случаи. Впрочем, независимо от фактической возможности надежно определить эту верхнюю границу, всегда можно допустить ее существование. Действительно, поскольку точное числовое значение измеряемой величины существует как объективная реальность, не зависящая от нас, а измерение дает, вообще говоря, какое-то другое значение, то ошибка всегда ограничена. Мы будем в этом разделе книги предполагать, что имеем дело с приближенными числами, содержащими ошибки любого происхождения, но такими, что можно указать верхнюю границу модуля ошибки.

Первой задачей теории приближенных вычислений будет установление способов оценки ошибок.

Почти всегда приходится производить арифметические (или иные) действия над приближенными числами. Естественно, что результаты таких действий будут тоже приближенными. Отсюда возникает вторая задача — оценить ошибку операции над приближенными числами, если известны оценки ошибок исходных чисел. Эту задачу можно назвать *прямой* задачей теории. Если такая задача решена в буквенном виде, то могут быть поставлены еще две очень важные задачи:

1) *обратная* задача — определение необходимой точности заданных чисел для обеспечения заданной точности результата действий;

2) выяснение условий измерений или вычислений, при которых погрешность результата действий будет по возможности меньшей. При этом под условиями подразумевается либо выбор положений, в которых производятся измерения, либо выбор формул для вычислений.

§ 2. Точная ошибка приближенного числа

Предположим, что некоторая величина (например, угол) имеет определенное числовое значение A, остающееся неизменным во время процесса измерения. Предположим также, что сделанное измерение этой величины дает значение a.

Точной ошибкой Δ_a приближенного числа a назовем разность между точным и приближенным значениями:

$$A - a = \Delta_a. \qquad (1.1)$$

Введенное определение удобно тем, что понятие точной ошибки совпадает с понятием *поправки*, ибо

$$A = a + \Delta_a, \qquad (1.2)$$

т. е. точная ошибка есть число, которое нужно прибавить к приближенному, чтобы получить точное значение *).

*) Вместо точной ошибки иногда вводят понятие *абсолютной ошибки.* Абсолютной ошибкой $|\Delta|_a$ приближенного числа a называют модуль разности между точным и приближенным значениями величины:

$$|\Delta|_a = |A - a|.$$

Мы не будем пользоваться этим понятием.

Введение понятия «точная ошибка» имеет только теоретическое значение, так как эта ошибка в обычных задачах не может быть фактически определена. Можно отметить только исключительные случаи, когда для исследования точности измерений некоторым методом или с помощью какого-либо прибора производят то же измерение с точностью, значительно бо́льшей, чем исследуемое измерение (например, прецизионными приборами). Хотя это последнее измерение дает тоже ошибку, но в этом случае можно принять, что второе измерение дает формально точное значение и определить «точную» ошибку первого измерения, ограничиваясь некоторым количеством знаков.

Пусть, например, измерение угла теодолитом с точностью до $1'$ дало $38°43'$. Измерим тот же угол универсалом с предельной погрешностью $5''$; предположим, результат получился $38°43'25''$. Считая формально второе значение точным, можно сказать, что точная ошибка равна $0',4$, хотя в действительности это только приближенное значение точной ошибки.

Мы будем в дальнейшем полагать, что величина $|\Delta_a|$ настолько мала по сравнению с $|a|$, что степенями Δ_a выше первой можно пренебрегать. Если будут рассматриваться одновременно несколько приближенных чисел a, b, ..., то произведениями вида $\Delta_a\Delta_b$ мы также будем пренебрегать.

§ 3. Предельная абсолютная погрешность

Как было сказано в § 1, в исключительных случаях можно определить точную ошибку приближенно в том смысле, что ошибка этого определения гораздо меньше по модулю, чем ошибка основного измерения. Во многих случаях легче определить верхнюю границу модуля точной ошибки.

Назовем *предельной абсолютной погрешностью* ε_a приближенного числа a наименьшее положительное число, содержащее одну-две значащие цифры, которое больше или равно модулю точной ошибки, т. е.

$$\varepsilon_a \geqslant |\Delta_a|. \tag{1.3}$$

Это определение требует пояснения. По бо́льшей части нетрудно найти положительное число, заведомо бо́льшее модуля точной ошибки; его и можно было бы принять за предельную абсолютную погрешность. Если таких чисел можно найти несколько, то по определению, должно быть выбрано наименьшее. Иногда бывает выгодно заменить принятое значение предельной абсолютной погрешности другим, более простым, т. е. имеющим меньше значащих цифр. В таких случаях можно только увеличивать принятое первоначально значение.

Если известна предельная абсолютная погрешность, то для точного значения A можно записать очевидное неравенство

$$a - \varepsilon_a \leqslant A \leqslant a + \varepsilon_a\ ^{*}). \qquad (1.4)$$

Отметим частный случай, когда предельная абсолютная погрешность числа определяется его записью в десятичной системе. Каждое приближенное число, записанное в десятичной системе счисления, имеет ограниченное число значащих цифр, зависящее от точности измерений или вычислений. Если, например, измеряется длина линейкой с делениями через миллиметр и нониусом, дающим десятые доли, то длина в сантиметрах будет содержать целые сантиметры, десятые и сотые доли сантиметра. По характеру процесса такого измерения можно утверждать, что модуль ошибки измерения меньше 0,01 *см*, если при пользовании нониусом всегда отмечают меньшее (или бóльшее) деление нониуса, когда конец отрезка не совпадает точно ни с одним делением нониуса (обычный случай). При таком способе измерения можно указать и знак точной ошибки, ибо приближенное значение наверно меньше (или, соответственно, больше) точного значения. Этот способ измерения можно назвать *измерением без округления* по аналогии с соответствующей вычислительной операцией.

Измерение с округлением в нашем примере будет заключаться в том, что ищут деление нониуса, ближайшее к концу измеряемого отрезка, и записывают соответствующую цифру сотых долей. Точная ошибка равняется расстоянию принятого деления нониуса от конца отрезка; при измерении с округлением модуль этого расстояния не превышает половины расстояния между делениями нониуса, которое равняется 0,01 *см*.

Таким образом, если результат измерения ограничивается сотыми долями сантиметра и измерение производится без округления, то за предельную абсолютную погрешность измерения следует принять 0,01 *см*, если же при измерении делается округление, то за предельную абсолютную погрешность нужно принять $\frac{1}{2} \cdot 0{,}01$ *см*. Эти выводы справедливы для любых приближенных чисел.

Если приближенное число записано в десятичной системе счисления, то по общепринятому соглашению предельная абсолютная погрешность принимается равной единице последнего знака, если число получено без округления, и половине единицы последнего знака, если число получено с округлением. Последним знаком считается первый справа. Если имеются другие сведения о предельной

*) Заметим, что предлагаемая иногда условная запись

$$A = a \pm \varepsilon_a$$

нецелесообразна, так как подобная запись давно введена в теории случайных ошибок и имеет другой смысл.

абсолютной погрешности, то они должны быть указаны и при операциях надо руководствоваться ими, а не соглашением.

Указанное выше соглашение используется не только в случаях, когда приближенное число получено в результате измерения, но также и в тех случаях, когда приближенное число получается вычислением, и у него отбрасывают несколько знаков справа. Простейший пример такого рода — обращение простой дроби в десятичную с сохранением определенного числа знаков после запятой.

Если знаки просто отбрасываются (в случае десятичной дроби) или заменяются нулями (в целом числе), то по указанному правилу за предельную абсолютную погрешность принимается единица последнего знака. Под «последним» подразумевается знак, за которым направо ничего нет, как в десятичной дроби, либо стоят нули, если число целое *). При простом отбрасывании получаем приближенное значение с точностью до единицы последнего знака *с недостатком*, т. е. меньшее, чем исходное. Можно бы было условиться всегда увеличивать последнюю значащую цифру на единицу, тогда предельная абсолютная погрешность будет тоже равна единице последнего знака, но приближенное значение получалось бы *с избытком*, т. е. больше заданного числа.

Пример 1. Известно, что можно принять $\pi = 3{,}1416$. Пусть в организуемых вычислениях достаточно иметь два знака после запятой; тогда принимаем $\pi = 3{,}14$ (или $\pi = 3{,}15$) и $\varepsilon_\pi = 0{,}01$. Если неизвестно происхождение приближенного значения этого числа, то можно только утверждать, что

$$3{,}13 \leqslant \pi \leqslant 3{,}15;$$

если же известно, что число с недостатком, то левая граница будет 3,14.

Пример 2. Экваториальный радиус Земли R приближенно равен 6384 *км*. Предположим, что мы хотим заменить это число числом с двумя значащими цифрами. Если только отбрасывать знаки, которые мы считаем лишними, то можно взять $R = 6300$ *км* с недостатком или $R = 6400$ *км* с избытком; в обоих случаях $\varepsilon_R = 100$ *км*.

---

*) Следует иметь в виду возможность некоторой путаницы в способе определения предельной погрешности. Поясним это на простом примере.

Пусть длина, измеренная прецизионным прибором и выраженная в сантиметрах, равна 3,5003. Если достаточно иметь три знака после запятой, то следует принять длину равной 3,500 *см*, и ни одного нуля нельзя отбросить (в отличие от правил точной арифметики). Действительно, по указанному выше соглашению при нашей записи предельная погрешность равна $\frac{1}{2}\cdot 10^{-3}$ *см*, при отбрасывании же одного нуля она была бы равна $\frac{1}{2}\cdot 10^{-2}$ *см*. Здесь и нули справа — значащие цифры.

Пусть та же длина измерена линейкой, разделенной на *мм*, тогда получится 3,5 *см* с предельной погрешностью $\frac{1}{2}\cdot 10^{-1}$ *см*. По формальным правилам арифметики в этом случае тоже можно написать 3,500 *см*, но это не изменит оценки ошибки, если только известно, как производилось измерение.