

А. С. ВОЛЬМИР

НЕЛИНЕЙНАЯ
ДИНАМИКА
ПЛАСТИНОК
И ОБОЛОЧЕК

А. С. ВОЛЬМИР

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ПЛАСТИНОК И ОБОЛОЧЕК



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1972

Нелинейная динамика пластинок и оболочек, Вольмир А. С., Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1972 г., 432 стр.

В первой части книги излагается общая нелинейная теория динамики пластинок и оболочек на основе гипотезы Кирхгофа — Лява, а также модели типа Тимошенко. Далее исследуются собственные, вынужденные, параметрические колебания и автоколебания тонкостенных систем; в вводных разделах приведены данные для практических расчетов, основанные на линеаризованных зависимостях. Вторая часть книги посвящена поведению пластинок и оболочек при действии быстро изменяющихся во времени и ударных нагрузок с учетом процесса распространения волн деформации. Рассмотрены упругие и упруго-пластические задачи. Приведены результаты экспериментов.

Илл. 263, табл. 4, библиограф. ссылок 560.

Арнольд Сергеевич Вольмир

Нелинейная динамика пластинок и оболочек

М., 1972 г., 432 стр. с илл.

Редактор *И. Г. Кильдибеков*

Техн. редактор *К. Ф. Брудно*

Корректор *И. Я. Кристаль*

Сдано в набор 18/IV 1972 г. Подписано к печати 31/X 1972 г. Бумага 60×90/16, тип. № 1.
Физ. печ. л. 27. Условн. печ. л. 27. Уч.-изд. л. 27,65. Тираж 5700 экз. Т-16842.
Цена книги 1 р. 98 к. Заказ № 142

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Государственного комитета Совета Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли. Измайловский проспект, 29.

СГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
Глава I. Общие зависимости нелинейной теории оболочек	9
§ 1. Классификация динамических задач нелинейной теории пластинок и оболочек	9
§ 2. Некоторые сведения об оболочках	10
§ 3. Описание моделей оболочки	13
§ 4. Деформации и перемещения	16
§ 5. Напряженное состояние. Связь между усилиями и деформациями	21
§ 6. Приближенные уравнения движения	24
§ 7. Уравнения в перемещениях	27
§ 8. Граничные и начальные условия	30
§ 9. Модель оболочки с учетом сдвига и инерции вращения. Деформации и перемещения	31
§ 10. Напряженное состояние с учетом поперечного сдвига	34
§ 11. Вариационное уравнение	37
§ 12. Переход к уравнениям в перемещениях и граничным условиям	42
§ 13. Некоторые варианты динамических уравнений	45
§ 14. Более полные соотношения между деформациями и перемещениями	52
§ 15. Уравнения движения	60
§ 16. Оболочки за пределами упругости	65
Глава II. Собственные нелинейные колебания	72
§ 17. Свойства собственных нелинейных колебаний	72
§ 18. Прямоугольная пластинка, шарнирно опертая по краям. Линеинная задача	74
§ 19. Нелинейная задача. Метод Бубнова — Галеркина	75
§ 20. Защищенная по краям пластинка	82
§ 21. Метод гармонического баланса	86
§ 22. Метод возмущений	87
§ 23. Точное решение	89
§ 24. Случай весьма длинной пластинки. Применение метода Бубнова — Галеркина	92
§ 25. Приложение метода конечных разностей	94
§ 26. Влияние усилий в срединной поверхности на собственные колебания пластинки	97
§ 27. Эффект начальных неправильностей	100
§ 28. Замкнутая цилиндрическая оболочка. Линейная задача	102
§ 29. Замкнутая цилиндрическая оболочка. Нелинейная задача	111
§ 30. Удлиненная цилиндрическая панель. Метод Бубнова — Галеркина	116

§ 31. Удлиненная цилиндрическая панель. Метод конечных разностей	118
§ 32. Круговая цилиндрическая панель с конечным отношением сторон	124
§ 33. Случай панели с искривляющимися кромками в плане. Уточненное решение	127
§ 34. Случай панели двоякой кривизны	132
§ 35. Пологая сферическая панель. Решение методом прямых	136
§ 36. Описание колебаний сферической панели	140
Глава III. Вынужденные колебания	142
§ 37. Характер вынужденных нелинейных колебаний пластинок и оболочек	142
§ 38. Колебания пластинки	144
§ 39. Замкнутая цилиндрическая оболочка	149
§ 40. Случай цилиндрической панели	153
§ 41. Экспериментальные данные по нелинейным колебаниям и устойчивости подкрепленных панелей в акустическом поле	154
§ 42. Сферическая панель	158
Глава IV. Параметрические колебания	161
§ 43. Особенности параметрических колебаний	161
§ 44. Параметрические колебания пластинок	162
§ 45. Замкнутая цилиндрическая оболочка при пульсирующем внешнем давлении	168
§ 46. Поведение цилиндрической панели при пульсирующей сжимающей нагрузке	170
§ 47. Характеристика резонансов в нелинейных системах	173
Глава V. Автоколебания	175
§ 48. Основные понятия	175
§ 49. Нелинейный флаттер пластинки	176
§ 50. Экспериментальные исследования флаттера пластинок	178
§ 51. Квазистатическая задача для замкнутой цилиндрической оболочки	179
§ 52. Динамическая линейная задача для замкнутой цилиндрической оболочки	182
§ 53. Уточненное решение линейной динамической задачи	187
§ 54. Неустановившийся флаттер цилиндрической оболочки	188
§ 55. Нелинейный флаттер замкнутой цилиндрической оболочки	192
§ 56. Флаттер цилиндрической оболочки с бегущей в окружающем направлении волной	193
§ 57. Дивергенция и флаттер цилиндрической оболочки с учетом пограничного слоя	195
§ 58. Флаттер цилиндрической оболочки при изменяющемся давлении в набегающем потоке	201
§ 59. Экспериментальное исследование флаттера замкнутых цилиндрических оболочек	203
§ 60. Экспериментальное исследование поведения цилиндрических панелей в сверхзвуковом потоке газа	205
Глава VI. Критерии динамической устойчивости оболочек и пластинок	212
§ 61. Основные определения	212
§ 62. Различные виды импульсных нагрузок	215
§ 63. Понятия динамической критической нагрузки и динамического коэффициента	217
§ 64. Другие возможные подходы к задаче	218

Глава VII. Выпучивание оболочек и пластинок при динамическом нагружении	221
§ 65. Постановка задачи. Исходные уравнения	221
§ 66. Поведение пластинок при динамическом сжатии	221
§ 67. Влияние формы импульса на поведение пластинки	226
§ 68. Динамическое выпучивание пластинок при сдвиге	228
§ 69. Выпучивание цилиндрических оболочек при динамическом нагружении. Основные понятия	231
§ 70. Цилиндрические оболочки при динамическом приложении осевого сжатия	233
§ 71. Цилиндрические оболочки при внешнем давлении	238
§ 72. Экспериментальные данные	243
§ 73. Эффект внутреннего давления	247
§ 74. Анизотропные цилиндрические оболочки при внешнем давлении	250
§ 75. Анизотропные конические оболочки при осевом нагружении	257
§ 76. Цилиндрическая панель при динамическом сжатии	263
§ 77. Сферическая панель при динамическом приложении внешнего давления	267
§ 78. Подкрепленные пологие оболочки положительной кривизны	270
§ 79. Цилиндрическая оболочка при быстром нагреве	275
§ 80. Пластическое течение при динамическом выпучивании оболочек	282
§ 81. Анализ процесса пластического выпучивания. Результаты экспериментов	286
Глава VIII. Поведение оболочек при ударе	288
§ 82. Особенности задач о поведении оболочек при ударном нагружении	288
§ 83. Стержень при продольном ударе	289
§ 84. Выпучивание стержня с начальной погибью	291
§ 85. Различные подходы к задаче. Экспериментальные данные	296
§ 86. Цилиндрическая оболочка при продольном ударе	299
§ 87. Случай неосесимметричного выпучивания	304
§ 88. Данные опытов по ударному нагружению оболочек	306
§ 89. Упруго-пластическое выпучивание оболочек при ударе	308
§ 90. Коническая оболочка при продольном ударе	315
§ 91. Двухслойная оболочка. Общие зависимости	318
§ 92. Решение задачи о поведении двуслойной оболочки	325
§ 93. Выпучивание цилиндрических оболочек при тепловом ударе	329
Глава IX. Поведение пластинок и оболочек при действии подвижной нагрузки	334
§ 94. Общие положения. Понятие критической скорости движения нагрузки	334
§ 95. Решение линеаризованной задачи	336
§ 96. Замкнутая цилиндрическая оболочка при действии подвижной волны давления. Применение метода Бубнова — Галеркина	340
§ 97. Решение задачи с помощью метода конечных разностей	344
§ 98. Применение метода конечных разностей к уравнениям в перемещениях	346
§ 99. Поведение пологой цилиндрической панели при действии подвижной нагрузки	348
§ 100. Особенности поведения нелинейной системы при подвижной нагрузке	350
§ 101. Поведение цилиндрической панели при действии подвижных пульсирующих скачков давления	352

§ 102.	Экспериментальное исследование поведения оболочек при действии подвижных волн давления	355
§ 103.	Поведение замкнутых цилиндрических оболочек, обтекаемых кратковременным потоком газа	359
§ 104.	Экспериментальное исследование поведения оболочек при подвижных пульсирующих скачках давления	362
Глава X.	Задачи статистической динамики	364
§ 105.	Характеристика задач и методов исследования	364
§ 106.	Пластика в акустическом поле. Закон распределения прогиба	367
§ 107.	Распределение экстремумов прогиба для пластинки	373
§ 108.	Акустические колебания цилиндрической оболочки. Модель системы со многими степенями свободы	374
§ 109.	Цилиндрическая панель. Вероятностные параметры прогиба	378
§ 110.	Плотность вероятности экстремумов прогиба для системы с прощелкиванием	381
§ 111.	Трактовка узкополосного процесса для системы с прощелкиванием	383
§ 112.	Описание напряженного состояния панели. Плотность вероятности напряжений	386
§ 113.	Закон распределения экстремумов напряжений для системы с прощелкиванием. Анализ возможных циклов	391
§ 114.	Пологая оболочка	397
§ 115.	Задачи для дальнейших исследований	404
Литература		403

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга посвящена нелинейным динамическим задачам теории пластинок и оболочек.

На протяжении трех последних десятилетий внимание авторов, занимавшихся теорией тонких пластинок и оболочек, было привлечено главным образом к задачам *статики*. Сюда относятся известные работы по методам сведения статической трехмерной теории твердых деформируемых тел к двумерной, по статической устойчивости оболочек в малом и большом, по медленно развивающейся ползучести пластинок и оболочек и т. д. Хотя эти проблемы далеко нельзя считать решенными, накопленные в литературе теоретические и экспериментальные данные позволяют уже теперь с достаточной уверенностью вести практические расчеты многих реальных конструкций.

В настоящее время центр исследований по теории пластинок и оболочек перемещается в область *динамики*. Это объясняется прежде всего запросами авиационной и космической техники; напомним, что именно эти области вызвали тот значительный прогресс в теории оболочек, свидетелями которого мы являемся. Однако изучение динамического поведения конструкций имеет существенное значение также для судостроения, инженерных сооружений и т. д.

Наиболее опасным для тонкостенных конструкций типа оболочек является сочетание статических нагрузок с разного типа динамическими воздействиями. Такие комбинированные нагрузки особенно часто влекут за собой прощелкивания (хлопки) оболочки, во многих случаях чередующиеся одно за другим и приводящие к образованию усталостных трещин. Разрушение конструкции наступает при этом иногда за весьма короткий срок.

Описание процесса прощелкивания оболочки может быть выполнено лишь с позиций *геометрически нелинейной* теории. Но исчерпание несущей способности оболочек нередко связано с накоплением пластических деформаций, поэтому важным является изучение и *физически нелинейных* систем. Таким образом, нелинейные задачи динамики пластинок и оболочек представляют большой практический интерес.

До последнего времени нелинейная динамика пластинок и оболочек была сравнительно мало освещена в литературе. Ниже изложены данные теоретических и экспериментальных исследований в этой области, полученные на протяжении последних лет

автором и его сотрудниками. Наряду с этим сделана попытка систематизировать имеющуюся литературу и привести такие результаты, которые могут быть непосредственно использованы в практических расчетах.

Книга делится на десять глав.

Глава I содержит основные уравнения динамической теории пластинок и оболочек большого прогиба. Отметим, что общей нелинейной теории оболочек был посвящен в последние тридцать лет ряд фундаментальных исследований. Анализ этих работ выходит за рамки данной книги. В первой главе представлены лишь те математические модели, которые используются в дальнейшем при решении конкретных задач.

В главах II—V исследуются различные виды колебательных движений пластинок и оболочек. Отдельные конкретные задачи, относящиеся к собственным и вынужденным колебаниям, представлены здесь, по-видимому, впервые. В некоторых случаях мы отказываемся от обычной модели в виде системы с одной степенью свободы, характерной для большинства предыдущих работ по нелинейным колебаниям упругих систем. В разделе, относящемся к автоколебаниям, основное внимание уделено новым данным по панельному флаттеру.

Главы VI—IX посвящены описанию поведения тонкостенных систем при динамическом нагружении. Сюда относится анализ деформации пластинок и оболочек при быстром и весьма быстром, ударном, воздействии нагрузок различного характера.

Наконец, в главе X изложены некоторые задачи динамики оболочек и пластинок, требующие статистического подхода.

Данная книга примыкает к предыдущим монографиям автора: «Гибкие пластинки и оболочки» (Москва, 1956 г.) и «Устойчивость деформируемых систем» (Москва, 1967 г.). Автор стремился к тому, чтобы по возможности избежать повторений; ниже без вывода приведены многие соотношения со ссылкой на книги 1956 и 1967 гг. Это особенно относится к главам книги VI—VIII и X, тесно связанным с соответствующими разделами монографии «Устойчивость деформируемых систем». Библиография по этим главам относится к литературе, опубликованной главным образом после 1967 г.

Нумерация формул и иллюстраций дана по главам; в ссылке на формулы внутри глав номера их опущены.

Рукопись книги была внимательно просмотрена Л. И. Балабухом, сделавшим ряд ценных указаний. Большой труд по редактированию рукописи был выполнен И. Г. Кильдибековым. Автор искренне благодарит их, а также всех лиц, оказавших ему помощь при подготовке отдельных разделов книги.

А. С. Вольмир

И то, что носится в колеблющихся
очертаньях,
Пусть закрепится в прочных мыслях.
Гёте, «Фауст».

ГЛАВА I

ОБЩИЕ ЗАВИСИМОСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

§ 1. Классификация динамических задач нелинейной теории пластинок и оболочек

На протяжении последних десятилетий теория оболочек, являющаяся естественным продолжением и обобщением теории пластинок, получила широкое развитие. В монографиях В. З. Власова [1.10], А. Л. Гольденвейзера [1.13], Н. А. Кильчевского [1.15], А. И. Лурье [1.18], Х. М. Муштари и К. З. Галимова [1.21], В. В. Новожилова [1.22], А. Лява [1.32], С. П. Тимошенко [1.38] содержатся основные зависимости современной теории оболочек; в них дано также решение многих конкретных примеров. Но в этих книгах рассмотрены главным образом *статические* задачи. Между тем в настоящее время все более актуальными становятся задачи о *динамическом* поведении пластинок и оболочек. Сюда относятся исследования *периодических* или близких к периодическим *колебаний* тонкостенных конструкций, включающих пластинки и оболочки, и их *неустановившейся деформации* при быстром и ударном нагружении.

Изучение колебаний оболочек было начато еще Рэлеем в его «Теории звука». В последнее время труды в этой области опубликованы Н. А. Алумяз, Л. И. Балабухом, В. В. Болотным, Э. И. Григолюком и другими авторами. В имеющейся литературе речь идет, как правило, о *малых колебаниях упругих оболочек*, когда соотношения между деформациями и перемещениями, с одной стороны, и деформациями и усилиями, с другой, могут быть приняты линейными. Правда, и в такой постановке подобные задачи оказываются весьма трудными. Если малые колебания *пластинок* сопровождаются лишь появлением напряжений собственно изгиба, то в случае *оболочки* к ним присоединяются цепные напряжения. В зависимости от очертания оболочки и условий закрепления мы получаем тот или иной спектр частот и форм колебаний. Для одних видов колебаний

оказываются преобладающими изгибные усилия, для других — цепные. Характер напряженного состояния при колебаниях может сильно меняться вдоль главных размеров оболочки по мере удаления от края.

Особый раздел теории колебаний представляет собой исследование нелинейных колебаний, имеющих важные специфические свойства. Такого рода движения могут возникать в пластинках и оболочках при больших перемещениях, когда деформации и перемещения связаны нелинейными соотношениями. С другой стороны, деформации могут лежать за пределами применимости закона Гука и нелинейно зависеть от усилий.

В настоящей книге мы будем интересоваться именно *нелинейными колебаниями* пластинок и оболочек. Эта область представляет собой одну из частей общей нелинейной механики твердых деформируемых тел, или, в более широких рамках, нелинейной механики сплошных сред.

Второй круг вопросов, изучаемый в этой книге и получающий все более широкие практические приложения, относится к поведению пластинок и оболочек при *импульсных воздействиях*. В то время как при рассмотрении периодических колебаний может идти речь о некотором *установившемся* движении системы, в задачах о динамическом нагружении наибольшее внимание привлекают неустановившиеся, *переходные*, процессы. Такой процесс заключается обычно в скачкообразном переходе — перескоке системы от установившегося движения одного типа к некоторому другому движению. Подобное явление особенно характерно для оболочек и носит название *хлопка* или *прощелкивания*. Хлопок оболочки сопровождается, как правило, значительными перемещениями. Поэтому изучение поведения пластинок и оболочек при импульсных воздействиях будет достаточно полным лишь в том случае, если оно ведется для больших прогибов, с позиций нелинейной теории. Впрочем, в некоторых примерах начальная стадия переходного процесса может быть исследована и с помощью линеаризованных зависимостей.

Обратимся к исходным соотношениям динамики пластинок и оболочек.

§ 2. Некоторые сведения об оболочках

В дальнейшем мы будем исследовать *тонкие оболочки* — тела, одно из измерений которых (толщина оболочки) значительно меньше двух других. Толщину оболочки мы будем, как правило, предполагать постоянной. Поверхность, делящая пополам толщину оболочки, называется срединной поверхностью. В случае, если срединная поверхность представляет собой плоскость, мы получим *тонкую пластинку*.

Оболочки могут быть классифицированы по очертанию срединной поверхности. Простейшими примерами служат цилиндрические (рис. 1.1, а) или конические (рис. 1.1, б) оболочки

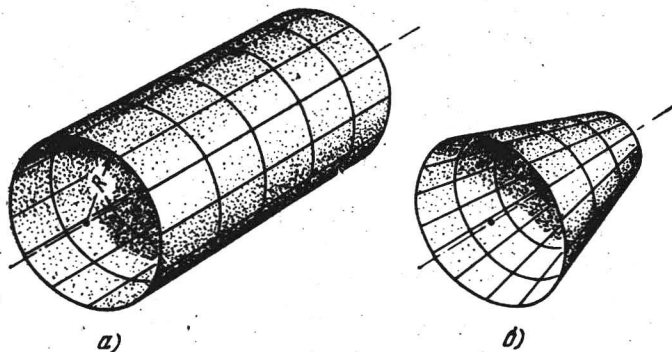


Рис. 1.1. Отрезок замкнутой круговой оболочки: а) цилиндрической, б) конической.

с круговым поперечным сечением. На рисунках отмечены прямые линии, расположенные вдоль длины оболочки — меридианы, и окружности поперечных сечений — параллели. Проведем нормаль к срединной поверхности N , а затем различным образом ориентированные плоскости, содержащие N (рис. 1.2). В пересечении этих плоскостей с поверхностью мы получим кривые линии — нормальные сечения срединной поверхности. Для характеристики поверхности важно определить в каждой ее точке наибольший и наименьший радиусы кривизны этих сечений. Легко видеть, что наибольшим радиусом кривизны будут в обоих случаях обладать меридианы: центры кривизны для них будут лежать на бесконечности. Если же провести плоскости, нормальные к меридиональным, то полученные таким образом линии будут иметь наименьший радиус кривизны. Соответствующие центры кривизны будут расположены в точках пересечения нормали с осью симметрии. Для круговой цилиндрической оболочки наименьший радиус кривизны совпадает с радиусом поперечного сечения.

Третий пример оболочки простейшей формы — сферическая оболочка. Здесь радиусы кривизны всех нормальных сечений равны между собой.

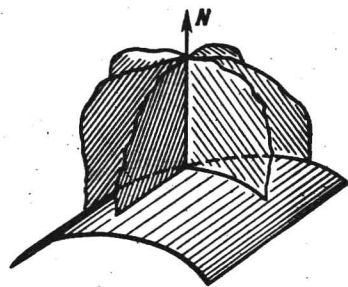


Рис. 1.2. Нормальные сечения срединной поверхности оболочки.

Приведенные выше примеры оболочек являются частными случаями оболочек вращения. На рис. 1.3 показано сечение меридиональной плоскостью срединной поверхности оболочки вращения произвольной формы. Изобразим и на этом рисунке нормаль N ; на ней будут лежать центры кривизны нормальных сечений.

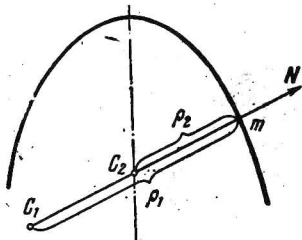


Рис. 1.3. Центры кривизны нормальных сечений оболочки вращения.

Пусть центр кривизны линии меридиана лежит в точке C_1 ; центр кривизны сечения плоскостью, нормальной к меридиональной, будет находиться в точке C_2 пересечения нормали с осью симметрии. Обозначим соответствующие радиусы кривизны через ρ_1 и ρ_2 . Можно показать, что один из них является наибольшим, а другой — наименьшим по сравнению с радиусами кривизны всех нормальных сечений, проходящих через данную точку m . Направления этих двух нормальных сечений с экстремальными свойствами определяют для точки m так называемые **главные направления**. Если теперь провести линии, касательные

к которым будут в каждой точке срединной поверхности совпадать с главными направлениями, то мы получим так называемые **линии кривизны**. Для оболочки вращения линиями кривизны будут меридианы и параллели.

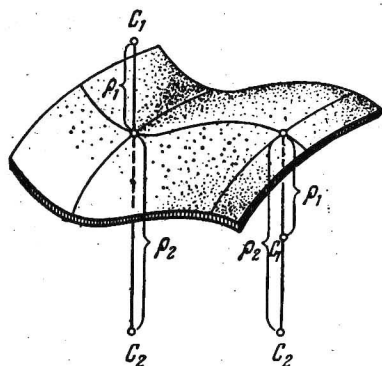


Рис. 1.4. Отрезки оболочки отрицательной кривизны (слева) и положительной кривизны (справа).

к которым будут в каждой точке срединной поверхности совпадать с главными направлениями, то мы получим так называемые **линии кривизны**. Для оболочки вращения линиями кривизны будут меридианы и параллели.

В самом общем случае оболочки произвольной конфигурации можно таким же образом установить в каждой точке срединной поверхности главные направления и соответствующие главные радиусы кривизны ρ_1 и ρ_2 (рис. 1.4). Если центры кривизны C_1 и C_2 лежат по одну сторону

от срединной поверхности, то условимся придавать радиусам ρ_1 и ρ_2 одинаковый знак, а в противном случае — разные знаки.

Произведение главных кривизн $k_1 = 1/\rho_1$ и $k_2 = 1/\rho_2$ для данной точки носит название **гауссовой кривизны** поверхности (или короче — **кривизны поверхности**): $\Gamma = k_1 k_2$; полусумма — **средней кривизны**: $k = 1/2(k_1 + k_2)$. Цилиндрическая и коническая оболочки имеют срединную поверхность **нулевой** кривизны. Сферическая оболочка имеет положительную кривизну.

Если же обратиться к тороидальной оболочке (рис. 1.5), то в одной части поверхности она будет иметь положительную кривизну (точка A), а в другой — отрицательную (точка B).

Оболочки и пластинки находят на протяжении последних десятилетий все большее распространение в технике. Корпус космического корабля представляет собой конструкцию, состоящую из оболочек вращения различного вида — цилиндрических, конических, сферических. Фюзеляж самолета можно рассматривать в целом — вместе с подкрепляющими ребрами — как цилиндрическую оболочку. Крыло самолета также можно представить как оболочку или пластинку, имеющие в различных направлениях разную жесткость. Оболочками являются корпус реактивного двигателя, кузов цельнометаллического вагона, корпус подводной лодки и т. д. Оболочки также часто встречаются в инженерных сооружениях в виде различных резервуаров, трубопроводов, купольных и иных покрытий зданий и пр. Подобные конструкции могут испытывать, наряду со статическими усилиями, быстро изменяющиеся нагрузки. Поведение конструкций при действии таких нагрузок обладает рядом особенностей. Поэтому исследование поведения оболочек и пластинок при динамических воздействиях является весьма актуальным.

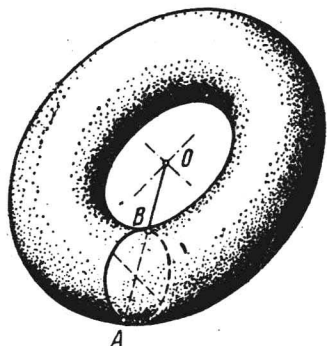


Рис. 1.5. Тороидальная оболочка кругового сечения имеет в точке A положительную кривизну, в точке B — отрицательную.

§ 3. Описание моделей оболочки

При установлении модели, представляющей в теоретических исследованиях реальные оболочки, мы должны сделать ряд допущений.

Начнем с характеристики конструкции оболочки и ее материала. В технических приложениях, о которых было кратко сказано выше, встречаются оболочки самой разнообразной структуры. Сюда относятся, например, двух- и трехслойные оболочки; конструкции из композиционных материалов типа стеклопластика, графитопластика или боропластика; оболочки, подкрепленные ребрами.

Описание динамического поведения таких оболочек является весьма сложным. В качестве наиболее простой модели мы рассмотрим в данной главе *однослойные оболочки, изготовленные из однородного изотропного материала.*

Но такой однородный изотропный материал может обладать различными свойствами.

Если учитывать эффекты пластической или вязкопластической деформации, то мы должны были бы исходить из нелинейных соотношений между напряжениями, деформациями и скоростями изменения этих величин во времени. Мы же будем, как правило, считать материал *упругим* и *подчиняющимся закону Гука*.

Надо иметь в виду, что механические характеристики материала при высоких скоростях деформации могут иметь значения, резко отличающиеся от статических. Модуль упругости несколько увеличивается, а предел пропорциональности, предел текучести, временное сопротивление могут возрасти на 50% и более.

Будем в дальнейшем рассматривать оболочки постоянной толщины h .

Отличительной особенностью общих зависимостей, относящихся к тонким оболочкам, является сведение уравнений трехмерной задачи теории упругости к уравнениям для двух измерений. При этом для однослойной однородной оболочки координатную систему естественно связать со срединной поверхностью оболочки. Мы можем, например, в качестве основных координатных направлений принять линии кривизны срединной поверхности.

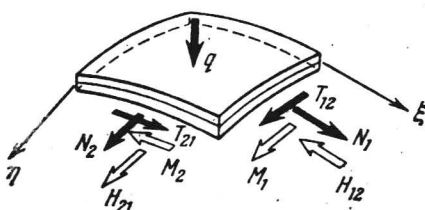


Рис. 1.6. Элемент оболочки под действием внешней нагрузки и внутренних усилий.

Одним из путей приведения трехмерной задачи к двумерной является принятие гипотезы недеформируемых нормалей (гипотезы Кирхгофа — Лява). Она состоит в том, что любое волокно, нормальное к срединной поверхности до де-

формации, остается после деформации прямым и нормальным к срединной поверхности в ее новом очертании; вместе с тем длина волокна вдоль толщины оболочки остается неизменной. Дополнительное допущение состоит в том, что нормальными напряжениями в направлении нормали к срединной поверхности можно пренебречь по сравнению с основными напряжениями.

Под основными напряжениями в теории оболочек понимают нормальные и касательные напряжения в самой срединной поверхности и в слоях оболочки, ей параллельных.

Рассмотрим элемент оболочки, вырезанный сечениями вдоль координатных линий ξ , η (рис. 1.6) и подвергающийся, вообще говоря, действию поперечной нагрузки интенсивностью q . Нормальные усилия в каждом из этих сечений можно привести к силам N_1 и N_2 , с одной стороны, и изгибающим моментам M_1 , M_2 ,

с другой (светлыми стрелками на рисунке изображены вектор-моменты). Касательные усилия приводятся к сдвигающим усилиям T_{12} , T_{21} и крутящим моментам H_{12} , H_{21} .

Обратимся теперь к поперечным силам Q_1 , Q_2 , представленным на рис. 1.7, а. Они являются равнодействующими касательных усилий, лежащих в самих сечениях ξ , η (рис. 1.7, б) и направленных вдоль нормали к срединной поверхности *). Того же

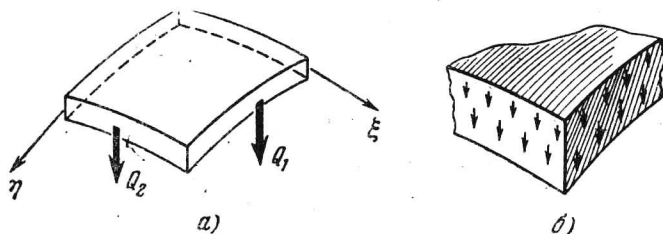


Рис. 1.7. Поперечные силы в сечениях оболочки (а) как результирующие касательных усилий (б).

типа касательные усилия возникают в поперечных сечениях балок, подвергающихся поперечному изгибу.

В статических задачах внутренние силы, действующие на элемент оболочки, уравнивают внешнюю поперечную нагрузку следующим образом. С одной стороны, равновесие достигается за счет усилий в срединной поверхности. Это показано на рис. 1.8 на примере искривленной панели: нормальные усилия N в сечениях панели дают равнодействующую, уравнивающую внешнюю нагрузку.

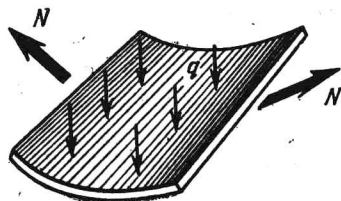


Рис. 1.8. В оболочке внешняя поперечная нагрузка уравнивается частично за счет усилий в срединной поверхности.

Если при этом в сечениях оболочки отсутствуют изгибающие и крутящие моменты, то оболочку можно охарактеризовать как *безмоментную*. С другой стороны, в плоской пластинке при малых прогибах равновесие элемента может быть получено лишь за счет разности поперечных сил Q (рис. 1.9), в свою очередь связанных с изгибающими и крутящими моментами. В общем случае *моментной оболочки* имеет место совместное действие усилий в срединной поверхности, поперечных сил и моментов.

В интересующих нас задачах динамики мы должны, пользуясь принципом Даламбера, ввести в рассмотрение силы

*) Взаимные им касательные усилия действуют в слоях, параллельных срединной поверхности.

инерции. Определим прежде всего силы инерции, соответствующие перемещениям элементов оболочки вдоль нормали. Обозначая нормальные перемещения — прогибы — через w , мы получим силу инерции, приходящуюся на единицу объема, равной $[-(\gamma/g)(\partial^2 w/\partial t^2)]$, где γ — удельный вес материала, g — ускорение силы тяжести, t — время. Аналогично находятся силы инерции, отвечающие перемещениям u , v .

Обратимся к деформациям, связанным с усилиями различного типа. Усилия N вызывают удлинения или укорочения вдоль координатных линий ξ , η , усилия T — сдвиг элемента в срединной поверхности. Эффект моментов M проявляется в изменении кривизны оболочки, а моментов H — в скручивании элемента. Что же касается деформаций сдвига, связанных с поперечными силами и соответствующими касательными напряжениями τ , то этими деформациями обычно пренебрегают.

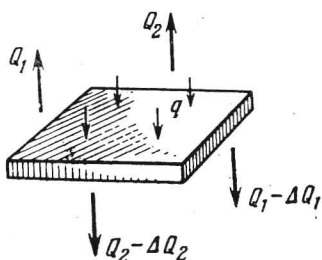


Рис. 1.9. В пластинке и оболочке внешняя нагрузка уравнивается отчасти за счет поперечных сил.

Очерченную схему напряженного и деформированного состояния оболочки, основанную на гипотезе Кирхгофа — Лява, можно считать моделью первого приближения. Она оказалась

удобной при решении многих статических и динамических задач; полученные при этом результаты в ряде случаев достаточно точны для практических приложений.

Перейдем к анализу основных соотношений динамической теории оболочек для такой модели.

§ 4. Деформации и перемещения

Рассмотрим более подробно деформированное состояние оболочки произвольного очертания в предположении, что прогибы точек срединной поверхности могут быть одного порядка с толщиной оболочки. Будем пользоваться в дальнейшем декартовыми координатами x , y , z . Координатные линии x , y условимся совмещать с линиями кривизны срединной поверхности. Линию z направим вдоль нормали к срединной поверхности к центру кривизны. Примем ниже правую систему координат. Обозначим перемещения точек срединной поверхности по направлениям x , y , z через u , v , w .

Поставим перед собой целью выразить соотношения между деформациями и перемещениями. Перемещения точек срединного слоя вдоль координатных линий являются функциями координат x , y и времени t : $u = u(x, y, t)$, $v = v(x, y, t)$, это же