exercices de mathématiques

oraux x-ens

analyse 3

Serge Francinou
Hervé Gianella
Serge Nicolas

CASSINI

SERGE FRANCINOU
HERVÉ GIANELLA
SERGE NICOLAS

Exercices de mathématiques des oraux de l'École polytechnique et des Écoles normales supérieures

Analyse. Tome III

Deuxième édition corrigée

常州大学山书馆
藏书章

CASSINI

Serge Francinou, ancien élève de l'École normale supérieure et agrégé de Mathématiques est actuellement professeur en classe préparatoire au lycée Henri IV.

Hervé Gianella, ancien élève de l'École normale supérieure et agrégé de Mathématiques est actuellement professeur en classe préparatoire au lycée Blaise Pascal d'Orsay.

Serge Nicolas, ancien élève de l'École normale supérieure et agrégé de Mathématiques est actuellement professeur en classe préparatoire au lycée Henri IV.

ISBN 978-2-84225-214-4
(1re édition, 2010, 978-2-84225-093-5)

© Cassini, Paris, 2014.

EXERCICES DE MATHÉMATIQUES
ORAUX X-ENS

Enseignement des mathématiques

1. J.-Y. Ouvrard, *Probabilités I*
2. J. Hubbard, B. West, *Équations différentielles et systèmes dynamiques*
3. M. Cottrell, V. Genon-Catalot, Ch. Duhamel, Th. Meyre, *Exercices de probabilités*
4. F. Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*
5. J.-Y. Ouvrard, *Probabilités II*
6. G. Zémor, *Cours de cryptographie*
7. A. Szpirglas, *Exercices d'algèbre*
8. B. Perrin-Riou, *Algèbre, arithmétique et Maple*
10. S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices des oraux X-ENS, Algèbre 1*
11. S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices des oraux X-ENS, Analyse 1*
12. S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices des oraux X-ENS, Algèbre 2*
13. S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices des oraux X-ENS, Analyse 2*
14. S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices des oraux X-ENS, Algèbre 3*
15. H. Krivine, *Exercices de mathématiques pour physiciens*
16. J. Jacod, Ph. Protter, *L'essentiel en théorie des probabilités*
17. M. Willem, *Analyse fonctionnelle élémentaire*
18. É. Amar, É. Matheron, *Analyse complexe*
20. D. Perrin, *Mathématiques d'école*
22. P. Bourgade, *Olympiades internationales de mathématiques 1976-2005*
23. V. Prasolov, *Problèmes et théorèmes d'algèbre linéaire*
24. R. Sá Earp, E. Toubiana, *Introduction à la géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann*
25. L. Di Menza, *Analyse numérique des équations aux dérivées partielles*
26. B. Candelpergher, *Calcul intégral*
27. J. Hubbard, B. West, *Équations différentielles et systèmes dynamiques, vol. 1*
28. J. Hubbard, B. West, *Équations différentielles et systèmes dynamiques, vol. 2*
29. S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices des oraux X-ENS, Analyse 3*
30. C. Zuily, *Problèmes de distributions et d'équations aux dérivées partielles*
31. B. Makarov *et al.*, *Problèmes d'analyse réelle*
32. S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices des oraux X-ENS, Analyse 4*

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

Introduction

Cet ouvrage est le troisième tome d'analyse d'un recueil d'exercices de mathématiques destiné à la préparation des oraux des concours d'entrée aux Écoles normales supérieures et à l'École polytechnique. Il comportera sept tomes, trois d'algèbre et quatre d'analyse.

La vocation première des Écoles normales est de former des chercheurs ou des enseignants-chercheurs. Le concours d'entrée vise donc à détecter les qualités scientifiques du candidat, son aptitude à la recherche. À l'oral, on jugera avant tout la capacité de prendre des initiatives, d'utiliser une indication, de mener à bien une démarche. On ne sera pas surpris que les exercices posés aient un contenu mathématique riche, qu'ils soient très éloignés du simple exercice technique d'application du cours, qu'ils soient souvent difficiles. Ils visent la plupart du temps à la démonstration d'un résultat mathématique significatif. Ils pourraient apparaître excessivement difficiles, si on perdait de vue le déroulement concret de l'épreuve. L'oral des ENS est un long dialogue (l'épreuve dure environ cinquante minutes, comme d'ailleurs à l'École polytechnique) entre le candidat et l'examinateur, qui tout au long de l'épreuve fournit des indications, quand c'est nécessaire, pour relancer la réflexion du candidat et tester ses réactions. Il est d'ailleurs impossible de rendre pleinement compte dans un recueil d'exercices du caractère oral de l'épreuve.

L'École polytechnique, quant à elle, est plus généraliste. Les exercices posés au concours sont de facture plus classique et, en règle générale, l'examinateur intervient moins. C'est au candidat de montrer sa maîtrise du programme dans la résolution d'un exercice dont la difficulté est cependant très variable. Certains sont proches des exercices d'ENS. Les énoncés circulent d'ailleurs d'un concours à l'autre, ou peuvent même être repris d'exercices d'Olympiades.

Les énoncés qui figurent dans ce recueil ont été donnés entre 1996 et 2010. Ils sont extraits pour l'essentiel des listes publiées chaque année par la RMS (*Revue des mathématiques de l'enseignement supérieur* aux éditions Vuibert jusqu'en 2003 et désormais *Revue de la filière Mathématiques* aux éditions e.net) dont nous remercions les auteurs pour l'aide précieuse qu'ils apportent ainsi aux élèves et aux professeurs des classes préparatoires. Il s'agit de versions communiquées par les étudiants, reflétant la compréhension que ceux-ci ont eue de l'exercice et le déroulement conjoncturel de leur oral, comme le montrent les variations d'une année à l'autre pour un même exercice. Nous n'avons pas hésité à les modifier, pour rectifier des erreurs, compléter un énoncé quand manifestement l'exercice s'est arrêté avant que le résultat que l'examinateur avait en vue ne soit atteint, ou ajouter des indications.

Nous avons choisi de laisser quelques énoncés « bruts », ceux pour lesquels nous estimons qu'une démarche naturelle (qui peut être longue et ardue) permet de conduire à la solution. Pour d'autres exercices, nous avons pris la liberté de rajouter des questions intermédiaires, qui auraient pu être celles posées par l'examinateur. Quitte à perdre en concision, nous avons tenu à rédiger les solutions les plus pédagogiques possible, essayant d'exposer clairement les idées et démarches des raisonnements sans pour autant escamoter les détails ou calculs qui peuvent paraître évidents. On évite autant que possible l'introduction d'une astuce ou d'un objet *ad hoc* permettant d'atteindre rapidement la solution. S'il n'y a pas moyen d'expliquer l'origine de cette astuce, c'est que l'exercice est peu intéressant et que l'étudiant en tirera peu de profit.

À l'intérieur de chaque chapitre, les exercices ont été regroupés thématiquement, et à l'intérieur de chaque thème, souvent par ordre de difficulté croissante. Ainsi regroupés, ils apparaîtront plus accessibles, car plongés dans leur contexte mathématique, éclairés par d'autres exercices voisins. Les introductions historiques qui ouvrent chaque chapitre, outre leur intérêt propre, visent au même but. Enfin, nous avons agrémenté les énoncés de quelques remarques préliminaires. Sans faire de rappels de cours systématiques, nous avons énoncé, voire redémontré certains résultats : lemmes classiques, intervenant dans la résolution d'un grand nombre d'exercices, ou résultats au contraire à la lisière du programme, mais utiles, pour lesquels des éclaircissements étaient nécessaires. On trouvera aussi des remarques de synthèse ou des généralisations qui, nous l'espérons, pourront amener le candidat curieux à approfondir ses connaissances. Les quelques indications bibliographiques ont le même objectif.

Le lecteur ne tirera profit de ce livre d'exercices que s'il cherche des solutions personnelles avant d'en étudier les corrigés. Une bonne connaissance du cours est indispensable. En effet, les théorèmes du programme fournissent bon nombre de schémas de démonstration. Rappelons aussi quelques démarches générales qui peuvent faciliter l'appréhension des exercices difficiles :

▷ en topologie, ne pas hésiter à faire une figure pour se faire une idée géométrique de la situation ;

▷ introduire des suites pour utiliser les caractérisations séquentielles des différentes notions (limite, compacité, complétude...) ;

▷ considérer les suites f récurrentes pour les questions de points fixes d'une fonction f ;

▷ en ce qui concerne les intégrales, les changements de variable et les intégrations par parties sont deux techniques à envisager en permanence ;

▷ commencer par un calcul formel (interversion série-intégrale, dérivation sous le signe intégral) pour s'assurer du bien-fondé de la démarche avant de justifier par les théorèmes *ad hoc*.

Au-delà des étudiants en classe préparatoire, ces ouvrages intéresseront aussi les candidats au CAPES et à l'Agrégation, qui y trouveront matière à réviser les principales notions du programme, ainsi que des exemples pour nourrir un développement pour leur oral.

Voyons maintenant plus précisément le contenu de ce tome 3 d'analyse. Il est centré sur la topologie, chapitre qui représente un bon quart du programme de mathématiques Spéciales. Les exercices sont répartis dans trois chapitres différents : le premier contient des exercices sur les normes, les notions topologiques associées, la convergence des suites et la continuité, notamment des applications linéaires. Le second est dédié aux notions de compacité et de connexité par arcs. Enfin le troisième est consacré aux exercices liés à la complétude et aux espaces de Hilbert. Le quatrième chapitre, est à part, et regroupe des exercices sur les intégrales sur un intervalle quelconque.

Comme dans les autres tomes, les exercices sont classés par thème. La difficulté est toutefois plutôt croissante : les chapitres commencent par des questions techniques ou des savoir-faire indispensables (comparaison de normes, étude d'intégrabilité...) et se terminent souvent par des exercices difficiles qui ont pour objet de démontrer des théorèmes du niveau licence ou master (prolongement de Tietze, théorème de Krein-Milman, théorème de Banach-Steinhaus, inversion de Fourier...).

Le quatrième et dernier tome d'analyse portera sur le calcul différentiel, les équations différentielles linéaires et non linéaires et sur la géométrie différentielles des courbes. Il était initialement prévu un seul tome regroupant l'ensemble mais devant l'ampleur prise par celui-ci il a été nécessaire de le scinder en deux volumes.

Nous remercions André et Catherine Bellaïche, ainsi que Joon Kwoon pour leur relecture enrichissante.

Enfin, si vous souhaitez nous contacter pour nous faire part de vos remarques, vous pouvez envoyer un courrier à l'adresse *fgn.cassini@free.fr*.

Chapitre 1
Espaces vectoriels normés

La topologie est un vaste champ d'étude dont le cœur est l'étude des déformations d'objets par des transformations continues. On reconnaît en général le problème des sept ponts de Königsberg, formulé par Leonhard Euler en 1736, comme l'un des premiers de nature topologique (par opposition à un problème propre aux distances). Pour un « polyèdre à trous », la formule d'Euler qui est valable pour un polyèdre convexe $v - e + f = 2$ *(*v *nombre de sommets,* e *d'arêtes et* f *de faces) tombe en défaut comme le note Antoine-Jean Lhuilier en 1813 : s'il possède* g *trous, on a* $v-e+f = 2-2g$ *où* g *apparaît comme un invariant topologique de la surface. On doit à Listing la reprise d'idées formulées mais non publiées par Gauss et il est le premier à utiliser le mot « topologie » dans les années 1840 dans ces études autour des courbes et surfaces. En 1858, de manière indépendante, Möbius et Listing décrivent une surface fermée dont le bord est homéomorphe à un cercle : le ruban de Möbius ne possède qu'une face et n'est pas orientable. En ce début de la deuxième moitié du* XIX$^{\text{e}}$ *siècle, Riemann poursuit l'étude des surfaces et notamment celles qui portent aujourd'hui son nom. Jordan et surtout Poincaré (en 1895) mettront au clair la notion d'homotopie et de groupe fondamental d'une surface en envisageant des déformations continues de lacets tracés sur une surface donnée et introduiront de nouveaux invariants topologiques comme la caractéristique d'Euler-Poincaré.*

Mais, parallèlement au cours de ce XIX$^{\text{e}}$ *siècle, une conscience plus fine des notions de convergence et de limites va faire émerger les concepts fondamentaux qui fondent la topologie. En 1817, Bolzano exprime une vision « statique » de la convergence en notant qu'un ensemble infini et borné de réels possède un point d'accumulation (i.e. il existe un réel* x *pour lequel tout voisinage possède un point de l'ensemble autre que* x*). Ce fameux résultat appelé propriété de Bolzano-Weierstrass fut démontré rigoureusement par Weierstrass en 1877 dans des publications où l'on trouve la notion de voisinage. Cantor en 1872, à partir de travaux sur les séries trigonométriques et les nombres irrationnels, s'intéresse à l'ensemble dérivé d'une partie* E *de* $\mathbb{R}$ *obtenu en prenant l'ensemble des points d'accumulation de* E *et à l'occasion définit les notions de parties ouvertes, fermées... C'est Fréchet en 1906 dans son désir d'unifier le langage topologique sur les ensembles de points et celui de l'analyse fonctionnelle naissante (calcul des variations, étude d'opérateurs linéaires...) qui va étendre ces concepts en passant de* $\mathbb{R}$ *et des espaces euclidiens à* *la notion plus générale d'espace métrique. Un autre grand fondateur de l'analyse fonctionnelle moderne, Banach laisse de riches travaux où l'on retrouve de nombreux résultats qui portent aujourd'hui son nom. Les espaces de Banach sont définis dans sa thèse en 1920. Enfin, la notion moderne d'espace topologique apparue en 1914 est due essentiellement à Hausdorff (et à un amendement de Kuratowski en 1922).*

Rappelons que, E *étant un espace vectoriel réel ou complexe, une norme sur* E *est une application* $\mathrm{N} : \mathrm{E} \to \mathbb{R}_+$ *vérifiant les trois axiomes suivants :*

(i) $\forall x \in \mathrm{E},\ \mathrm{N}(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$ *(axiome de séparation) ;*

(ii) $\forall x \in \mathrm{E},\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \mathrm{N}(\lambda x) = |\lambda|\mathrm{N}(x)$ *(axiome d'homogénéité) ;*

(iii) $\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2,\ \mathrm{N}(x+y) \leqslant \mathrm{N}(x) + \mathrm{N}(y)$ *(inégalité triangulaire).*

Il en découle aisément que la boule unité de E *pour* N *est une partie convexe. L'exercice suivant montre que l'inégalité triangulaire équivaut à la convexité de l'ensemble* $\{x \in \mathrm{E},\ \mathrm{N}(x) \leqslant 1\}$ *lorsque les axiomes (i) et (ii) sont satisfaits.*

1.1. Sur l'inégalité triangulaire

Soit E un espace vectoriel réel et $\mathrm{N} : \mathrm{E} \to \mathbb{R}_+$ vérifiant pour tout $(x,y) \in \mathrm{E}^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathrm{N}(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ et $\mathrm{N}(\lambda x) = |\lambda|\mathrm{N}(x)$.

1. Montrer que N est une norme si, et seulement si, l'ensemble $\mathrm{B} = \{x \in \mathrm{E},\ \mathrm{N}(x) \leqslant 1\}$ est convexe.

2. On suppose que $\mathrm{N}(x+y)^2 \leqslant 2(\mathrm{N}(x)^2 + \mathrm{N}(y)^2)$ pour tout couple $(x,y) \in \mathrm{E}^2$. Montrer que N est une norme.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Si N est une norme il est clair que B est convexe : en effet, si x et y sont dans B et $t \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{N}((1-t)x + ty) &\leqslant \mathrm{N}((1-t)x) + \mathrm{N}(ty) \leqslant |1-t|\mathrm{N}(x) + |t|\mathrm{N}(y)\\ &\leqslant (1-t)\mathrm{N}(x) + t\mathrm{N}(y) \leqslant 1 - t + 1 = 1\end{aligned}$$

et $(1-t)x + ty \in \mathrm{B}$.

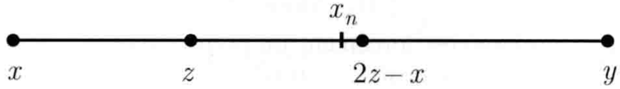
Supposons réciproquement que B est convexe. Considérons x et y dans E. On veut prouver que $\mathrm{N}(x+y) \leqslant \mathrm{N}(x) + \mathrm{N}(y)$. On peut supposer x et y non nuls sans quoi l'inégalité est triviale. Par homogénéité, les vecteurs $\dfrac{x}{\mathrm{N}(x)}$ et $\dfrac{y}{\mathrm{N}(y)}$ sont dans B. Il en est donc de même de leur barycentre z affecté des masses positives $\mathrm{N}(x)$ et $\mathrm{N}(y)$. On a $z = \dfrac{x+y}{\mathrm{N}(x)+\mathrm{N}(y)}$ et le fait que $\mathrm{N}(z) \leqslant 1$ conduit à $\mathrm{N}(x+y) \leqslant \mathrm{N}(x) + \mathrm{N}(y)$.

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

2. On va utiliser la caractérisation de la question précédente et montrer que B est convexe. Soient x et y deux vecteurs de B et $t \in [0,1]$. Posons $z = (1-t)x + ty$, l'objectif étant de prouver que $z \in \mathrm{B}$. La majoration naturelle

$$\mathrm{N}(z)^2 \leqslant 2\Big(\mathrm{N}((1-t)x))^2 + \mathrm{N}(ty)^2\Big) \leqslant 2((1-t)^2 + t^2) = 2 - 4t(1-t)$$

ne permet pas de conclure directement. Mais elle montre toutefois que $\mathrm{N}(z) \leqslant 1$ lorsque $t = \dfrac{1}{2}\cdot$ Autrement dit, B est stable par passage au milieu. Il est alors facile d'en déduire que $z \in \mathrm{B}$ lorsque t est un rationnel dyadique, c'est-à-dire de la forme $t = \dfrac{k}{2^n}$ avec $0 \leqslant k \leqslant 2^n$ (par récurrence sur n). Or l'ensemble de ces rationnels dyadiques est dense dans $[0,1]$. Supposons sans perte de généralité que $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2}\cdot$ L'idée est alors d'écrire z comme barycentre de x et d'un autre point de B avec des poids qui tendent vers $\dfrac{1}{2}\cdot$ En effet, comme on l'a vu plus haut, la majoration de la norme d'un barycentre est optimale lorsqu'il s'agit du milieu. Le symétrique de x par rapport à z est le point $x' = 2z - x = (1-2t)x + 2ty$.



Choisissons une suite de rationnels dyadiques $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\left]0, \dfrac{1}{2}\right]$ qui converge vers t et posons $x_n = (1-2t_n)x + 2t_n y$. D'après ce qui précède $x_n \in \mathrm{B}$ pour tout n. Par ailleurs, on a

$$z = (1-t)x + ty = (1-t)x + t\left(\frac{1}{2t_n}x_n - \frac{1-2t_n}{2t_n}x\right) = (1-a_n)x + a_n x_n,$$

avec $a_n = \dfrac{t}{2t_n}\cdot$ On a alors pour tout n,

$$\mathrm{N}(z)^2 \leqslant 2\Big((1-a_n)^2 + a_n^2\Big)$$

et il suffit de faire tendre n vers l'infini pour conclure que $\mathrm{N}(z) \leqslant 1$. $\lhd$

Le boule unité fermée B *d'une norme caractérise cette norme. En effet, si* N_1 *et* N_2 *sont deux normes qui ont la même boule unité fermée* B *et si* x *est un vecteur non nul,* $\dfrac{x}{\mathrm{N}_1(x)} \in \mathrm{B}$ *par homogénéité et on a donc* $\mathrm{N}_2\left(\dfrac{x}{\mathrm{N}_1(x)}\right) \leqslant 1$ *soit* $\mathrm{N}_2(x) \leqslant \mathrm{N}_1(x)$. *Par symétrie il y a égalité* *et, comme cela reste vrai pour $x = 0$, on a $N_1 = N_2$. L'exercice suivant donne une description des parties de $\mathbb{R}^n$ qui sont les boules unités fermées de normes sur $\mathbb{R}^n$.*

1.2. Description géométrique des normes

> On munit $\mathbb{R}^n$ de son unique topologie d'espace normé. Montrer qu'une partie B de $\mathbb{R}^n$ est la boule unité fermée d'une norme de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si B est convexe, compacte, symétrique par rapport à l'origine et d'intérieur non vide.
>
> (**École normale supérieure**)

$\triangleright$ **Solution.**

Il est clair que la boule unité fermée B d'une norme N est convexe, symétrique par rapport à l'origine, d'intérieur non vide (il s'agit de la boule unité ouverte) et compacte (pour la topologie définie par n'importe quelle norme sur $\mathbb{R}^n$). On va s'attacher à la réciproque.

Notons B une partie de $\mathbb{R}^n$ vérifiant toutes les propriétés précédentes. On cherche à construire une norme N telle que $B = \{x \in \mathbb{R}^n,\ N(x) \leqslant 1\}$. Pour cela l'idée est d'utiliser l'homogénéité. Pour x vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ posons $I_x = \left\{\lambda > 0,\ \dfrac{x}{\lambda} \in B\right\}$. Montrons que cet ensemble n'est pas vide. En effet, l'origine est forcément un point intérieur à B car si A est intérieur à B, on peut trouver $r > 0$ tel que $B(A, r) \subset B$ (où la boule considérée est, par exemple, relative à la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$). Par symétrie de B on a aussi $B(-A, r) \subset B$ et par convexité il en découle que $B(0, r) \subset B$. Ainsi, tous les réels suffisamment grands sont dans I_x. Mieux : comme B est convexe et contient l'origine, si $\lambda \in I_x$ on a forcément $[\lambda, +\infty[\ \subset I_x$. Donc I_x est un intervalle non majoré de $\mathbb{R}_+^*$. Comme B est compacte, elle est bornée. Soit $M > 0$ tel que $\|a\| \leqslant M$ pour tout $a \in B$. Si $\lambda \in I_x$ on a $\lambda \geqslant \dfrac{\|x\|}{M} > 0$. Posons alors $N(x) = \inf I_x$. On vient de prouver qu'il s'agit d'un réel strictement positif. Comme B est fermée, l'intervalle I_x est aussi fermé et il est donc égal à $[N(x), +\infty[$. Il ne reste plus qu'à vérifier que N (prolongée en 0 par $N(0) = 0$) est une norme et que B en est la boule unité fermée.

- L'application N est positive et l'axiome de séparation est vérifié.
- Si x est non nul et si μ est un réel strictement positif il est clair que $I_{\mu x} = [\mu N(x), +\infty[$, donc on a $N(\mu x) = \mu N(x)$. Par symétrie de B on a $I_{-x} = I_x$, donc $N(-x) = N(x)$ et finalement N est homogène.
- Pour $x \in \mathbb{R}^n$ on a $N(x) \leqslant 1$ si, et seulement si, $1 \in I_x$ donc si, et seulement si, $x \in B$. Comme B est convexe, on en déduit que N vérifie l'inégalité triangulaire (voir la solution de la première question de l'exercice précédent).

D'où le résultat : N est une norme de boule unité B. ◁

Même si le petit exercice qui suit n'utilise que l'inégalité triangulaire, il n'est pas complètement évident.

1.3. Une inégalité

On munit $\mathbb{R}^2$ d'une norme quelconque $\| \|$. Soient x, y, z trois points tels que 0 soit intérieur (au sens large) au triangle xyz.

1. Montrer que $\|x\| + \|y\| \leqslant \|x - z\| + \|y - z\|$.

2. Soit $t \in \mathbb{R}^2$. Montrer que

$$\|x\| + \|y\| + \|z\| \leqslant \|x - t\| + \|y - t\| + \|z - t\| + \|t\|.$$

(**École normale supérieure**)

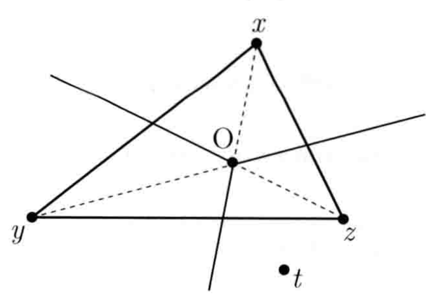
▷ **Solution.**

1. Pour $u \in \mathbb{R}^2$, posons $f(u) = \|x - u\| + \|y - u\|$. On doit prouver que $f(0) \leqslant f(z)$. Les fonctions $u \mapsto \|x-u\|$ et $u \mapsto \|y-u\|$ sont convexes. En effet, pour u et v dans $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in [0, 1]$, on a

$$\|x-(\lambda u+(1-\lambda)v)\| = \|\lambda(x-u)+(1-\lambda)(x-v)\| \leqslant \lambda\|x-u\|+(1-\lambda)\|x-v\|.$$

On en déduit que f est également convexe. Il en découle que l'ensemble $\mathrm{A} = \{u \in \mathbb{R}^2, f(u) \leqslant f(z)\}$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$. D'après l'inégalité triangulaire, on voit que x et y sont dans A, tout comme z. Comme par hypothèse 0 est dans l'enveloppe convexe du triangle xyz, on a $0 \in \mathrm{A}$, ce qui prouve l'inégalité.

2. On peut toujours choisir deux sommets parmi x, y, z, tels que 0 soit dans l'intérieur (au sens large) du triangle formé par ces deux sommets et t :



Supposons que, comme sur la figure, ces sommets soient x et y. On a alors d'après la première question $\|x\| + \|y\| \leqslant \|x - t\| + \|y - t\|$. Par ailleurs, $\|z\| \leqslant \|z-t\| + \|t\|$ par inégalité triangulaire. Le résultat en découle en faisant la somme. ◁

L'inégalité prouve que l'origine est le point du plan qui minimise la somme des distances aux quatre points $0, x, y, z$.

1.4. Recherche d'un minimum

Soit, pour P dans $\mathbb{C}[X]$, $N(P) = \sup\{|P(z)|,\ |z| = 1\}$.

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{C}[X]$.

2. Soient n dans $\mathbb{N}^*$, A_n l'ensemble des polynômes unitaires de degré n de $\mathbb{C}[X]$ prenant la valeur 1 en 0. Quelle est la borne inférieure de N sur A_n ?

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. On a $N(P) \geqslant 0$ pour tout polynôme P et si $N(P) = 0$, $P(z) = 0$ pour tout z de module 1, donc P a une infinité de racines et $P = 0$. Pour $P \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a

$$N(\lambda P) = \sup\{|\lambda|\,|P(z)|,\ |z| = 1\} = |\lambda| \sup\{|P(z)|,\ |z| = 1\} = |\lambda| N(P).$$

Enfin si P et Q sont deux polynômes, on a pour $|z| = 1$,

$$|(P+Q)(z)| \leqslant |P(z)| + |Q(z)| \leqslant N(P) + N(Q),$$

et par passage à la borne supérieure, $N(P+Q) \leqslant N(P) + N(Q)$.

Donc N est bien une norme sur $\mathbb{C}[X]$.

2. Examinons le cas des petites valeurs de n.

Il n'y a qu'un seul polynôme dans A_1, à savoir $1 + X$, et on a, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $|1 + e^{i\theta}| = |e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}| = |2\cos\frac{\theta}{2}|$ donc $N(1+X) = 2$.

Tout polynôme de A_2 s'écrit $1 + aX + X^2$, avec $a \in \mathbb{C}$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$|1 + ae^{i\theta} + e^{2i\theta}| = |e^{-i\theta} + a + e^{i\theta}| = \Big|2\cos\theta + a\Big| = \sqrt{(2\cos\theta + \operatorname{Re} a)^2 + (\operatorname{Im} a)^2}.$$

Le maximum est obtenu pour $\cos\theta = \pm 1$ selon le signe de $\operatorname{Re} a$ et et on trouve

$$N(1 + aX + X^2) = \sqrt{(2 + |\operatorname{Re} a|)^2 + (\operatorname{Im} a)^2} = \sqrt{4 + 4|\operatorname{Re} a| + |a|^2} \geqslant 2.$$

La borne inférieure de N(P) sur A_2 vaut 2 et est atteinte pour $P = 1 + X^2$.

Montrons que pour n quelconque la borne inférieure de N sur A_n est toujours atteinte en $1 + X^n$. La norme de $1 + X^n$ est 2. En effet, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$|1 + e^{in\theta}| = |e^{-i\frac{n\theta}{2}} + e^{i\frac{n\theta}{2}}| = \left|2\cos\frac{n\theta}{2}\right|.$$

Il reste à montrer que, pour tout $\mathrm{P} \in \mathrm{A}_n$, $\mathrm{N}(\mathrm{P}) \geqslant 2$. Une méthode directe est cette fois-ci inapplicable. Soit $\mathrm{P} = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k$, où $a_0 = a_n = 1$.

Calculons $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{j=0}^{n-1} \mathrm{P}(e^{i\frac{2j\pi}{n}})$. On a

$$\mathrm{S}_n = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n} a_k e^{i\frac{2jk\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{j=0}^{n-1} e^{i\frac{2jk\pi}{n}}.$$

Si $k \neq 0$ et $k \neq n$, $e^{i\frac{2k\pi}{n}} \neq 1$ et $\sum\limits_{j=0}^{n-1} e^{i\frac{2jk\pi}{n}} = \dfrac{1 - e^{i2k\pi}}{1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}} = 0$. Il reste donc $\mathrm{S}_n = na_0 + na_n = 2n$. On en déduit

$$2n = \left|\sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{P}(e^{i\frac{2j\pi}{n}})\right| \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} \left|\mathrm{P}(e^{i\frac{2j\pi}{n}})\right| \leqslant n\mathrm{N}(\mathrm{P})$$

et donc $\mathrm{N}(\mathrm{P}) \geqslant 2$. On peut préciser les cas d'égalité. Si $\mathrm{N}(\mathrm{P}) = 2$, toutes les inégalités précédentes sont des égalités. On a donc $\left|\mathrm{P}(e^{i\frac{2j\pi}{n}})\right| = 2$ pour tout j et tous les $\mathrm{P}(e^{i\frac{2j\pi}{n}})$ ont même argument (cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire). Tous les $\mathrm{P}(e^{i\frac{2j\pi}{n}})$ sont donc égaux à 2. Considérons le polynôme $\mathrm{P} - (1 + \mathrm{X}^n)$ qui appartient à $\mathbb{C}_{n-1}[\mathrm{X}]$. Il s'annule en $e^{i\frac{2j\pi}{n}}$ pour $0 \leqslant j \leqslant n-1$. Il a donc au moins n racines. C'est le polynôme nul. Donc $\mathrm{P} = 1 + \mathrm{X}^n$.

Conclusion. Pour $\mathrm{P} \in \mathrm{A}_n$, le minimum de $\mathrm{N}(\mathrm{P})$ est 2. Il n'est atteint que pour $\mathrm{P} = 1 + \mathrm{X}^n$.

L'exercice suivant regroupe des questions posées à des oraux différents portant sur le thème des normes absolues.

1.5. Normes absolues

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\|\ \|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ et N une autre norme. Si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on pose $|x| = (|x_1|, \ldots, |x_n|)$ et on écrit $x \geqslant 0$ lorsque $x = |x|$. On dit que la norme N est absolue si $\mathrm{N}(x) = \mathrm{N}(|x|)$ pour tout x.

1. Montrer que N est absolue si, et seulement si, N est monotone, c'est-à-dire vérifie $|x| - |y| \geqslant 0 \Longrightarrow \mathrm{N}(x) \geqslant \mathrm{N}(y)$ pour tout (x, y).

2. Donner un exemple de norme non absolue sur $\mathbb{R}^n$.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. À quelle condition l'application $x \mapsto \|Ax\|$ est-elle une norme absolue sur $\mathbb{R}^n$?

4. Soit M la norme triple de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associée à N. Montrer que N est absolue si et seulement si $\mathrm{M}(\mathrm{A}) \leqslant \mathrm{M}(|\mathrm{A}|)$ pour toute matrice $\mathrm{A} = (a_{ij})$ où $|\mathrm{A}|$ désigne la matrice de coefficients $|a_{ij}|$.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. Pour deux vecteurs $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ on écrira $x \leqslant y$ lorsque $y - x \geqslant 0$ c'est-à-dire si $x_i \leqslant y_i$ pour tout i. Il s'agit clairement d'une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^n$.

• Supposons d'abord N monotone et considérons $x \in \mathbb{R}^n$. Si $y = |x|$ on a clairement $|x| = |y|$ donc $\mathrm{N}(x) \leqslant \mathrm{N}(y)$ et $\mathrm{N}(y) \leqslant \mathrm{N}(x)$. On a donc bien $\mathrm{N}(x) = \mathrm{N}(y) = \mathrm{N}(|x|)$ et N est absolue.

• Supposons réciproquement que N est absolue et considérons x et y dans $\mathbb{R}^n$ avec $|x| \leqslant |y|$. Quitte à remplacer x par $|x|$ et y par $|y|$ on peut supposer que $0 \leqslant x \leqslant y$. Pour prouver que $\mathrm{N}(x) \leqslant \mathrm{N}(y)$, il suffit de prouver que N est croissante par rapport à chaque coordonnée lorsque celle-ci varie dans $\mathbb{R}_+$, et par symétrie, il suffit de le rédiger pour la première. Fixons $a_2, \ldots, a_n$ dans $\mathbb{R}_+$ et notons f la fonction qui à $t \in \mathbb{R}$ associe $f(t) = \mathrm{N}(t, a_2, \ldots, a_n)$. Comme $f(|t|) = f(t)$ pour tout t, f est une fonction paire. Par ailleurs, elle est convexe sur $\mathbb{R}$. Ces conditions imposent que f est croissante sur $\mathbb{R}_+$. En effet, si $0 \leqslant t \leqslant t'$, la pente du segment joignant les points $(-t, f(-t))$ et $(t, f(t))$ est nulle, donc par le théorème des pentes croissantes, celle du segment qui joint les points $(t, f(t))$ et $(t', f(t'))$ est positive.

Voici une seconde solution plus géométrique : comme $|x| \leqslant |y|$, le vecteur x est dans l'enveloppe convexe des 2^n points $(\varepsilon_1 y_1, \ldots, \varepsilon_n y_n)$, où $\varepsilon_i = -1$ ou 1. En effet, chaque $x_i \in [-y_i, y_i]$ peut s'écrire comme barycentre de $(-y_i, t_i)$ et $(y_i, 1 - t_i)$, où $t_i \in [0, 1]$. Cette enveloppe convexe contient donc tout point de la forme $(x_1, \varepsilon_2 y_2, \ldots, \varepsilon_n y_n)$, car il est barycentre de $((-y_1, \varepsilon_2 y_2, \ldots, \varepsilon_n y_n), t_1)$ et $((y_1, \varepsilon_2 y_2, \ldots, \varepsilon_n y_n), 1 - t_1)$, puis tout point de la forme $(x_1, x_2, \varepsilon_3 y_3, \ldots, \varepsilon_n y_n)$, car il est barycentre de $((x_1, -y_2, \varepsilon_3 y_3, \ldots, \varepsilon_n y_n), t_2)$ et $((x_1, y_2, \varepsilon_3 y_3, \ldots, \varepsilon_n y_n), 1 - t_2)$, ... et finalement contient x. Ces 2^n points ont tous la même norme car N est absolue. Le résultat découle alors directement de l'inégalité triangulaire.

2. La norme euclidienne ainsi que les normes usuelles $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_\infty$ définies pour $x = (x_1, \ldots, x_n)$ par $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$, et $\|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|$ sont clairement des normes absolues. Donnons un contre-exemple sur $\mathbb{R}^2$ que le lecteur généralisera facilement. Pour $\mathrm{X} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, posons

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com