数理統計学概説

増補版

佐藤　喜代蔵　著

数理統計学概説

増補版

佐藤　喜代蔵　著

東海大学出版会

著者略歴

佐藤　喜代蔵（さとう　きよぞう）

昭和18年　東京大学理学部物理学科卒業
38年　東海大学講師
40年　日本大学教授
現在　日本大学文理学部応用数学科教授

数理統計学概説　増補版

1967年12月15日　第1刷発行
1981年4月10日　増補第1刷発行

著　者　佐　藤　喜代蔵
発行者　山　田　渉
印刷者　篠　倉　鉄　郎

東京都新宿区新宿3－27－4
電話（356）1541　振替東京0-46614
発行所　東海大学出版会

落丁，乱丁はお取替えします。　3041-0471-5110　KK 第一印刷所

序

本書は，数理統計学の全般を地道に，初めて学ぼうとするかたがたのために書かれたものである。理論をおろそかにしないように努めた積りであるが，浅学非才のため不十分の点があることをおそれる。数式の導き方も繁をいとわず書き記すことにしたが，これらに目をつぶって先を急がれても勿論差し支えない筈である。

数理統計学は，品質管理，信頼性理論，物理学，医学，遺伝学，心理学，社会学，経済学等極めて広範囲にわたり高度に応用されている。特にオペレーションズ・リサーチにおいて著しい。それら各分野において，応用統計学とでもいうべき独立の地歩を築いているといってもよいのではあるまいか。本書では，それら応用面にふれないで，数理統計学の基礎事項を解説することをねらいとしている。本書に説くところを会得しておけば，応用統計学のどの分野に深くつき進んでいく場合にも不自由はないと考える。

おわりに，本書の刊行につき，多大のご厚意を賜った東海大学出版会のかたがたに心から感謝の意を表します。

1967年11月

著　者

数　理　統　計　学

目　　次

第 1 章　確率論の基礎定理

第 2 章　確率変数，分布関数

第 3 章　期待値，分散，標準偏差

第 4 章　積率（モーメント），積率母関数，特性関数

第５章　２項分布，多項分布

第６章　ポアソン分布

第７章　正規分布

第８章　その他の分布

第９章　中心極限定理，その他

第10章　標　本

第11章　検　　定

第12章　推定の手順

第13章　χ^2分布とその応用

第14章　t分布とその応用

第15章　F　分　布

第16章　点　推　定

第 17 章 検定力と尤度比検定

第 18 章 回帰直線・相関

第 19 章 分散分析

第1章　確率論の基礎定理

1. 確　率　観測・経験に際し，全く偶然的に発生する事柄を事象という。起りそうな事象と起りそうでない事象とがあることは何人も認めるところである。たとえば，さいころを1個ふるとき，1の目の出ることより，どれか奇数の目の出ることの方が起りそうであることは明らかである。日常生活において，起りそうな事象に対しては心構えをし，これに対処するように準備していないと困ることが多い。そのために，起りそうな事象の順序づけをし，準備をする優先順位をつけたくなる。それには，起りそうな程度を数値で表現できれば大変便利である。確率とはまさにそのような数値であるが，起りそうな程度に数値を付与するためには，具体的方法を示さなくてはならない。

確率という言葉は，日常会話の言葉としても使われているが，数学の対象として使う場合には，確率の対象となる事象は，くり返し起り得るものでなくてはならない。ただ1回しか起らない事象に確率という術語を使うことはできない*。同じ環境の下に何度もくりかえし観測されるか，経験される可能性のある事象に対してのみ，術語としての確率が定義される。

2. 確率と相対頻度　n 回の観測において，ある事象 A が m 回起ったとするならば，

$$f_n(A)=\frac{m}{n}$$

を，この観測における事象 A の相対頻度という。この観測をくりかえせば，$f_n(A)$ は必ずしも同じ値を示さないことは日常経験することである。$\frac{m}{n}$ なる数値は一定ではなく，何らかの規則性をもってバラつくものである。この

* たとえば，A君とB嬢との結婚が噂されているとき，2人の結婚の確率は80%などと日常会話には使われるが，数学の術語として使われたものとはみなさない。

ことを，相対頻度 $f_n(A)$ は事象 A に固有の分布に従うという。

n が小さいときの $f_n(A)$ のバラツキは，n が大きいときのバラツキより大きいことは日常経験することである*。確率は相対頻度と極めて強い結びつきをもっていることは容認できるが，相対頻度が一定の値をもたない以上これを直ちに確率とすることはできない。$\lim_{n\to\infty} f_n(A)$ を事象 A の確率と定義することはよさそうに思われるが，$n\to\infty$ のときどんな結果を得るのか実験できないし，理論的に収束するのか否かも判らないことが多い。この難点を考慮し，Quetelet の説に従い，つぎのように考える。

確率は事象に付随している特性の1つである。1連の観測毎に得られる相対頻度は，その特性の測定値であって，固有の分布法則に従って実現した値である。物体には，体積とか質量とかいくつかの特性がある如く，事象には確率その他の特性があると考えるのである。体積を測定器の許す限度まで精密に測定すれば，その数値がバラつく如く，確率も，その測定値はバラついて，相対頻度として記録される。

3.　確率の定義　　試行によって起り得るあらわれ方が n 通りあるとき，そのうちの m 通りのあらわれ方によって事象が起るのであれば，この事象の起る確率を $\frac{m}{n}$ とする。これを確率の古典的定義とよぶ。1例として，さいころを振って偶数の目の出る確率を問うことにする。さいころを振ったとき起り得るあらわれ方は6通りある。そのうち3通りの方法で偶数の目があらわれるから，偶数の目のあらわれる確率は $\frac{3}{6}$ とする。

このような古典的定義を受け容れるためには，試行によって起り得るあらゆるあらわれ方が同等の確率で起ることを前提としなければならない。同等の確率で起ることを何によって知るのか。このように考えると，古典的定義は循環論法におちいることになる。またさいころのバランスを故意に狂わせてあれば古典的定義は明らかに容認できない。その他いくつかの欠陥が指摘

---

*　ここではバラつきの尺度を定義しないで使っておく。後に述べる標準偏差はバラつきを表わす1つの尺度である。

される。

これを改善するために，相対頻度と関連させて確率を数値表現する方法がある。また公理を設け，集合算を利用して確率論を展開する方法もある。それを詳論することは必ずしも必要とは思われないからから省略し，次節に要点をまとめておく。

近代的定義が提出されたことによって古典的定義が無意味になったわけではない。今後しばしば古典的定義の利用される機会を経験するであろう。

4.　確率の数値　相対頻度 f は明らかに $0 \leqq f \leqq 1$ であるから，確率のとり得る数値 P は $0 \leqq P \leqq 1$ とする。

観測するたびに必ず起る事象を Ω とかき，

$$P(\Omega)=1$$

と定める（$P(A)$ は事象 A の確率を意味する)。

絶対に起らない事象を空事象といい ϕ とかき，

$$P(\phi)=0$$

と定める。

事象 A は A_1, A_2,……に分けられ，分けられたどの2つをとっても同時に起ることがないならば

$$P(A)=\sum_i P(A_i)$$

と定める。

これらの定め方の根拠について，5節，6節でふれておく(詳論を省く)。

5.　2つの事象の組み合わせ　各回の観測にあたり，特に事象 A と B とにだけ注目する。各回の観測において，A, B の起り得る組み合わせはつぎの4通りあって，それ以外にはない。

(1)　A だけが起って B は起らない　(n_1)

(2)　B だけが起って A は起らない　(n_2)

(3) A, B ともに起る (n_3)

(4) A, B ともに起らない (n_4)

n 回の観測のうち，これら4通りのおのおのの起った回数を，上から順に n_1, n_2, n_3, n_4 とする。

事象 A の起ることを単に A とかき，A も B も起ることを $A\cap B$ とかき，A, B のうちの1方又は両方とも起ることを $A\cup B$ とかく。上記の観測において A, B, $A\cap B$, $A\cup B$ の相対頻度をそれぞれ，$f(A)$, $f(B)$, $f(A\cap B)$, $f(A\cup B)$ とかくことにすれば，明らかに

$$(1.5.1) \qquad f(A)=\frac{n_1+n_3}{n}, \qquad n=n_1+n_2+n_3+n_4$$

$$(1.5.2) \qquad f(B)=\frac{n_2+n_3}{n}$$

$$(1.5.3) \qquad f(A\cap B)=\frac{n_3}{n}$$

$$(1.5.4) \qquad f(A\cup B)=\frac{n_1+n_2+n_3}{n}=f(A)+f(B)-f(A\cap B)$$

となる。

A が起ったという前提のもとに B が起ることを $B|A$ とかく。明らかに

$$(1.5.5) \qquad f(B|A)=\frac{n_3}{n_1+n_3}=\frac{f(A\cap B)}{f(A)}$$

である。全く同様に

$$(1.5.6) \qquad f(A|B)=\frac{n_3}{n_2+n_3}=\frac{f(A\cap B)}{f(B)}$$

6. 事象の組み合わせと確率 相対頻度に関する (1.5.1)～(1.5.6) の式をもとにして，$A\cup B$, $A\cap B$ に対する確率に関し，つぎの法則を設定することの妥当性が承認される。

$$(1.6.1) \qquad P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$(1.6.2) \qquad P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$$

(1.6.1) は確率の加法定理とよばれ，(1.6.2) は確率の乗法定理又は複確率の定理とよばれる。$P(B|A)$ は A が起ったという条件のもとに B の起る確率といい，略して B の A に対する条件付確率という。

$$(1.6.3) \qquad P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)},\ P(A)\neq 0$$

A, B が同時に起ることがないならば $A\cap B=\phi$ (空集合) とかき，$P(A\cap B)=0$ である。このとき，A と B とは互いに排反するという。このとき，(1.6.1) により

$$(1.6.4) \qquad P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

となる。即ち，A, B が互いに排反するときは，A, B のうちのどちらかが起る確率は，A が起る確率と B が起る確率との和である。

A_1, A_2, ……, A_n なる n 個の事象があって，どの2つをとっても互いに排反するならば，即ち $A_i\cap A_j=\phi$, $i\neq j$ であるならば，(1.6.4) を拡張して

$$(1.6.5) \qquad P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots\cdots+P(A_n)$$

であることは容易に判る。

$\bigcup_{i=1}^{n} A_i=\Omega$ でかつ $A_i\cap A_j=\phi$, $i\neq j$ ならば

$$(1.6.6) \qquad P(A_1)+P(A_2)+\cdots\cdots+P(A_n)=1$$

となる。

無限個 (可付番) の事象 A_1, A_2, ……があって，$A_i\cap A_j=\phi$, $i\neq j$ ならば

$$(1.6.7) \qquad P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

である。

ある観測をしたとき，事象 A の起らないことを $\bar{A}$ とかくことにすれば，A と $\bar{A}$ とは互いに余事象であるという。明らかに

$$A\cup\bar{A}=\Omega, \qquad A\cap\bar{A}=\phi$$

であるから

(1.6.8)　　$$P(A)=1-P(\bar{A})$$

である。

7. 独立事象

事象 B の起ることが，事象 A が起ったか否かに全く無関係であるならば，B は A と独立な事象であるという。このとき $P(B|A)=P(B)$ である。B が A と独立で，かつ $P(B)\neq 0$ ならば，(1.6.2) により

(1.7.1)　　$$P(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=P(A|B)$$

となる。即ち $P(A)=P(A|B)$ となり，A は B が起ったか否かに全くよらない。よって A は B と独立な事象となる。いいかえれば，A と B とは互いに独立な事象である。

A と B とが互いに独立な事象であるための必要十分条件は

(1.7.2)　　$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

である。

8. 例　　題

(1)　2つのさいころを振って，出た目の和が6である確率を求めよ。

(解)　さいころを振ったとき出る目は，1から6までの数のうちのどれかである。それらのうちのどの目が出る確率も等しいものと前提する。

第1のさいころの目の6通りの出方のおのおのに対し，第2のさいころの目の出方が6通りあるから，2つのさいころを振ったとき起こり得る結果の数は 36 である。そして，そのどの1つが起る確率も等しい。2つのさいころの目の和が6になるのは，第1のさいころの目の1, 2, 3, 4, 5のそれぞれに対し，第2のさいころの目が，5, 4, 3, 2, 1 であるときに限る。望ましい結果の数は5であり，起り得る結果の数は 36 である。その比 $\frac{5}{36}$ が求める確率である。

(注意)　問題の中にあるいくつかの結果のおのおのが起る確率が等しいことが，容易に認められる場合には，今後はいちいちことわらないことにする。

この問題はつぎのように考えることもできる。

第1のさいころの目と第2のさいころの目の組み合わせが，

$$(1,\ 5),\ (2,\ 4),\ (3,\ 3),\ (4,\ 2),\ (5,\ 1)$$

の場合が望ましい場合であり，その他に望ましい組み合わせはない。第1のさいころの目が1になることを A，第2のさいころの目が5になることを B とすれば，

$$P(A)=P(B)=\frac{1}{6}$$

である。A と B とは明らかに独立であるから，(1.7.2) により

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{36}$$

2つのさいころの目が (1, 5), (2, 4), ……, (5, 1) という組み合わせになることをそれぞれ C_1, C_2, ……, C_5 とかけば，明らかに

$$P(C_2)=P(C_3)=\cdots\cdots=P(C_5)=P(C_1)=\frac{1}{36}$$

で，かつ

$$C_i\cap C_j=\phi,\quad i\neq j\quad (i,j=1,2,\cdots,5)$$

である。よって

$$P(C_1\cup C_2\cup\cdots\cdots\cup C_5)=P(C_1)+P(C_2)+\cdots\cdots+P(C_5)=\frac{5}{36}$$

(2)　よく切ったトランプが2組ある。双方から1枚ずつカードを引きぬいて，スペードのAをひきあてる確率を求めよ。

(解)　第1組からスペードのAを引きあてることを A，第2組からスペードのAを引きあてことを B とする。トランプのカードは52枚あるから，

$$P(A)=P(B)=\frac{1}{52}$$

明らかに A と B は互いに独立であるから，

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{1}{52^2}$$

である。求めるものは $P(A\cup B)$ である。

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{2}{52}-\frac{1}{52^2}=\frac{103}{2704}$$

スペードのAを引きあてるとは，引きぬいた2枚のカードのうち，1枚だけがそれであっても，2枚ともそれであっても差し支えないものと解釈することはいうまでもない。

(3)　よく切ったトランプが2組ある。双方から1枚ずつカードを引きぬいて，2枚のうち1枚だけがスペードのAである確率を求めよ。

(解)　引きぬいたカードがスペードのAであることを A とかき，その余事象を $\bar{A}$ とかくことにする。第1組のトランプ，第2組のトランプについて，A_1, $\bar{A}_1$, A_2, $\bar{A}_2$ と区別する。

望ましい場合は，$A_1\cap\bar{A}_2=B_1$，$\bar{A}_1\cap A_2=B_2$ の2つの場合であって，その他にない。

$$P(A_1)=P(A_2)=\frac{1}{52}$$

$$P(\bar{A}_1)=1-P(A_1)=\frac{51}{52}$$

同様に

$$P(\bar{A}_2)=\frac{51}{52}$$

A_1，$\bar{A}_2$；$\bar{A}_1$，A_2 はそれぞれ独立であるから，

$$P(B_1)=P(A_1\cap\bar{A}_2)=P(A_1)\cdot P(\bar{A}_2)=\frac{51}{52^2}$$

同様に

$$P(B_2)=\frac{51}{52^2}$$

$B_1\cap B_2=\phi$（排反）であることは明らかであるから，

$$P(B_1\cup B_2)=P(B_1)+P(B_2)=2\times\frac{51}{52^2}=\frac{102}{2704}$$

この $P(B_1\cup B_2)$ が求めるものである。

9.　ベイズ（Bayes）の定理　　n 個の事象 $A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n$ があって，どの2つをとっても互いに排反で，かつこれらのうちの1つは必ず起るものとする。即ち

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i=\Omega, \qquad A_i\cap A_j=\phi \qquad i\neq j, \qquad i, j=1,2,\cdots,n$$

任意の事象 X について

(1.9.1)　　$X=(A_1\cap X)\cup(A_2\cap X)\cup\cdots\cdots\cup(A_n\cap X)$

A_i と A_j とは $i\neq j$ のとき排反であると前提したから，$A_i\cap X$ と $A_j\cap X$ も互いに排反である。よって (1.9.1) と (1.6.5) とにより，

(1.9.2)　　$P(X)=P(A_1\cap X)+P(A_2\cap X)+\cdots\cdots+P(A_n\cap X)$

となる。

(1.6.2) により

$$P(A_i\cap X)=P(A_i)P(X|A_i)$$

であるから

$$P(X)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(X|A_i) \tag{1.9.3}$$

これらを (1.6.3) に適用すると

$$P(A_i|X)=\frac{P(A_i)P(X|A_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(X|A_i)} \tag{1.9.4}$$

となる。(1.9.4) をベイズの定理という。

ベイズの定理はつぎのように解釈される。ある事象 X が起ったことを認めた。その原因は A_1, A_2, ……, A_n のうちの１つであることは確実で，かつどの２つをとっても互いに排反する。しかるとき，現実に認められた事象 X の原因が A_i に帰せられるべき確率を与えるものがベイズの定理である。この意味において，ベイズの定理は原因の確率に関する法則である。

例題 (1) 甲，乙２つのつぼがあって，甲には白球が６個，黒球が２個入っている。乙には白球が５個，黒球が10個入っている。甲から球を取り出す確率と，乙から球を取り出す確率とは等しく，いずれも$\frac{1}{2}$であるとする。取り出された球が黒球であることが判った。この球が甲のつぼから取り出された確率はいくらか。

(解) 甲のつぼへ手を入れることを A_1, 乙のつぼへ手を入れることを A_2 とすると,

$$P(A_1)=P(A_2)=\frac{1}{2}$$

つぼの中から黒球を取り出すことを X とすれば,

$$P(X|A_1)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}, \qquad P(X|A_2)=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$$

これらを (1.9.4) に代入して

$$P(A_1|X)=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}}=\frac{3}{11}$$

答 $\frac{3}{11}$