

数理統計学概説

増補版

佐藤 喜代蔵 著

東海大学出版会

著者略歴

佐藤 喜代蔵
さとう きよぞう

昭和18年 東京大学理学部物理学科卒業
38年 東海大学講師
40年 日本大学教授
現在 日本大学文理学部応用数学科教授

数理統計学概説 増補版

1967年12月15日 第1刷発行
1981年4月10日 増補第1刷発行

著者	佐藤喜代蔵
発行者	山田渉
印刷者	篠倉鉄郎

東京都新宿区新宿3-27-4
電話 (356) 1541 振替東京0-46614

発行所 東海大学出版会

落丁、乱丁はお取替えます。

3041-0471-5110

KK 第一印刷所

序

本書は、数理統計学の全般を地道に、初めて学ぼうとするかたがたのために書かれたものである。理論をおろそかにしないように努めた積りであるが、浅学非才のため不十分な点があることをおそれる。数式の導き方も繁をいとわず書き記すことにしたが、これらに目をつぶって先を急がれても勿論差し支えない筈である。

数理統計学は、品質管理、信頼性理論、物理学、医学、遺伝学、心理学、社会学、経済学等極めて広範囲にわたり高度に応用されている。特にオペレーションズ・リサーチにおいて著しい。それら各分野において、応用統計学とでもいうべき独立の地歩を築いているといってもよいのではあるまいか。本書では、それら応用面にふれないで、数理統計学の基礎事項を解説することをねらいとしている。本書に説くところを会得しておけば、応用統計学のどの分野に深くつき進んでいく場合にも不自由はないと考える。

おわりに、本書の刊行につき、多大のご厚意を賜った東海大学出版会のかたがたに心から感謝の意を表します。

1967年11月

著 者

数 理 統 計 学

目 次

第 1 章 確率論の基礎定理

1. 確率.....	1	6. 事象の組み合わせと確率.....	4
2. 確率と相対頻度.....	1	7. 独立事象.....	6
3. 確率の定義.....	2	8. 例題.....	6
4. 確率の数値.....	3	9. ベイズ (Bayes) の定理.....	8
5. 2つの事象の組み合わせ.....	3		

第 2 章 確率変数, 分布関数

1. 確率変数.....	10	9. 2次元の確率変数.....	17
2. 離散的確率変数と連続的確率変数.....	10	10. $P(a_1 < X \leq a_2, b_1 < Y \leq b_2)$	17
3. 分布関数.....	11	11. 2次元の離散的確率変数.....	18
4. 不連続分布関数の例.....	12	12. 周辺分布と条件付分布 (離散的確率変数).....	19
5. 連続分布関数.....	13	13. 2次元の連続確率変数.....	20
6. 連続分布関数の例.....	13	14. 周辺分布と条件付分布 (連続確率変数).....	20
7. 分布関数の性質.....	14		
8. 確率変数の関数の分布.....	15		

第 3 章 期待値, 分散, 標準偏差

1. 特性数.....	23	8. 分散, 標準偏差.....	28
2. 一般に使われる特性数.....	23	9. 和の分散.....	30
3. 期待値(期望値), 平均値.....	25	10. 確率変数の算術平均の期待値と 分散.....	31
4. 和の期待値.....	26	11. 確率変数の関数の期待値と分散 の近似式.....	32
5. 積の期待値.....	27		
6. $w(X, Y)$ の期待値.....	27		
7. 条件付期待値.....	28		

第 4 章 積率 (モーメント), 積率母関数, 特性関数

1. 積率.....	35	3. 特性関数.....	37
2. 積率母関数.....	36	4. 特性関数の性質.....	38

第 5 章 2 項分布, 多項分布

1. 2 項分布	40	5. $\frac{X}{n}$ の平均と分散	44
2. 生起確率の最大な回数	41	6. $P(0 \leq k \leq s, n)$	44
3. 期待値と分散	42	7. 多項分布	45
4. 2 項分布と特性関数	42		

第 6 章 ポアソン分布

1. ポアソン分布	47	4. 特性関数とポアソン分布の合成	50
2. 期待値と分散	47		
3. 偶発事象の生起回数	48		

第 7 章 正規分布

1. 正規分布	52	6. $P(X - \mu \leq g\sigma)$	58
2. 特性関数	53	7. 平均誤差	59
3. 期待値と分散	55	8. 2 次元の正規分布	60
4. $a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_n X_n$ の分布	56	9. 周辺分布関数	61
	56	10. 回帰直線	62
5. 正規分布の表	57		

第 8 章 その他の分布

1. 負の 2 項分布	64	4. 超幾何分布	68
2. 指数分布	65	5. 一様分布 (又は矩形分布)	70
3. ガンマ分布	66		

第 9 章 中心極限定理, その他

1. チェビシエフの不等式	72	4. 2 項分布と中心極限定理	77
2. 大数の法則	73	5. ポアソン分布と中心極限定理	78
3. 中心極限定理	75		

第 10 章 標 本

1. 母集団, 標本	80	4. 平均と分散の不偏推定量	83
2. 母数・特性数	81	5. 有限母集団からとる標本	84
3. 統計量と推定量	81		

第 11 章 検 定

1. 仮説と棄却域.....88	場合)93
2. 第 1 種と第 2 種の過誤.....89	6. 不良率の検定(大標本の場合).....94
3. 単純仮説検定の一般手順.....90	7. 不良率の比較検定(大標本の場 合)95
4. 平均の検定(σ が既知の場合).....92	8. 大標本論と小標本論.....96
5. 平均の比較検定(σ_1, σ_2 が既知の	

第 12 章 推定の手順

1. 点推定.....97	3. 正規分布を利用する区間推定 100
2. 区間推定.....98	

第 13 章 χ^2 分布とその応用

1. χ^2 分布..... 102	8. 分散の推定・検定..... 110
2. 自由度が 1, 2 の χ^2 分布..... 103	9. 生起確率の検定..... 111
3. 特性関数..... 104	10. 分布の適合度の検定..... 112
4. χ^2 分布の加法性 104	11. 2 属性の独立性の検定..... 116
5. $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ の分布 105	12. $2 \times l$ 分割表の独立性の検定... 119
6. $\sum (x_i - \bar{x})^2$ と $\bar{x}$ との独立性... 107	13. 2×2 分割表の独立性の検定... 120
7. χ^2 分布の性質..... 109	14. 群分けの均一性の検定..... 121

第 14 章 t 分布とその応用

1. t 分布 123	($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, σ^2 は未知の 場合) 125
2. 平均値の推定・検定 (σ^2 が未知の場合) 125	4. 例題..... 126
3. 平均値の差の検定	

第 15 章 F 分 布

1. F 分布..... 128	4. F 分布と 2 項分布との関係... 132
2. 自由度の入れかえ..... 130	5. 生起確率の検定(小標本) ... 133
3. 母分散の比較の検定..... 131	6. 生起確率の区間推定(小標本) 134

第 16 章 点 推 定

1. 尤度関数..... 136	4. 有効推定量..... 139
2. 最尤推定量..... 137	5. 十分推定量..... 141
3. 一致推定量..... 138	

第 17 章 検定力と尤度比検定

1. 検定力 (または検出力)	144	3. 尤度比検定	150
2. 単純仮説の最強力検定	145		

第 18 章 回帰直線・相関

1. 相関	152	7. 回帰係数の平均と分散	160
2. 直線のあてはめ	152	8. 回帰係数の検定と区間推定	162
3. 相関分析	154	9. 回帰直線による予測	163
4. 相関係数の値	155	10. 相関係数の検定	165
5. 相関係数の意義	155	11. 相関係数の推定	166
6. 回帰直線	156	12. 多項式回帰	167

第 19 章 分散分析

1. 分散分析	169	3. 2 元配置法	173
2. 1 元配置法	169	4. ラテン方格法	177

練習問題	183
付 録	214
1. 直交変換	214
2. フーリエ変換	218
3. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx$	222
4. 正規分布する (X, Y) の相関係数	223
5. F 分布の密度関数	224
6. 順序統計量	228
7. 確率変数の和の分布	232
8. 条件付分布	235
付 表	238
索 引	256

第1章 確率論の基礎定理

1. 確率 観測・経験に際し、全く偶然的に発生する事柄を事象という。起りそうな事象と起りそうでない事象とがあることは何人も認めるところである。たとえば、さいころを1個ふるとき、1の目の出ることより、どれか奇数の目の出ることの方が起りそうであることは明らかである。日常生活において、起りそうな事象に対しては心構えをし、これに対処するように準備していないと困ることが多い。そのために、起りそうな事象の順序づけをし、準備をする優先順位をつけたくなる。それには、起りそうな程度を数値で表現できれば大変便利である。確率とはまさにそのような数値であるが、起りそうな程度に数値を付与するためには、具体的方法を示さなくてはならない。

確率という言葉は、日常会話の言葉としても使われているが、数学の対象として使う場合には、確率の対象となる事象は、くり返し起り得るものでなくてはならない。ただ1回しか起らない事象に確率という術語を使うことはできない*。同じ環境の下に何度もくりかえし観測されるか、経験される可能性のある事象に対してのみ、術語としての確率が定義される。

2. 確率と相対頻度 n 回の観測において、ある事象 A が m 回起ったとするならば、

$$f_n(A) = \frac{m}{n}$$

を、この観測における事象 A の相対頻度という。この観測をくりかえせば、 $f_n(A)$ は必ずしも同じ値を示さないことは日常経験することである。 $\frac{m}{n}$ なる数値は一定ではなく、何らかの規則性をもってバラつくものである。この

* たとえば、A君とB嬢との結婚が噂されているとき、2人の結婚の確率は80%などと日常会話には使われるが、数学の術語として使われたものとはみなさない。

ことを、相対頻度 $f_n(A)$ は事象 A に固有の分布に従うという。

n が小さいときの $f_n(A)$ のバラツキは、 n が大きいときのバラツキより大きいことは日常経験することである*。確率は相対頻度と極めて強い結びつきをもっていることは容認できるが、相対頻度が一定の値をもたない以上これを直ちに確率とすることはできない。 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(A)$ を事象 A の確率と定義することはよさそうに思われるが、 $n \rightarrow \infty$ のときどんな結果を得るのか実験できないし、理論的に収束するの可否かも判らないことが多い。この難点を考慮し、Quetelet の説に従い、つぎのように考える。

確率は事象に付随している特性の1つである。1連の観測毎に得られる相対頻度は、その特性の測定値であって、固有の分布法則に従って実現した値である。物体には、体積とか質量とかいくつかの特性がある如く、事象には確率その他の特性があると考えるのである。体積を測定器の許す限度まで精密に測定すれば、その数値がバラつく如く、確率も、その測定値はバラついて、相対頻度として記録される。

3. 確率の定義 試行によって起り得るあらわれ方が n 通りあるとき、そのうちの m 通りのあらわれ方によって事象が起るのであれば、この事象の起る確率を $\frac{m}{n}$ とする。これを確率の古典的定義とよぶ。1例として、さいころを振って偶数の目が出る確率を問うことにする。さいころを振ったとき起り得るあらわれ方は6通りある。そのうち3通りの方法で偶数の目があるから、偶数の目のあらわれる確率は $\frac{3}{6}$ とする。

このような古典的定義を受け容れるためには、試行によって起り得るあらゆるあらわれ方が同等の確率で起ることを前提としなければならない。同等の確率で起ることを何によって知るのか。このように考えると、古典的定義は循環論法におちいることになる。またさいころのバランスを故意に狂わせてあれば古典的定義は明らかに容認できない。その他いくつかの欠陥が指摘

* ここではバラツきの尺度を定義しないで使っておく。後に述べる標準偏差はバラツきを表わす1つの尺度である。

される。

これを改善するために、相対頻度と関連させて確率を数値表現する方法がある。また公理を設け、集合算を利用して確率論を展開する方法もある。それを詳論することは必ずしも必要とは思われないからから省略し、次節に要点をまとめておく。

近代的定義が提出されたことによって古典的定義が無意味になったわけではない。今後しばしば古典的定義の利用される機会を経験するであろう。

4. 確率の数値 相対頻度 f は明らかに $0 \leq f \leq 1$ であるから、確率のとり得る数値 P は $0 \leq P \leq 1$ とする。

観測するたびに必ず起る事象を Ω とかき、

$$P(\Omega) = 1$$

と定める ($P(A)$ は事象 A の確率を意味する)。

絶対に起らない事象を空事象といい ϕ とかき、

$$P(\phi) = 0$$

と定める。

事象 A は $A_1, A_2, \dots$ に分けられ、分けられたどの2つをとっても同時に起ることがないならば

$$P(A) = \sum_i P(A_i)$$

と定める。

これらの定め方の根拠について、5節、6節でふれておく(詳論を省く)。

5. 2つの事象の組み合わせ 各回の観測にあたり、特に事象 A と B とにだけ注目する。各回の観測において、 A, B の起り得る組み合わせはつぎの4通りあって、それ以外にはない。

(1) A だけが起って B は起らない (n_1)

(2) B だけが起って A は起らない (n_2)

(3) A, B ともに起る (n_3)

(4) A, B ともに起らない (n_4)

n 回の観測のうち、これら4通りのおのおのの起った回数を、上から順に n_1, n_2, n_3, n_4 とする。

事象 A の起ることを単に A とかき、 A も B も起ることを $A \cap B$ とかき、 A, B のうちの1方又は両方とも起ることを $A \cup B$ とかく。上記の観測において $A, B, A \cap B, A \cup B$ の相対頻度をそれぞれ、 $f(A), f(B), f(A \cap B), f(A \cup B)$ とかくことにすれば、明らかに

$$(1.5.1) \quad f(A) = \frac{n_1 + n_3}{n}, \quad n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$$

$$(1.5.2) \quad f(B) = \frac{n_2 + n_3}{n}$$

$$(1.5.3) \quad f(A \cap B) = \frac{n_3}{n}$$

$$(1.5.4) \quad f(A \cup B) = \frac{n_1 + n_2 + n_3}{n} = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$$

となる。

A が起ったという前提のもとに B が起ることを $B|A$ とかく。明らかに

$$(1.5.5) \quad f(B|A) = \frac{n_3}{n_1 + n_3} = \frac{f(A \cap B)}{f(A)}$$

である。全く同様に

$$(1.5.6) \quad f(A|B) = \frac{n_3}{n_2 + n_3} = \frac{f(A \cap B)}{f(B)}$$

6. 事象の組み合わせと確率 相対頻度に関する (1.5.1)~(1.5.6)

の式をもとにして、 $A \cup B, A \cap B$ に対する確率に関し、つぎの法則を設定することの妥当性が承認される。

$$(1.6.1) \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$(1.6.2) \quad P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

(1.6.1) は確率の加法定理とよばれ, (1.6.2) は確率の乗法定理又は複確率の定理とよばれる。 $P(B|A)$ は A が起ったという条件のもとに B の起る確率といい, 略して B の A に対する条件付確率という。

$$(1.6.3) \quad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad P(A) \neq 0$$

A, B が同時に起ることがないならば $A \cap B = \phi$ (空集合) とかき, $P(A \cap B) = 0$ である。このとき, A と B とは互いに排反するという。このとき, (1.6.1) により

$$(1.6.4) \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

となる。即ち, A, B が互いに排反するときは, A, B のうちのどちらかが起る確率は, A が起る確率と B が起る確率との和である。

$A_1, A_2, \dots, A_n$ なる n 個の事象があつて, どの2つをとっても互いに排反するならば, 即ち $A_i \cap A_j = \phi, i \neq j$ であるならば, (1.6.4) を拡張して

$$(1.6.5) \quad P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

であることは容易に判る。

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega \text{ かつ } A_i \cap A_j = \phi, i \neq j \text{ ならば}$$

$$(1.6.6) \quad P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1$$

となる。

無限個 (可付番) の事象 $A_1, A_2, \dots$ があつて, $A_i \cap A_j = \phi, i \neq j$ ならば

$$(1.6.7) \quad P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

である。

ある観測をしたとき, 事象 A の起らないことを $\bar{A}$ とかくことにすれば, A と $\bar{A}$ とは互いに余事象であるという。明らかに

$$A \cup \bar{A} = \Omega, \quad A \cap \bar{A} = \phi$$

であるから

$$(1.6.8) \quad P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

である。

7. 独立事象 事象 B の起ることが、事象 A が起ったか否かに全く無関係であるならば、 B は A と独立な事象であるという。このとき $P(B|A) = P(B)$ である。 B が A と独立で、かつ $P(B) \neq 0$ ならば、(1.6.2) により

$$(1.7.1) \quad P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A|B)$$

となる。即ち $P(A) = P(A|B)$ となり、 A は B が起ったか否かに全くよらない。よって A は B と独立な事象となる。いいかえれば、 A と B とは互いに独立な事象である。

A と B とが互いに独立な事象であるための必要十分条件は

$$(1.7.2) \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

である。

8. 例題

(1) 2つのさいころを振って、出た目の和が6である確率を求めよ。

(解) さいころを振ったとき出る目は、1から6までの数のうちのどれかである。それらのうちのどの目が出る確率も等しいものと前提する。

第1のさいころの目の6通りの出方のおのおのに対し、第2のさいころの目の出方が6通りあるから、2つのさいころを振ったとき起こり得る結果の数は36である。そして、そのどの1つが起る確率も等しい。2つのさいころの目の和が6になるのは、第1のさいころの目の1, 2, 3, 4, 5のそれぞれに対し、第2のさいころの目が、5, 4, 3, 2, 1であるときに限る。望ましい結果の数は5であり、起り得る結果の数は36である。その比 $\frac{5}{36}$ が求める確率である。

(注意) 問題の中にあるいくつかの結果のおのおのが起る確率が等しいことが、容易に認められる場合には、今後はいちいちことわないことにする。

この問題はつぎのように考えることもできる。

第1のさいころの目と第2のさいころの目の組み合わせが、

$$(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)$$

の場合が望ましい場合であり、その他に望ましい組み合わせはない。第1のさいころの目が1になることを A 、第2のさいころの目が5になることを B とすれば、

$$P(A)=P(B)=\frac{1}{6}$$

である。 A と B とは明らかに独立であるから、(1.7.2) により

$$P(A \cap B)=P(A) \cdot P(B)=\frac{1}{36}$$

2つのさいころの目が $(1, 5), (2, 4), \dots, (5, 1)$ という組み合わせになることをそれぞれ $C_1, C_2, \dots, C_5$ とかけば、明らかに

$$P(C_2)=P(C_3)=\dots=P(C_5)=P(C_1)=\frac{1}{36}$$

で、かつ

$$C_i \cap C_j = \phi, \quad i \neq j \quad (i, j=1, 2, \dots, 5)$$

である。よって

$$P(C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_5)=P(C_1)+P(C_2)+\dots+P(C_5)=\frac{5}{36}$$

(2) よく切ったトランプが2組ある。双方から1枚ずつカードを引きぬいて、スペードのAをひきあてる確率を求めよ。

(解) 第1組からスペードのAを引きあてることを A 、第2組からスペードのAを引きあててことを B とする。トランプのカードは52枚あるから、

$$P(A)=P(B)=\frac{1}{52}$$

明らかに A と B は互いに独立であるから、

$$P(A \cap B)=P(A)P(B)=\frac{1}{52^2}$$

である。求めるものは $P(A \cup B)$ である。

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)=\frac{2}{52}-\frac{1}{52^2}=\frac{103}{2704}$$

スペードのAを引きあてるとは、引きぬいた2枚のカードのうち、1枚だけがそれであっても、2枚ともそれであっても差し支えないものと解釈することはいうまでもない。

(3) よく切ったトランプが2組ある。双方から1枚ずつカードを引きぬいて、2枚のうち1枚だけがスペードのAである確率を求めよ。

(解) 引きぬいたカードがスペードのAであることを A とかけ、その余事象を $\bar{A}$ とかくことにする。第1組のトランプ、第2組のトランプについて、 $A_1, \bar{A}_1, A_2, \bar{A}_2$ と区別する。

望ましい場合は, $A_1 \cap \bar{A}_2 = B_1$, $\bar{A}_1 \cap A_2 = B_2$ の2つの場合であって, その他にない。

$$P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{52}$$

$$P(\bar{A}_1) = 1 - P(A_1) = \frac{51}{52}$$

同様に

$$P(\bar{A}_2) = \frac{51}{52}$$

$A_1, \bar{A}_2; \bar{A}_1, A_2$ はそれぞれ独立であるから,

$$P(B_1) = P(A_1 \cap \bar{A}_2) = P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2) = \frac{51}{52^2}$$

同様に

$$P(B_2) = \frac{51}{52^2}$$

$B_1 \cap B_2 = \phi$ (排反) であることは明らかであるから,

$$P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2) = 2 \times \frac{51}{52^2} = \frac{102}{2704}$$

この $P(B_1 \cup B_2)$ が求めるものである。

9. ベイズ (Bayes) の定理 n 個の事象 $A_1, A_2, \dots, A_n$ があって, どの2つをとっても互いに排反で, かつこれらのうちの1つは必ず起るものとする。即ち

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega, \quad A_i \cap A_j = \phi \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

任意の事象 X について

$$(1.9.1) \quad X = (A_1 \cap X) \cup (A_2 \cap X) \cup \dots \cup (A_n \cap X)$$

A_i と A_j とは $i \neq j$ のとき排反であると前提したから, $A_i \cap X$ と $A_j \cap X$ も互いに排反である。よって (1.9.1) と (1.6.5) とにより,

$$(1.9.2) \quad P(X) = P(A_1 \cap X) + P(A_2 \cap X) + \dots + P(A_n \cap X)$$

となる。

(1.6.2) により

$$P(A_i \cap X) = P(A_i)P(X|A_i)$$

であるから

$$(1.9.3) \quad P(X) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(X|A_i)$$

これらを (1.6.3) に適用すると

$$(1.9.4) \quad P(A_i|X) = \frac{P(A_i)P(X|A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(X|A_i)}$$

となる。(1.9.4) をベイズの定理という。

ベイズの定理はつぎのように解釈される。ある事象 X が起ったことを認めた。その原因は $A_1, A_2, \dots, A_n$ のうちの1つであることは確実で、かつどの2つをとっても互いに排反する。しかるとき、現実に認められた事象 X の原因が A_i に帰せられるべき確率を与えるものがベイズの定理である。この意味において、ベイズの定理は原因の確率に関する法則である。

例題 (1) 甲、乙2つのつぼがあって、甲には白球が6個、黒球が2個入っている。乙には白球が5個、黒球が10個入っている。甲から球を取り出す確率と、乙から球を取り出す確率とは等しく、いずれも $\frac{1}{2}$ であるとする。取り出された球が黒球であることが判った。この球が甲のつぼから取り出された確率はいくらか。

(解) 甲のつぼへ手を入れることを A_1 、乙のつぼへ手を入れることを A_2 とすると、

$$P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$$

つぼの中から黒球を取り出すことを X とすれば、

$$P(X|A_1) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, \quad P(X|A_2) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

これらを (1.9.4) に代入して

$$P(A_1|X) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}} = \frac{3}{11}$$

答 $\frac{3}{11}$