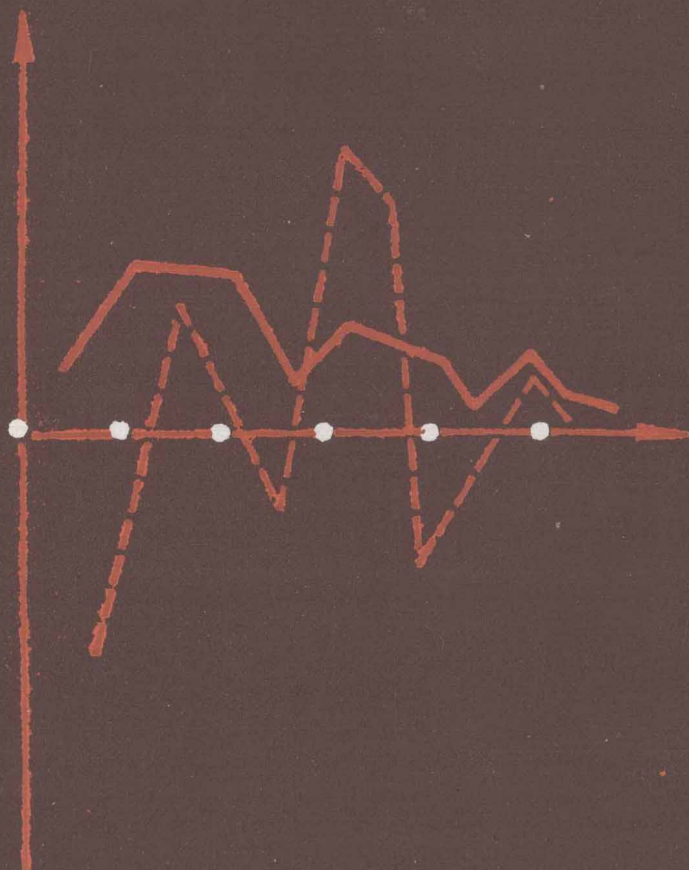


Е. М. ЛЕВИЦКИЙ

АДАПТИВНЫЕ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ



АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ЭКОНОМИКИ И ОРГАНИЗАЦИИ
ПРОМЫШЛЕННОГО ПРОИЗВОДСТВА

Е. М. ЛЕВИЦКИ

АДАПТИВНЫЕ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Ответственный редактор
д-р экон. наук *Ю. А. Чижов*



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
Новосибирск · 1981

Левцкий Е. М. Адаптивные эконометрические модели.— Новосибирск: Наука, 1981.

Монография посвящена разработке и применению адаптивного подхода в экономико-математическом моделировании, ретроспективном анализе и прогнозировании экономического развития.

Книга рассчитана на научных сотрудников, преподавателей вузов, аспирантов и студентов.

ВВЕДЕНИЕ

Цель настоящей работы — разработка и применение адаптивного подхода в эконометрическом моделировании, ретроспективном анализе и долгосрочном прогнозировании экономического развития. Работа носит методический характер, и приведенные в ней расчеты служат иллюстрацией возможностей использования адаптивных эконометрических моделей. Последние являются удобным и гибким инструментом для решения следующих задач:

1) более глубокого ретроспективного анализа развития экономики, исследования факторов роста с учетом изменения их эффективности, изучения соотношения между интенсивными и экстенсивными составляющими экономических факторов;

2) совершенствования методов прогнозирования, в частности многовариантных нормативных прогнозов и инерционных прогнозов с использованием меняющихся во времени структурных параметров моделей;

3) совершенствования методов сопоставительного анализа, использование для этой цели сопоставимых экономических моделей, в частности равновесных оценок, как основы для построения системы паритетов.

Работа состоит из четырех глав. В первой главе рассматривается вопрос о принципах адаптивного подхода в эконометрическом моделировании.

Первый этап построения модели — это выбор основных структурных связей и набор основных показателей и факторов (идентификация в широком смысле). Структурные связи и набор факторов в уравнениях модели могут меняться в процессе функционирования модели после проверки ее на адекватность моделируемой системе.

Второй этап — идентификация в узком смысле (оце-

пирование структурных коэффициентов модели). Существует обширный арсенал методов оценивания структурных коэффициентов. Это прежде всего группа методов наименьших квадратов (МНК). Сюда относятся одношаговый, двухшаговый и трехшаговый МНК, нелинейный, рекуррентный МНК и др.

Методы наименьших квадратов очень чувствительны к нарушениям предпосылок и условий их применения. Поэтому в последние годы получают развитие так называемые робастные методы оценивания, устойчивые по отношению к нарушениям предпосылок МНК, к числу которых принадлежит и метод стохастической аппроксимации¹.

Еще одним недостатком МНК и подобных ему методов является то обстоятельство, что получаемые с их помощью оценки постоянны для всего базового периода модели. Постоянные оценки часто используются и для прогнозируемого периода. Это побуждает искать способы более адекватного отображения соотношений между экономическими показателями, которые выражаются коэффициентами уравнений модели. Одним из таких способов является метод «дрейфа коэффициентов» (Ю. А. Чижов)². Этот метод состоит в сопоставлении двух одинаковых по набору факторов уравнений, оцененных на разных временных базах. Сравнивая значения коэффициентов при соответствующих переменных, можно сделать вывод об изменении их влияния.

Более полное решение вопроса состоит в построении модели с переменными структурными коэффициентами. Мы применяем при этом рекуррентный метод оценивания коэффициентов уравнений регрессии. Рекуррентные методы оценивания отличаются от метода наименьших квадратов, метода наибольшего правдоподобия и других тем, что не требуют повторения всего объема вычислений при добавлении новых наблюдений. Рекуррентные методы оценивания позволяют получать текущие значения оцениваемых параметров на основе их предыдущих значений и текущих новых наблюдений.

¹ Ершов А. А. Стабильные методы оценки параметров (обзор).— Автоматика и телемеханика, 1978, № 8, с. 66—100.

² Моделирование американской экономики. Новосибирск, Наука, 1975, с. 176.

В качестве рекуррентного метода мы используем метод типа стохастической аппроксимации. Метод стохастической аппроксимации широко применяется в естественных и технических науках. Этим методом решаются разнообразные задачи по распознаванию, идентификации, обучению и адаптации в системах автоматического регулирования в условиях неполной априорной информации. Стохастическая аппроксимация — универсальный итеративный метод решения оптимизационных задач по последовательным реализациям случайных наборов параметров условий задачи. Это делает ее особенно удобной для решения задач экономического моделирования.

А. Е. Алберт и Л. А. Гарднер³ исследовали применение метода стохастической аппроксимации для рекуррентного оценивания коэффициентов отдельно взятого уравнения регрессии по заданным значениям экзогенных переменных (факторов) и имеющимся наблюдениям эндогенной переменной (функции). Получающиеся при этом оценки являются усредненными для всего временного интервала, для которого известны наблюдения факторов и функции.

Наше применение стохастической аппроксимации отличается следующими особенностями.

Мы рассматриваем не отдельные уравнения регрессии, а систему уравнений регрессии, факторы и функции которых должны удовлетворять ограничениям в виде системы уравнений и тождеств модели.

Факторы в уравнениях регрессии не задаются экзогенно, а определяются итеративно вместе с оценками коэффициентов. Известными наблюдениями считаются фактические значения показателей-функций на основе данных экономической статистики. Случайные реализации факторов, используемые в итеративном алгоритме, генерируются системой уравнений модели в процессе ее функционирования.

Оценки коэффициентов определяются для каждого шага работы модели⁴ в результате решения задачи опти-

³ Albert A. E., Gardner L. A. Stochastic Approximation and Nonlinear Regression. M. I. T. Press, Cambridge, Massachusetts, 1967.

⁴ Под шагом модели понимается единица масштаба времени, в котором функционирует модель. Для описываемых здесь моделей шаг равен одному году.

мального обучения. Целью обучения мы считаем минимизацию среднего квадратического отклонения расчетных показателей от их фактических значений. Мы получаем, следовательно, модель с переменными коэффициентами, значения которых меняются от года к году.

Во второй и третьей главах анализируется динамика структурных коэффициентов уравнений моделей. Движение структурных коэффициентов объясняется реальными изменениями в экономическом развитии соответствующих стран.

Эконометрические адаптивные модели с переменными структурными коэффициентами обладают значительно лучшими имитационными и прогнозными свойствами по сравнению с моделями, имеющими постоянные структурные коэффициенты. Об этом свидетельствуют результаты экспериментальных расчетов по прогнозированию экономики США, описанные в параграфе 3.3. В этих же главах содержится методика исследования факторов экономического роста с учетом динамики структурных коэффициентов, выражающих эффективность соответствующих факторов. Систему регрессионных уравнений модели мы рассматриваем как систему воспроизводственных функций с переменными параметрами. Структурные коэффициенты уравнений модели имеют конкретный экономический смысл. Они могут быть интерпретированы как эффективности использования соответствующих факторов или выражают степень влияния приращения фактора на приращение показателя.

Выведенная нами соответствующая формула позволяет в динамике измерить действие интенсивных и экстенсивных составляющих факторов на темп прироста показателя-функции.

Исследование факторов экономического роста с учетом меняющейся во времени эффективности позволило сделать выводы о характере экономического развития, которые не вытекают из традиционного подхода к оценке параметров производственной функции.

Содержание четвертой главы иллюстрирует возможности метода адаптации в сопоставительном анализе на примере экономики СССР и США.

При условии дальнейшего совершенствования и улучшения качества исходных статистических данных, отраслевой классификации, большего приближения ее к сопо-

ставимому виду адаптивные эконометрические модели могут служить основой для проведения сравнительного анализа развития экономики различных стран не только за прошлый период, но и на долгосрочную перспективу.

Описываемые здесь модели построены на основе фактических данных, почерпнутых из официальных источников и публикаций⁵.

Адаптивный подход к построению и использованию эконометрических моделей, развитый в настоящей работе, является универсальным и может применяться во многих сферах экономического моделирования.

В работе над этой книгой постоянную поддержку оказывали автору академик А. Г. Аганбегян и доктор экономических наук С. М. Меньшиков, замечания и предложения которых способствовали значительному улучшению содержания и изложения первоначального текста. Существенное значение для улучшения качества рукописи имело критическое обсуждение ее членами научных советов отдела темпов и пропорций и отдела математических методов в экономике.

Особую признательность автор выражает канд. экон. наук Э. Б. Ершову, внимательно прочитавшему рукопись и сделавшему много полезных и конструктивных замечаний.

⁵ Народное хозяйство СССР. М., Статистика, 1965—1979 гг. The National Income and Product Accounts of the United States. 1929—1974 Statistical Tables. Washington, 1976; Survey of Current Business. Washington, 1966—1979. Economis Report of the President. Washington, 1970—1979.

АДАПТИВНЫЙ ПОДХОД В ЭКОНОМЕТРИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

1.1. МЕТОД СТОХАСТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ

В задачах математического программирования дается система уравнений или неравенств относительно вектора переменных (параметров) α и хорошо определенная скалярная функция $f(\alpha)$. Целью задачи является определение такого значения α , которое доставляет минимум (или максимум) функции f . При этом значение параметра α должно удовлетворять системе ограничений:

$$\bar{\alpha} \in G = \{\alpha : q_i(\alpha) \leq 0, i = 1, \dots, N\},$$

где $q_i(\alpha)$ — заданные скалярные функции.

Во многих оптимизационных задачах функции $f(\alpha)$ или (и) $q_i(\alpha)$, $i = 1, \dots, N$ точно неизвестны. Поэтому обычные методы численного анализа для нахождения оптимального значения параметра α неприменимы. Такую систему или модель можно наблюдать в процессе функционирования или проводить с ней имитационные эксперименты. В результате таких наблюдений или экспериментов мы получаем выборку значений функций f и q_i , соответствующую различным значениям параметра α . Чаще всего мы при этом наблюдаем не точные значения функций, а значения функций, искаженные помехами или ошибками измерений. Такая ситуация характерна для задач, постановка и решение которых исследуются в стохастическом программировании.

Одним из методов решения задач стохастического программирования является алгоритм стохастической аппроксимации. Суть этого метода состоит в следующем. Параметру α дается начальное значение α_0 , и наблюдается соответствующее этому значению параметра значение функции $f(\alpha_0)$. На основе значений α_0 и $f(\alpha_0)$ вычисляется новое значение параметра α_1 и т. д. В теории стохастической аппроксимации устанавливаются условия,

при которых последовательность $\{\alpha_k\}$ сходится к оптимальному значению α . Метод стохастической аппроксимации возник в 1951 г.¹, и с тех пор область его приложений расширяется. Сначала этот метод применялся в основном для нахождения нулей и экстремумов функций. Сейчас он применяется в задачах идентификации и оптимального управления, распознавания образов и экономики². В последнее время данный метод начал применяться для решения задач на условный экстремум³.

Алгоритм Роббинса — Монро. Пусть $f(\alpha)$ обозначает среднее значение (математическое ожидание) некоторой случайной величины, реализации которой y_k мы наблюдаем при значениях параметра α_k и

$$y_k = f(\alpha_k) + \xi_k.$$

Здесь ξ_k — ошибка наблюдения, разность между реализацией случайной величины и ее математическим ожиданием при значении параметра равном α_k .

Предположим, что необходимо подобрать, найти такое значение параметра $\bar{\alpha}$, чтобы среднее значение $f(\bar{\alpha})$ равнялось значению β . Если $f(\alpha)$ — известная гладкая функция, то с помощью некоторой вычислительной процедуры можно найти корень уравнения

$$f(\alpha) = \beta.$$

Пусть для определенности $f(\alpha)$ — неубывающая дифференцируемая функция и $\bar{\alpha}$ — искомое значение параметра α . Пусть далее

$$f(\alpha) > \beta, \text{ если } \alpha > \bar{\alpha},$$

$$\text{и} \quad f(\alpha) < \beta, \text{ если } \alpha < \bar{\alpha}.$$

Тогда, применяя метод Ньютона, получим

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k - [f_\alpha(\alpha_k)]^{-1} [f(\alpha_k) - \beta]$$

и $\alpha_k \rightarrow \bar{\alpha}$ при некоторых дополнительных условиях.

¹ Robbins H., Monro S. A Stochastic Approximation Method. — Ann. Math. Statist., 1951, vol. 22, p. 400—407.

² Вазан М. Стохастическая аппроксимация. М., Мир, 1972; Цыпкин Я. З. Адаптация и обучение в автоматических системах. М., Наука, 1968.

³ Kushner H. J., Clark D. S. Stochastic Approximation Method for Constrained and Unkonstrained Systems. Springer. — Verlag. New York — Heidelberg — Berlin, 1978.

Во многих случаях функция $f(\alpha)$, по существу, неизвестна или трудновычислима. Тогда для некоторого конкретного значения α можно попытаться оценить значение $f(\alpha)$, наблюдая функционирование системы в течение достаточно длительного времени. Оценка значения $f(\alpha)$ может быть получена, например, как среднее значение из наблюдаемых значений. Такая процедура неэффективна, так как требует большого числа повторений эксперимента для получения хорошей оценки $f(\alpha)$. Кроме того, мы должны отбрасывать много значений α , которые далеки от искомого значения $\bar{\alpha}$.

Более целесообразным будет использование информации, полученной в предыдущих экспериментах, для выбора лучших значений α в последующих экспериментах. В этом и состоит основная идея метода стохастической аппроксимации.

Пусть $\{\gamma_k\}$ — последовательность положительных чисел, стремящихся к нулю, и таких, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k = \infty.$$

Алгоритм Роббинса — Монро для определения $\bar{\alpha}$ определяется следующей формулой:

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k - \gamma_k(y_k - \beta) = \alpha_k - \gamma_k(f(\alpha_k) - \beta + \xi_k).$$

Относительно последовательности случайных величин $\{\xi_k\}$ предполагается, что они допускают выполнение условий

$$E[y_k/\alpha_0, \dots, \alpha_k; y_0, \dots, y_{k-1}] = f(\alpha_k).$$

Например, случайные величины ξ_k должны иметь нулевую среднюю и конечную дисперсию.

Минимизация функции регрессии. Алгоритм Кифера — Вольфовица. Рассмотрим опять случайную величину $y_k = f(\alpha_k) + \xi_k$ и поставим задачу:

найти значение параметра α , которое минимизирует среднее значение случайной величины y_k :

$$f(\bar{\alpha}) = \min_{\alpha} f(\alpha).$$

Если функция $f(\alpha)$ известна и дважды дифференцируема, можно применить известный метод Ньютона:

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k - [f_{\alpha\alpha}(\alpha_k)]^{-1} f_{\alpha}(\alpha_k).$$

В том случае, когда функция $f(\alpha)$ точно не известна, предположим, что можно поставить эксперимент, в котором наблюдаются ее случайные реализации. Тогда применим метод стохастической аппроксимации.

Пусть $\{c_k\}$ обозначает последовательность положительных конечных интервалов, стремящихся к нулю при $k \rightarrow \infty$, а e_i обозначает единичный координатный вектор. Пусть также α_k — k -я оценка векторного параметра и y_k — k -е наблюдение функции. Если $\alpha \in R^r$, то для конечно-разностной оценки производной $f_\alpha(\alpha_k)$ требуется $2r$ наблюдений:

$$\alpha_k \pm c_k e_1, \dots, \alpha_k \pm c_k e_r.$$

Определим конечно-разностные векторы $Df(\alpha_k, c_k)$, $Dy(\alpha_k, c_k)$ и ошибки наблюдения ξ_k следующим образом:

$$Df(\alpha_k, c_k) = [f(\alpha_k + c_k e_i) - f(\alpha_k - c_k e_i)] / 2c_k$$

— i -я компонента вектора $Df(\alpha_k, c_k)$;

$$Dy^i(\alpha_k, c_k) = (y_{2rk+2i-1} - y_{2rk+2i}) / 2c_k$$

— i -я компонента вектора $Dy(\alpha_k, c_k)$,

$$\xi_k = Dy(\alpha_k, c_k) - Df(\alpha_k, c_k).$$

Тогда алгоритм Кифера — Вольфовица (с центральными конечными разностями) имеет вид

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k - \gamma_k Dy(\alpha_k, c_k) = \alpha_k - \gamma_k [Df(\alpha_k, c_k) + \xi_k]. \quad (1.1)$$

Релаксационный вариант алгоритма Кифера — Вольфовица. Широко используемый вариант алгоритма Кифера — Вольфовица состоит в том, что итерационный процесс движется в одном координатном направлении в течение одного шага. Пусть y_1 и y_2 — наблюдения при значении параметра $\alpha_0 + c_0 e_1$ и $\alpha_0 - c_0 e_1$ соответственно. Предполагаем, что $\alpha_0 = (\alpha_0^1, \dots, \alpha_0^r)$ заданы. Пусть α_k^i — i -я компонента вектора α_k , определим α_1^1 :

$$\alpha_1^1 = \alpha_0^1 - \gamma_0 (y_1 - y_2) / 2c_0.$$

Пусть y_3 и y_4 соответственно обозначают наблюдения при значениях параметра $(\alpha_1^1, \alpha_0^2 + c_0 e_2, \alpha_0^3, \dots, \alpha_0^r)$ и $(\alpha_1^1, \alpha_0^2 - c_0 e_2, \alpha_0^3, \dots, \alpha_0^r)$, и определим

$$\alpha_1^2 = \alpha_0^2 - \gamma_0 (y_3 - y_4) / 2c_0;$$

и аналогично для $\alpha_1^3, \dots, \alpha_1^r$. После вычисления α_1^r мы переходим к вычислению α_2^1 , первой компоненты α_2 и т. д. В общем случае предположим, что уже вычислены $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ и $\alpha_{k+1}^1, \dots, \alpha_{k+1}^{i-1}$. Пусть $y_{2rk+2i-1}$ и y_{2rk+2i} соответственно ($i \leq k$) обозначают наблюдения при значениях параметра $(\alpha_{k+1}^1, \dots, \alpha_{k+1}^{i-1}, \alpha_k^i + c_k e_i, \alpha_k^{i+1}, \dots, \alpha_k^r)$ и $(\alpha_{k+1}^1, \dots, \alpha_{k+1}^{i-1}, \alpha_k^i - c_k e_i, \alpha_k^{i+1}, \dots, \alpha_k^r)$, тогда определим

$$\alpha_{k+1}^i = \alpha_k^i - \gamma_k \frac{y_{2rk+2i-1} - y_{2rk+2i}}{2c_k}. \quad (1.2)$$

Доказательство сходимости и асимптотические свойства алгоритмов (1.1) и (1.2) идентичны.

Если мы можем наблюдать случайные значения производной, искаженные помехами, то

$$Df_\alpha(\alpha_k, c_k) = f_\alpha(\alpha_k) + \xi_k$$

и алгоритм принимает вид

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k - \gamma_k [f_\alpha(\alpha_k) + \xi_k]. \quad (1.2')$$

Задача минимизации с ограничениями. Распространение метода стохастической аппроксимации на задачи условной оптимизации было сделано Фабианом, Ю. М. Ермольевым, В. А. Волконским, Д. Б. Юдиным, Кушнером и Кларком⁴.

Рассмотрим для сравнения детерминистскую задачу на условный экстремум. Пусть $f(\alpha)$ — вещественная, непрерывная, дифференцируемая функция. Требуется найти значение α , минимизирующее эту функцию, т. е.

$$f(\alpha) \rightarrow \min \quad (1.3)$$

при ограничениях

$$\alpha \in B = \{\alpha : q_i(\alpha) = 0, i = 1, \dots, N\}. \quad (1.4)$$

Функции $q_i(\alpha)$, ($i = 1, \dots, N$) предполагаются вещественными и непрерывно дифференцируемыми.

⁴ Fabian V. Stochastic Approximation of Constrained minima.— In: Trans. 4-th Prague Conf. Inf. Theory, Stat. Dec. Funct. Random Process, 1965, Prague, 1967, p. 277—290; Ермольев Ю. М. Методы стохастического программирования. М., Наука, 1976; Итеративные методы в теории игр и программировании. М., Наука, 1974; Юдин Д. Б. Задачи и методы стохастического программирования. М., Сов. радио, 1979.

Определим функцию Лагранжа

$$L(\alpha, \lambda) = \lambda^0 f(\alpha) + \sum_{i=1}^N \lambda^i q_i(\alpha). \quad (1.5)$$

Пара векторов $(\bar{\alpha}, \bar{\lambda})$ называется седловой точкой функции $L(\alpha, \lambda)$, если для всех $\alpha \in R^r$ и всех λ таких, что $\lambda^i \geq 0, i = 0, \dots, N$,

$$L(\alpha, \lambda) \leq L(\bar{\alpha}, \bar{\lambda}) \leq L(\alpha, \bar{\lambda}).$$

Как известно, необходимое условие существования оптимального значения α состоит в том, что существует вектор $\lambda = (\lambda^0, \dots, \lambda^N)$, $\lambda \neq 0$ такой, что выполняются условия $\lambda^0 f_\alpha(\bar{\alpha}) + \sum_{i=1}^N \lambda^i q_{i,\alpha}(\bar{\alpha}) = 0, \bar{\alpha} \in B$.

Вектор λ выбирают обычно так, чтобы $\lambda^0 = 1$. Если ограничения имеют форму неравенств, то необходимое условие минимума состоит в следующем.

Для того чтобы точка $\bar{\alpha}$ доставляла минимум целевой функции

$$f(\alpha) \rightarrow \min \quad (1.3')$$

при ограничениях

$$\alpha \in B = \{\alpha : q_i(\alpha) \leq 0, i = 1, \dots, N\}, \quad (1.4')$$

необходимо выполнение следующих условий.

Существует вектор λ такой, что $\lambda^i \geq 0, i = 1, \dots, N$ и выполняются равенства

$$\begin{aligned} f_\alpha(\bar{\alpha}) + \sum_{i=1}^N \lambda^i q_{i,\alpha}(\bar{\alpha}) &= 0, \\ \lambda^i &= 0, \text{ если } q_i(\bar{\alpha}) < 0, \\ \lambda^i &> 0, \text{ если } q_i(\bar{\alpha}) = 0, \\ \bar{\alpha} &\in B. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Соотношения (1.6) называются условиями Куна-Таккера⁵.

Пусть функция $f(\alpha)$ строго выпукла, а левые части ограничений $q_i(\alpha)$ — выпуклые функции. Тогда необходимым и достаточным условием того, что вектор $\bar{\alpha}$ есть

⁵ Зянгвилл У. И. Нелинейное программирование. М., Сов. радио, 1973.

единственное решение задачи (1.3'), (1.4'), является существование такого вектора $\bar{\lambda}$, что $(\bar{\alpha}, \bar{\lambda})$ — седловая точка функции Лагранжа $L(\alpha, \lambda)$. Если функции $f(\alpha)$ и $q_i(\alpha)$, ($i = 1, \dots, N$) непрерывно дифференцируемы, то выполняются также и условия Куна-Таккера.

В нелинейном программировании применяются итеративные алгоритмы, которые определяют одновременно значения α_k и λ_k , минимизирующие $L(\alpha, \lambda)$ как функцию α и максимизирующие $L(\alpha, \lambda)$ как функцию λ . В результате действия такого алгоритма определяется седловая точка функции Лагранжа.

Алгоритм стохастической аппроксимации, определяемый ниже, строится аналогично итеративным алгоритмам нелинейного программирования.

Обратимся теперь к случаю, когда точное значение функций неизвестно. Мы можем получать информацию об их значениях из наблюдений, искаженных помехами.

Пусть (α_k, λ_k) обозначает оценку оптимальных значений параметра и множителя Лагранжа, которые получаются в результате k -й итерации.

Выше мы определили искаженную помехами оценку производной $f_\alpha(\alpha)$ выражением

$$Dy(\alpha_k, c_k) = Df(\alpha_k, c_k) + \xi_k.$$

Первое слагаемое обозначает конечно-разностную аппроксимацию производной в точке α_k . Второе слагаемое представляет собой результат помехи наблюдения или ошибки измерения. Если мы в состоянии непосредственно наблюдать искаженное помехой значение производной, то можно не применять ее конечно-разностную аппроксимацию. В таком случае полагаем $Df(\alpha_k, c_k) = f_\alpha(\alpha_k)$. Аналогично для функций, составляющих ограничения задачи. Если $q_i(\alpha)$ точно не известны, предполагаем, что возможно наблюдать их искаженные помехами значения

$$q_i(\alpha_k) + \hat{\xi}_{ik}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Обозначим конечно-разностную аппроксимацию градиента $q_{i\alpha}(\alpha_k)$ через $Dq_i(\alpha_k, c_k)$. Тогда $Dq_i(\alpha_k, c_k) + \tilde{\xi}_{ik}$ обозначает оценку градиента с учетом ошибки. В случае, когда можно прямо наблюдать значение градиента без его конечно-разностной аппроксимации, мы полагаем $Dq_i(\alpha_k, c_k) = q_{i\alpha}(\alpha_k)$.

Итеративный алгоритм, решающий задачу (1.3'), (1.4') в стохастическом случае, строится следующим образом (Н. J. Kushner, D. S. Clark). Пусть $\bar{\alpha}$ — единственное оптимальное значение параметра (которое существует в силу приводимых ниже условий). Пусть $\bar{\lambda}$ — такой вектор, что $(\bar{\alpha}, \bar{\lambda})$ — седловая точка функции Лагранжа. Предположим, что известны вещественные числа A^i, B^l ($i = 1, \dots, r; l = 1, \dots, N$) такие, что $|\bar{\alpha}^i| < A^i, 0 \leq \bar{\lambda}^l < B^l$ для каждого i и l . Тогда последовательности $\{\alpha_k\}, \{\bar{\lambda}_k\}$ и $\{\lambda_k\}$ определяются рекуррентными формулами⁶

$$\begin{cases} \bar{\alpha}_{k+1} = \alpha_k - \gamma_k \left[(Df(\alpha_k, c_k) + \xi_k) + \sum_{l=1}^N \lambda_k^l (Dq_l(\alpha_k, c_k) + \tilde{\xi}_{lk}) \right], \\ \alpha_{k+1}^i = \begin{cases} \bar{\alpha}_{k+1}^i, & \text{если } |\bar{\alpha}_{k+1}^i| < A^i, \\ A^i \cdot \text{sign } \bar{\alpha}_{k+1}^i & \text{в противоположном случае.} \end{cases} \end{cases} \quad (1.7)$$

$$\begin{cases} \bar{\lambda}_{k+1}^l = \max [0, \lambda_k^l + \gamma_k (q_l(\alpha_k) + \hat{\xi}_{lk})], \\ \lambda_{k+1}^l = \begin{cases} \bar{\lambda}_{k+1}^l, & \text{если } \bar{\lambda}_{k+1}^l < B^l, \\ B^l & \text{в противоположном случае.} \end{cases} \end{cases} \quad (1.8)$$

Условия, при выполнении которых алгоритмы (1.7), (1.8) сходятся, относятся к свойствам корректирующих множителей γ_k , целевой функции и функциям ограничений, а также к свойствам случайных величин, отражающих влияние помех и ошибок измерений.

1. Корректирующие множители γ_k должны обладать следующими свойствами:

$$\gamma_k > 0, \gamma_k \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty, \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k = \infty, \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^2 < \infty.$$

2. Целевая функция $f(\alpha)$ и функции ограничений $q_l(\alpha)$, ($l = 1, \dots, N$) — непрерывно дифференцируемые вещественные функции.

⁶ Числа $\lambda_k^l, \bar{\lambda}_k^l, \alpha_k^i, \bar{\alpha}_k^i$ представляют собой l -е и i -е компоненты векторов $\lambda_k, \bar{\lambda}_k, \alpha_k, \bar{\alpha}_k$ соответственно.

3. Функция $f(\alpha)$ — строго выпукла, а функции $q_l(\alpha)$, ($l = 1, \dots, N$) — выпуклы.

4. В классических работах по стохастической аппроксимации обычно предполагается, что математическое ожидание случайной ошибки наблюдения равно нулю.

Более слабым является условие

$$\sum_{h=1}^{\infty} (\gamma_h \xi_h)^2 < \infty.$$

Последнее имеет место, если выполняется неравенство $\sum_{h=1}^{\infty} \gamma_h^2 < \infty$, а случайная ошибка имеет конечную дисперсию.

1.2. ТИПОВАЯ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Основой построения эконометрической модели (как и всякой другой экономико-математической модели) является экономическая теория. Экономические законы определяют выбор и формирование структуры модели в широком смысле, т. е. определяют набор основных экономических показателей, систему и характер связей между ними (рис. 1.1).

Теоретической основой построенных нами эконометрических моделей служат схемы расширенного воспроизводства К. Маркса и В. И. Ленина. При этом значительное внимание уделялось механизму формирования общественного спроса⁷.

Характерной особенностью межотраслевых эконометрических моделей является функциональная зависимость эндогенных компонентов конечной продукции от элементов условно-чистой продукции и основных производственных и непроизводственных фондов, которая реализуется с помощью блока регрессионных уравнений.

Включение в модель межотраслевого блока позволяет отразить как «горизонтальные» экономические связи, возникающие при распределении продукции отраслей, так и «вертикальные», характеризующие затраты на производство продукции.

⁷ Моделирование американской экономики. Новосибирск, Наука, 1975, с. 8—18.