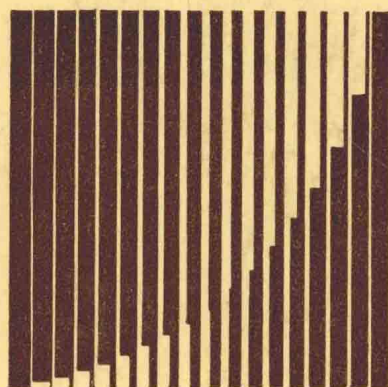


基本統計学

岩橋亮輔 著

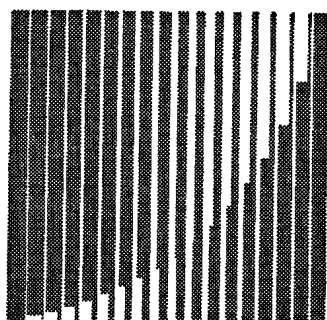


中央經濟社

基本統計学

名古屋市立大学教授

岩橋亮輔 著



中央経済社

著者略歴

1929年 和歌山市に生る。
1953年 名古屋大学理学部数学科（旧制）卒業。
同年，同学部研究補助員。
1957年 同学部助手。
1961年 名古屋市立大学教養部助教授。
1967年 同大学経済学部助教授。
1970年 同学部教授。
専門分野 多変数関数論とその統計学への応用。
最適制御理論。

基本統計学

昭和45年8月5日 印刷
昭和45年8月10日 発行

定価 1,600円

著者 いわ 岩 橋 亮 輔

発行者 渡 辺 正 一

印刷者 栗 田 真 太 郎

発行所 株式会社 中央経済社

本社 東京都千代田区神田神保町1の53
(営業部) 電話 (294) 2 8 0 1 ~ 5
振替口座・東京 8 4 3 2
(編集部) 東京都千代田区丸の内丸ビル530区
電 話 (211) 4 8 0 6 ~ 9

落丁・乱丁本はお取替え致します。 東光整版・関川製本

は し が き

本書の目的は、専攻分野の如何に拘らず、これから統計学を勉強しようという人々に統計学の根本理念を徹底的に把握させることにある。このため、われわれを取り巻く世界における現象の法則性と偶然性から説き起こし、確率の概念が偶然性を伴う現象の多量観測に関して如何に醸成してくるかにかなりの説明を与え、統計学の前提ともいべき確率論、続いて意志決定理論から本来の統計学である推定と検定の両理論に接続する立場をとった。

従来わが国で出版された統計学の本、殊にいわゆる教科書は平易さを主眼とする余り、定理や公式の羅列と形式的な練習問題に終始して、内容の深い定理の証明や解説を疎にしていた。本書では数学的に程度が高く、統計学の理解には支障を来さないと判断したいくつかの定理を借用した以外は、その難易に拘らずすべての定理に多少の工夫を施して証明を与えた。すべての定理はその証明を理解してはじめて本質が把握されるのであるが、はじめて通読するときには適宜証明の箇所を飛ばして先に移ってもよいように配慮した（▶は証明開始、◀は証明終了の記号である）。

本書を読むに当って高校数学、できれば大学教養課程の程度の統計学の知識があればよいが、微積分の基本的な事柄を知っていれば十分である。なお本書にはページ数の制約もあって練習問題を入れなかった。必要に応じて巻末の文献にある問題集・演習を参照されたい。また本文中に書き入れたかった多くの項目や實際上直接役立つ種々の方法の紹介などは読者の専門に応じて異なるべきであると判断してすべて割愛した。

統計学の本の初版で著者にとっても読者にとっても満足のいくものは無いといわれる。著者が余りにもいきごんだか、その反対かであるためであろう。

2 は し が き

今後読者の意見を参考に改良を加えていきたい。終りに，本書を著すに当って終始激励された岡崎不二男・木村吉男両先生に心から感謝の意を表する。

昭和45年7月

岩 橋 亮 輔

目 次

序 論	3
第1章 確 率 の 概 念	7
1. 偶然現象と統計的方法の意義	7
2. 統計的基本概念	9
3. 数学的確率	21
4. 複合試行	29
5. 試行結果の類別	34
第2章 偶然変量と分布法則	37
1. 偶然変数の分布関数と密度関数	37
2. 超関数 δ と確率密度の一般化	42
3. 偶然ベクトルの分布と確率密度	45
4. 条件つき分布関数とその密度関数	48
5. 偶然変数の関数の分布法則	50
6. 分布法則と確率空間	54
7. 偶然変量のモーメント	57
8. 偶然変数の特性関数	69
第3章 典型的分布法則と相互関係	79
1. Bernoulli の分布法則	79
2. 2項分布法則	80
3. 負の2項分布法則	81
4. 超幾何分布法則	86
5. Poisson 分布法則	87

2 目 次

6. 一様分布法則	89
7. 正規分布法則	90
8. 対数正規分布法則	95
9. 多項分布法則	96
10. 多次元正規分布法則	98
11. χ^2 分布法則	105
12. Student 分布法則	107
13. 指数型分布族	109
14. Gamma 関数と Beta 関数	112
第4章 極限分布と大数の法則	117
1. 確率収束	117
2. 概確実収束	122
3. 法則収束	128
4. 2乗平均収束	134
5. 法則収束と特性関数	137
6. 大数の弱法則	138
7. 大数の強法則	147
8. 中心極限定理	155
第5章 標 本 分 布	165
1. 順序標本と標本分布関数	165
2. 漸近的挙動	173
3. 正規分布の標本	196
4. 分散分析	191
5. 多次元正規分布の標本	196
6. 2次元正規分布の標本	212
7. 回帰と相関	218

第6章 意志決定と統計学的推論	227
1. 意志決定論	227
2. 母数推定と意志決定	235
3. 仮説検定と意志決定	237
4. 情報量	240
第7章 母 数 推 定	253
1. 母数推定の原理	253
2. 点推定の方法	268
3. 区間推定の方法	293
第8章 仮 説 検 定	313
1. 仮説検定の原理	313
2. 単純仮説対単純仮説の検定	318
3. 意志決定論との関係	324
4. 複合仮説間の検定	326
5. 適合性の検定	342
6. 継続検定	351

基 本 統 計 学

序 論

統計学は研究対象に関する必要な諸数量の計数あるいは測定の結果の記録である数値的事実の収集から始まる。これがいわゆるデータの収集であって、これに基づく数々の結論の妥当性はすべてデータの適切か否かに依存する。統計学はデータの収集そのものに対して有効な指針を与えるが、研究対象に深く通暁していることが最も重要な必要条件であって、いかなる数量についてどのようにデータを収集すべきかあらかじめ判断しなければならない。

このようにして収集されたデータはそのままでは直ちに結論を引き出すことは困難である。客観的な有効性を持つ結論を引き出す準備として、データを図表やグラフ等の形にまとめたり、適切に分類したりする必要がある。これがデータの整理と呼ばれる段階である。

整理・分類されたデータに基づいて、研究対象に必要なデータの特性を数量的に要約することが次の段階であってデータの分析といわれる。収集・整理を終わったデータの様子を客観的に述べるために、通常はいくつかの数値でデータの特性を表わす。これらの代表的数値は同種類のデータの様子との相違を見るのに役立つものでなければならない。

収集・整理・分析されたデータから有効な客観的結論を引き出し、研究対象に関する重要な情報が得られたとき統計学の果たすべき任務がはじめて完了する。

繰り返していうならば、統計学とは収集された数値的事実、いわゆるデータを適切に整理し、その特性を分析し、データの示す根源的意味を客観的に探求して、背後にある社会現象あるいは自然現象の本質の把握に資する科学であるということができる。したがって社会現象あるいは自然現象に対する深い認識が必要であり、これを数値的に有効に表現する方法を開拓しなければならない。社会現象あるいは自然現象はつねに偶然性を伴うものであるから統計学はまず偶然現象の解明からはじまる。ここでいわゆる確率の概念が生まれる。確率論は偶然現象を解明する科学であるが、本来の統計学はこの確率論を前提として、データから有効な客観的結論を引き出す方法の開発を目的とする。

ここで統計学の歴史について簡単に触れておく。統計学を表わす statistics は国家を表わす state と語源が同じことから知られるように、もとは統治学のことであった。第18世紀のドイツの各大学での statistics の初期の教授は今でいう政治学者であった。政治的意志決定はある程度データ（人口、兵力、貿易、農業等）に基づいてなされるから、政治学者は当然このようなデータに関心を持つようになり、統計学は国家に関するデータの収集を、次に一般的にデータの収集・整理を意味するようになった。今でもデータおよびその収集・整理は統計といわれる。データは収集・整理しただけでは十分でないから、さらに統計学者はデータを解釈して何かを引き出そうとするようになった。これが現代的統計学の発端である。この何かを引き出そうとすることに理論的根拠を与えたのが数学的確率論である。第16～8世紀のヨーロッパでは貴族の間で賭博が盛んであった。これが偶然に支配されることは当然ながら、その偶然性の中にも経験的に法則性が認識された。これを解明するためいわゆる確率に関する数多くの問題が Galileo, Pascal, Fermat, Bernoulli, de Moivre, Huygens, Laplace, Gauss といった著名な数学者に提出され解決されて確率論が生まれるに至った。同じ頃からデータの収

集・整理にすぎなかった統計学も著しく発展しはじめた。イギリスでは J. Graunt が人口統計、保険統計および政治算術と呼ばれるようになった経済統計の準数学的研究を行ない、W. Petty や Ed. Halley がこれに続いた。ベルギーの Quetelet は大量の観測値に定常性が現われることを初めて見つけたといわれる。ウィーンの Hain はこのことを用いてデータの散らばりを調べる方法を改良している。また同じ考えで、ドイツの Knapp と Lexis は死亡率表を詳しく研究している。第19世紀後半には、イギリス優生学派の創始者 Fr. Galton とその後継者 K. Pearson は遺伝学からの問題を用いて回帰と相関の理論を展開した。さらに Pearson と Spearman はこれを発展させて社会科学にも応用した。第19世紀末から数学全般の進歩とともに数学的確率論が数学の1つの部門にまで成長し、統計学と提携しはじめた。今世紀のはじめ、アイルランドの Guinness ビール会社の統計主任 W. S. Gosset は Student というペンネームで数多くの統計学に関する論文を発表している(会社員が私的出版をするときペンネームを使用するのは当時の慣習)。彼はとくに小標本から信頼のおける情報を引き出すことがいかに重要かを強調した。彼の方法はイギリスの R. A. Fisher とその共同研究者によって普及されとともに理論がさらに展開され、応用分野も遙かに広がった(農業などへ)。

今世紀30年代になって、統計学の理論的前提である確率論そのものが見直されて、その確固たる基礎がソ連のコルモゴロフによって確立された。これによって統計学の理論的基礎も強固になるとともに、統計学においても数学の種々の理論が駆使されるようになった。統計学もこれまでの記述統計学から大きく発展して数理統計学ともいわれるようになる。40年代後半では電算機の原理、情報理論の基礎が J. von Neumann, N. Wiener 等によって確立され、オペレーションズ・リサーチやゲームの理論も生まれて実際上の諸問題に有効に用いられるようになった。さらに50年代以後では電算機の普及やいわゆる情報革命と相俟って統計学は社会科学、自然科学、さらに人文

6 序 論

科学にまで実用的価値を見出し、種々の現象の解明、予測問題および意志決定等に有効に用いられ、その結果は日常の新聞・雑誌等で親しく接するようになった。例として挙げれば、統計学的経済学ともいべき計量経済学の成果は目覚しく、わが国でも経済企画庁等から計量経済学を応用した数多くの出版物が刊行されている。

現象の解明に役立てようというときはもちろん、新聞・雑誌等で目に入る統計結果の発表を正しく理解するためには統計学の根本原理が把握されていなければならない。既製の統計学的手法を鵜呑みに使用しては、たとえ間違わなかったとしても現象の本質を探るのに何の利するところもない。本書が種種の手法をただ羅列することを避け、統計学の基本的把握を主にした理由はここにある。

第1章 確率の概念

1. 偶然現象と統計的方法の意義

われわれを取り巻く世界のどの現象1つを取ってみても、無数の他の現象に程度の差こそあれ関連しているものである。すべての科学においては、これら無数の他の現象のうちから研究者の立場からみて極めて密接に関連していると考える、いくつか有限個の他の現象だけを考慮して研究されるのが普通である。ボールを投げることを考えてみよう。ボールを投げる速さと角度でボールの飛んで行く曲線はほぼ定まり、ボールはいわゆる放物線を描く。

しかしボールの速さや角度はなかなか思うようには定められないし、それがたとえできたとしても測定するときに誤差を伴うものである。さらにボールの描く曲線が本当に数学でいう放物線なのかも疑わしい。測定の誤差がある以外にボールの回転や大気の状態などにも関連して投げるごとに、厳密に言えば、異なる曲線になる。それにもかかわらず、物理学ではボールを投げる速さと角度で定まる1つの放物線を描くと教えている。ここでは投げる速さと角度だけがボールが飛ぶという現象に極めて密接に関連していて、他の無数の関連があると考えられる現象はボールの描く曲線の大勢にはさほど影響しないとしている。このように、考える現象にとって本質的と思われる基本的な関連だけに注目するとき、ある規則性あるいは法則性が確立される。

ボールをいついかなるときに投げても、描く曲線はボールを投げる速さと角度で定まる1つの放物線を描くというのが上の例における法則性である。

ところで考える現象に関連する他の現象を数え挙げて、これらすべてを同時に研究することは原理的に不可能である。関連する現象の数は連鎖的に増加していき、結局は世界中の現象全部を同時に考察しなければならなくなるからである。したがっていかなる現象についても、人間の認識のすべての段階においてつねに無数の他の現象が考察されずに残ることになる。この結果、法則性というのはただ有限個の基本的な関連を反映しているにすぎない。すなわち、法則性はつねに絶対的正確さをもって成立するのではなく、必ず何らかの偏差あるいはずれを伴うものである。考える現象に関連する無数の考察されずに残っている他の現象によって生じるこのような偏差あるいはずれを**偶然現象**という。このように、偶然性は、客観的に考えて、われわれを取り巻く世界においてつねに存在する。

科学の発達に伴って、次から次へと新しい法則性、すなわち考える現象と他の諸要因との関連性が認識される。法則性と偶然性との境界は永久不変のものではなく、人間の認識の発展とともに変動する。ある段階では偶然的と考えられたものも次の段階では法則的となることがある。ある段階では厳密に法則的と考えられた現象も、観測・実験技術の進歩などによって偶然的偏差あるいはずれが見出され、この偶然性を究明する必要に迫られる。

たとえ、法則性が確立されているときでも、特定の観察結果がどうであるか、すなわち法則性からの偶然的ずれがどうなるかを予測することはできない。過去のデータから男女の生まれる比率が1:1であるという法則性が確立されているとしよう。このとき特定の妊婦の産むのはどちらであるかを絶対的な正確さをもって言いあてることができない。しかし、考える現象を何回も観察するとき、偶然的ずれ自身にもまたある法則性が見られる。これを元の現象の研究に利用することができる。このように集団的あるいは大量の

偶然現象，すなわち，実際上は数限りなく何回でも同一条件の下で観察される偶然現象の研究が可能になる．確率論は集団的偶然現象を研究する科学である．

科学の発達というのは法則性の確立と，偶然性の発見の交代であると考えることができる．したがってどの科学にも確率論的，あるいはいわゆる統計学的方法が応用されるはずである．現に計量経済学は経済学の一大部門をなしていて，経済理論の検証あるいは経済系の将来予測を行なっている．1930年代の流体力学における乱流の統計的理論などについても統計学的方法の有効性が理解される．現在では自動制御理論，あるいはより一般的なサイバーネティクスにおいて確率論および統計学は不可欠のものになっている．

2. 統計的基本概念

すべての科学において，いくつかの経験的事実が基となり，その科学の基本的概念が把握されて定式化される．物理学での質量，力，加速度や経済学での需要，供給，価格や心理学での刺激，反応などがそうである．これらの事実と概念とは理論の発達が具体的かつ実地的な結論を導き出すのに利用される．物理学での運動方程式，経済学での需要供給の法則や均衡価格などは理論を展開する上で重要な役割を果たしている．次にこのようにして得られた結論が実際と良く適合するかどうかを検証される．さらにその科学における他の理論との関係が調べられたり，もっと簡単な仮説あるいは理論からその理論を導き出そうと試みられたりする．逆に一般化してより広い対象に適合するかどうか考察されることも多い．

偶然現象を実験または観察によって調べた結果の特性をどのように捉えればよいかを考えよう．このためには出発点となるいくつかの概念を定義しなければならない．