ВЫСШЕЕ
ОБРАЗОВАНИЕ

П. А. Шмелев

ТЕОРИЯ РЯДОВ
в задачах и упражнениях

П. А. Шмелев

ТЕОРИЯ РЯДОВ
в задачах и упражнениях

Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов
высших технических учебных заведений

МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1983

ББК 22.161.5
Ш72
УДК 517.52

Рецензенты
кандидат физ.-мат. наук доцент *В. М. Говоров* и кафедра высшей математики МФТИ (зав. кафедрой — проф. *Л. Д. Кудрявцев*)

Шмелев П. А.
Ш72 Теория рядов в задачах и упражнениях: Учеб. пособие для студентов втузов. — М.: Высш. шк., 1983. — 176 с., ил.
35 к.

Задачник составлен в соответствии с новой программой по курсу высшей математики для технических вузов. В нем подобраны задачи по широкому кругу вопросов, связанных с теорией рядов (числовые ряды; функциональные ряды; ряды Фурье и интеграл Фурье). Рассматриваются основные методы решения задач по теории рядов.

$Ш\,\frac{1702050000-172}{001(01)-83}\,58-83$

ББК 22.161.5
517.2

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая книга представляет собой расширенный задачник по одному из важнейших разделов математического анализа — теории рядов и предназначена для студентов втузов, в том числе с повышенной математической подготовкой, инженеров, а также для лиц, желающих пополнить свое математическое образование.

В книге подобраны задачи и примеры, достаточно полно иллюстрирующие различные положения теории рядов и методы решения задач с их использованием. Она содержит три раздела: «Числовые ряды», «Функциональные ряды», «Ряды Фурье. Интеграл Фурье». Каждый раздел состоит из параграфов. В начале каждого параграфа приводится теоретический материал (определения, теоремы, формулы), необходимый для сознательного решения последующих задач; затем подробно разбираются типовые примеры и задачи; после этого даются упражнения для самостоятельного решения. Все задачи и упражнения снабжены ответами, а в ряде случаев — указаниями или даже решениями.

Формулы, приведенные в книге, на которые имеются ссылки, имеют сквозную нумерацию. Однако часть формул, на которые имеются ссылки только в данном параграфе и которые, как правило, фиксируют промежуточные результаты в решении примеров вводного текста, обозначены прописными буквами русского алфавита (в каждом параграфе эти обозначения повторяются).

В книге приняты следующие обозначения:

$\boldsymbol{N}$ — множество натуральных чисел,

$\boldsymbol{Z}$ — множество целых чисел,

$\boldsymbol{R}$ — множество действительных чисел,

◀, ▶ — значки, означающие соответственно начало (окончание) доказательства теоремы или начало (окончание) решения примера (знак ▶ ставится по мере надобности),

● — значок, заменяющий слово «Указание» (см. в ответах).

Подобная структура книги делает ее особенно полезной для студентов вечернего и заочного отделений.

Всем работающим над книгой читателям автор советует, прежде чем приступать к самостоятельному решению примеров и задач, внимательно прочитать вводный текст соответствующего параграфа, запомнить приведенные определения, теоремы и формулы, разобрать рассмотренные в тексте примеры.

В процессе работы над задачником автору оказали большую помощь своими советами и указаниями профессор С. И. Похожаев, профессор М. Л. Краснов, доцент Л. А. Кузнецов (МЭИ). Всем им автор выражает свою глубокую благодарность.

Автор также глубоко и искренне признателен рецензентам книги — докторам физико-математических наук, профессорам Л. Д. Кудрявцеву, Б. И. Голубову и кандидату физико-математических наук, доценту В. М. Говорову за подробные и обстоятельные рецензии, которые позволили автору во многом улучшить изложение материала.

ГЛАВА I

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

§ 1. РЯД И ЕГО СУММА

Пусть задана последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Если ее члены соединить знаками «+», то получится выражение вида

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots,$$

называемое *числовым рядом* и сокращенно обозначаемое символом

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \qquad (1)$$

Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются *членами ряда*; n-й член ряда называется также *общим членом ряда*. Ряд считается *заданным*, если задано правило, позволяющее по известному номеру его члена n записать этот член ряда. Чаще всего ряд задается формулой общего члена $a_n = f(n)$.

Сумма n первых членов ряда называется *n-й частичной суммой ряда* и обозначается символом S_n:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n.$$

Если существует конечный предел $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то ряд называется *сходящимся*, а число S — *суммой ряда*. В этом случае пишут

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

Таким образом, символом (1) обозначается как сам ряд, так (в случае сходимости) и его сумма (см. [12], с. 546).

Ряд называется *расходящимся*, если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует (в частности, если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$).

Ряд

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_{m+n},$$

полученный из ряда (1) отбрасыванием первых его m членов, называется *m-м остатком ряда* (1).

Если сумму остатка сходящегося ряда обозначить через R_m, то, очевидно, $S_m + R_m = S$.

Справедливы следующие теоремы:

1. *Отбрасывание от ряда или присоединение к ряду любого конечного числа начальных членов не меняет его сходимости или расходимости.*

2. *Если ряд* (1) *сходится, то предел его m-го остатка при $m \to \infty$ равен нулю, т. е.* $\lim\limits_{m\to\infty} R_m = 0$.

3. *Если члены сходящегося ряда* (1), *имеющего сумму* S, *умножить на число* λ, *то полученный ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n)$ *будет также сходящимся, а число* λS — *его суммой.*

4. *Умножение членов расходящегося ряда на число* $\lambda \neq 0$ *не нарушает его расходимости.*

Одна из важнейших задач теории числовых рядов — разработка методов вычисления их сумм. Точное вычисление суммы ряда, если оно возможно, почти всегда связано с громоздкими вычислениями. Поэтому чаще всего ограничиваются приближенным вычислением суммы ряда, полагая $S \cong S_m$ и допуская при этом ошибку, равную сумме ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_{m+n}$. Но прежде чем браться за вычисление суммы ряда, нужно выяснить, сходится или расходится данный ряд, ибо расходящийся ряд суммы не имеет. При этом особое значение приобретает задача об исследовании ряда на сходимость.

Приведем теоремы, выражающие общие признаки сходимости числовых рядов.

5. **Необходимый признак сходимости ряда.** *Если ряд* (1) *сходится, то предел его общего члена равен нулю:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Отсюда вытекает, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится. Если же $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то о сходимости ряда еще ничего нельзя сказать, но есть смысл исследовать ряд дальше.

Примером расходящегося ряда, удовлетворяющего необходимому признаку сходимости, служит так называемый гармонический ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Здесь $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, но ряд расходится. Это вытекает из того, что, как это можно показать, $S_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

6. **Критерий Коши.** *Для того чтобы ряд* (1) *сходился, необходимо и достаточно, чтобы для всякого* $\varepsilon > 0$ *существовало число* $N > 0$ *(зависящее только от* ε*) такое, что для всех* $n > N$ *и любого натурального* p *было справедливо неравенство*

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Этот признак сходимости ряда имеет большое теоретическое значение, но практическое его применение связано с большими трудностями. При использовании критерия Коши для исследования сходимости рядов следует иметь в виду, что упомянутое в нем число N не должно зависеть от p.

Критерий Коши можно применять и для доказательства расходимости некоторых рядов.

Если найдутся хотя бы одно значение $\varepsilon > 0$ *и одно натуральное* p *такие, что для любого* $N > 0$ *найдется* $n > N$, *но* $|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| \geqslant \varepsilon$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *будет расходящимся.*

Пример 1. Известно, что ряд начинается членами $\frac{1}{2}+\frac{4}{3}+\frac{9}{4}+\frac{16}{5}+\cdots$ Написать формулу общего члена ряда в наиболее простой форме.

◀ Нетрудно заметить, что числители данных членов являются квадратами натуральных чисел, а в знаменателях стоят натуральные числа начиная с 2. Простейшая формула общего члена ряда поэтому будет иметь вид $a_n = n^2/(n+1)$.

Замечание. В этом примере требовалось написать формулу общего члена ряда именно в простейшей, наиболее «прозрачной» форме. Это не случайно, ибо построить ряд единственным образом по нескольким его начальным членам невозможно. Пусть, например, даны первые три члена ряда $1 + 2 + 4 \ldots$. Нетрудно заметить, что это нулевая, первая и вторая степени двойки. Поэтому простейшей формулой общего члена будет формула $a_n = 2^{n-1}$. Однако можно составить еще сколько угодно различных формул, которые при $n = 1, 2, 3$ дают соответственно первые члены (1, 2 и 4) данного ряда, как, например,

$$a_n = \frac{n^2 - n + 2}{2}, \quad b_n = \begin{cases} \dfrac{2(n+1)}{5-n}, & n \neq 5, \\ 1, & n = 5, \end{cases} \qquad c_n = \frac{8}{n^2 - 7n + 14}.$$

Ряды, задаваемые первыми двумя формулами, расходятся (для них не выполняется необходимый признак сходимости), а третий ряд сходится (в этом можно убедиться с помощью признака сравнения II с табличным сходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; этот признак рассмотрен в § 2).

Пример 2. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n}$ удовлетворяет необходимому признаку сходимости, но является расходящимся.

◀ Запишем ряд в развернутом виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots .$$

Необходимый признак сходимости выполняется, так как

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Для доказательства расходимости данного ряда оценим его n-ю частичную сумму:

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant$$

$$\geqslant \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}}_{n \text{ раз}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n};$$

итак, $S_n \geqslant \sqrt{n}$. Очевидно, что при $n \to \infty$ $\sqrt{n} \to \infty$, а следовательно, $S_n \to \infty$. Ряд расходится.

Пример 3. Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)2^n}$.

◀ Зададимся произвольным числом $\varepsilon > 0$ и докажем существование такого числа $N > 0$, чтобы из справедливости неравенства $n > N$ вытекала справедливость неравенства

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon \tag{А}$$

при любом натуральном p. Это значит, что число N не должно зависеть от p! В нашем случае

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| = \left|\frac{n+1}{(n+2)\,2^{n+1}} + \frac{n+2}{(n+3)\,2^{n+2}} + \cdots + \frac{n+p}{(n+p+1)2^{n+p}}\right| < \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+p}} =$$

$$= \frac{(1/2^{n+1})\,(1 - 1/2^{p})}{1 - 1/2} = \frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2^p}\right) < \frac{1}{2^n}.$$

Итак, при любом p $|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \frac{1}{2^n}$. Так как неравенство $1/2^n < \varepsilon$ равносильно неравенствам $2^n > 1/\varepsilon$ и $n > \log_2(1/\varepsilon)$, то, полагая

$$N = \begin{cases} \log_2\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right), & \text{если } \varepsilon < 1/2, \\ 1, & \text{если } \varepsilon \geqslant 1/2, \end{cases} \tag{Б}$$

заключаем, что из справедливости неравенства $n > N$ вытекает справедливость неравенства $1/2^n < \varepsilon$, а следовательно, и справедливость неравенства (А) при любом p. Отсюда вывод: для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число N (вычисляемое по формуле (Б)), зависящее от ε и не зависящее от p, такое, что неравенство $n > N$ влечет за собой справедливость неравенства (А) (при любом p). В силу критерия Коши данный ряд является сходящимся.

Пример 4. С помощью критерия Коши доказать расходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}.$$

▶ В данном случае

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \cdots + \frac{1}{2n+2p-1}. \tag{В}$$

Нужно выяснить, существуют ли числа $\varepsilon > 0$ и натуральное p такие, чтобы сумма (В) была не меньше ε. Нетрудно догадаться, что, полагая $\varepsilon = 1/4$, а $p = 2n$, имеем

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \cdots + \frac{1}{6n-1} >$$

$$> \underbrace{\frac{1}{6n} + \frac{1}{6n} + \cdots + \frac{1}{6n}}_{2n} = 2n\cdot\frac{1}{6n} = \frac{1}{3} > \varepsilon = \frac{1}{4}.$$

Отсюда вследствие критерия Коши делаем вывод, что данный ряд расходится.

Пример 5. Найти сумму бесконечной геометрической прогрессии $a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots$, $a \neq 0$. (Термином «бесконечная геометрическая прогрессия» мы будем называть как последовательность a, aq, aq^2, ..., aq^{n-1}, ..., так и ряд, составленный из ее членов; в каком смысле употребляется этот термин, всегда ясно из контекста.)

◀ Сразу заметим, что при $|q| \geqslant 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} aq^{n-1} \neq 0$. Следовательно, необходимый признак сходимости не выполняется; геометрическая прогрессия в этом случае расходится. Пусть $|q| < 1$. Так как сумма n первых членов геометрической прогрессии подсчитывается по формуле $S_n = a(1 - q^n)/(1 - q)$, то нетрудно заметить, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ при $n \to \infty$ существует и равен $a/(1 - q)$. Отсюда следует вывод: геометрическая прогрессия есть ряд, расходящийся при $|q| \geqslant 1$ и сходящийся при $|q| < 1$; в последнем случае $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}$.

Пример 6. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2(n^2+3n+3)}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$.

◀ Часто для нахождения суммы ряда, общий член которого — рациональная функция от n, полезно разложить общий член ряда на простые дроби. Поступим здесь именно так:

$$\frac{2(n^2+3n+3)}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{n(n+1)+(n+2)(n+3)}{n(n+1)(n+2)(n+3)} =$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} + \frac{(n+3)-(n+2)}{(n+2)(n+3)} =$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}$$

Выпишем теперь столбцом n первых членов ряда, расположив слагаемые с одинаковыми знаменателями друг под другом:

$$a_1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4},$$

$$a_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5},$$

$$a_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6},$$

$$a_4 = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7},$$

$$a_5 = \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8},$$

. . . .

$$a_{n-3} = \frac{1}{n-3} - \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$$

$$a_{n-2} = \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

$$a_{n-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2},$$

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}.$$

Сложив выписанные члены ряда, получим:

$$S_n = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3},$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}\right) = \frac{4}{3}.$$

Пример 7. Доказать расходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \ln\frac{5}{4} + \cdots.$$

◀ Запишем общий член данного ряда в виде

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n;$$

так как

$$a_1 = \ln 2 - \ln 1,$$
$$a_2 = \ln 3 - \ln 2,$$
$$a_3 = \ln 4 - \ln 3,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n-1} = \ln n - \ln(n-1),$$
$$a_n = \ln(n+1) - \ln n,$$

то $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \ln(n+1)$. Ясно, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$. Ряд суммы не имеет и является расходящимся.

Упражнения

1. Даны формулы общих членов рядов:

а) $a_n = \dfrac{2n^2+1}{\sqrt{2^n+1}}$; б) $a_n = \cos n\pi \sin\dfrac{\pi}{2^n}$;

в) $a_n = \dfrac{2+(-1)^n}{n!}$; г) $a_n = \dfrac{(2n-1)!!}{n^n\sqrt{n}}$; всюду $n = 1, 2, 3, \cdots$.

Написать соответствующие ряды в развернутом виде. (По определению, $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)$; $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)$; $0!! = 1$.)

2. Написать возможную (простейшую) формулу общего члена для следующих рядов:

а) $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots$; б) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\cdots$;

в) $\frac{1}{3}+\frac{2}{7}+\frac{3}{15}+\frac{4}{31}+\cdots$; г) $1+\frac{1\cdot 3}{1\cdot 2}+\frac{2\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{3\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots$;

д) $\frac{\sin(\pi/2)}{\sqrt{2}}-\frac{\sin(\pi/4)}{\sqrt{4}}+\frac{\sin(\pi/6)}{\sqrt{6}}-\frac{\sin(\pi/8)}{\sqrt{8}}+\cdots$;

е) $2+\frac{1}{7}+\frac{4}{17}+\frac{3}{31}+\frac{6}{49}+\cdots$; ж) $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\frac{1}{15}+$

$+\frac{1}{23}+\cdots$.

3. По первым трем членам рядов 1) $1+3+7+\dots$; 2) $1+3+$ $+9+\dots$ восстановить их общие члены сначала в наипростейшей форме, а затем в виде а) $a_n = an^2+bn+c$; б) $b_n = \frac{1}{an^2+bn+c}$; в) $c_n = \frac{an+b}{cn+d}$.

4. Показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n}$ удовлетворяет необходимому признаку сходимости, но тем не менее расходится.

5. Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость следующих рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2\cdot 3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{5^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx-\cos(n+1)x}{n}$

(x — действительное число).

6. а) Опровергнуть следующее «доказательство» сходимости гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Воспользуемся критерием Коши; тогда

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}| = \left|\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+1} = \frac{p}{n+1}.$$

Так как при любом фиксированном p $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p}{n+1}=0$, то для любого $\varepsilon>0$ найдется такое число $N>0$, что для всех $n>N$ и любом натуральном p будет справедливо неравенство $p/(n+1)<\varepsilon$, а следовательно, и подавно $|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}|<\varepsilon$, что и доказывает сходимость данного ряда.

б) Пользуясь критерием Коши, доказать расходимость гармонического ряда.

Найти суммы или установить расходимость следующих рядов·

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}$.　8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln^{2n}2$.　9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+1}\left(2+\frac{1}{n}\right)$.　11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$.　12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.　14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$.　15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nq^{n-1}$.

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$.　17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2q^n$.　18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2+n-1}{(4n^2-1)(n^2+n)}$.　20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+4^n}{6^{n+1}}$.　21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$.

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.　23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+3n+1}{n^3(n+1)^3}$.　24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2(n+2)^2}$.

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}$.　26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{2}{n^2}$.

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n+2}-2\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n}\right)$.

28. Доказать, что если общий член ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ представим в форме $a_n=b_{n+1}-b_n$, то сумма ряда подсчитывается по формуле $S=\lim\limits_{n\to\infty}b_n-b_1$. Пользуясь этой формулой, найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left((n+2)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2(n+2)}-(n+1)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2(n+1)}\right).$$

Вычислить суммы следующих рядов:

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}\right]$. 30. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^2+5n+6}{n^2+5n+4}$.

31. $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1}$. 32. $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{\sqrt{(n+1)^2-1}-\sqrt{n^2-1}}{n(n+1)}$.

33. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{1}{n^2+n}\cos\frac{2n+1}{n^2+n}\right)$. 34. $\sum_{n=2}^{\infty}\log_{n+1}3\,[1-\log_n(n+1)]$.

35. $$\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg(\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}}_{n \text{ радикалов}}-\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}}_{n-1 \text{ радикалов}}\Bigg).$$

§ 2. СХОДИМОСТЬ РЯДОВ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Пусть задан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n \tag{1}$$

с положительными членами $a_n>0$. Нужно ответить на вопрос, сходится он или расходится. Следующие достаточные признаки позволяют судить об этом.

Признак сравнения 1. *Пусть даны ряды* (1) *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n \tag{2}$$

с положительными членами, причем для всех достаточно больших n $a_n\leqslant b_n$. *Тогда*

из сходимости ряда (2) *следует сходимость ряда* (1);

из расходимости ряда (1) *следует расходимость ряда* (2).

Сравнение исследуемых рядов производится обычно с табличными рядами:

$\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$, $a\neq 0$ (геометрическая прогрессия, сходящаяся при $|q|<1$ и расходящаяся при $|q|\geqslant 1$),

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (расходящийся гармонический ряд),

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ (обобщенный гармонический ряд, сходящийся при $p>1$ и расходящийся при $p\leqslant 1$).

Признак сравнения II. *Исследуется на сходимость ряд* (1). *Известно поведение ряда* (2). *Если существует конечный и отличный от нуля предел* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$, *то оба ряда либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся. Если же* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$, *то из сходимости ряда* (2) *следует сходимость ряда* (1).

Если, в частности, общие члены сравниваемых рядов эквивалентны при $n\to\infty$ $(a_n\sim b_n)$, *то оба ряда (в смысле сходимости) ведут себя одинаково.*

Признак Даламбера. *Если существует число* $q<1$ *такое, что для всех достаточно больших n справедливо неравенство* $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant q$, *то ряд* (1) *сходится; если же начиная с некоторого номера отношение* $\frac{a_{n+1}}{a_n}\geqslant 1$, *то ряд* (1) *расходится.*

На практике удобнее пользоваться более слабым признаком Даламбера в предельной форме.

Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho$, *то при* $\rho<1$ *ряд* (1) *сходится, а при* $\rho>1$ — *расходится (при* $\rho=1$ *ряд может сходиться или расходиться — в этом случае вопрос о сходимости ряда остается открытым).*

Признак Коши (радикальный). *Если существует число* $q<1$ *такое, что для всех достаточно больших n справедливо неравенство* $\sqrt[n]{a_n}\leqslant q$, *то ряд* (1) *сходится; если же начиная с некоторого номера* $\sqrt[n]{a_n}\geqslant 1$, *то ряд* (1) *расходится.*

На практике чаще пользуются признаком Коши в предельной форме: *если существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho$, *то при* $\rho<1$ *ряд* (1) *сходится, а при* $\rho>1$ — *расходится; (при* $\rho=1$ *возможны случаи как сходимости, так и расходимости ряда).*

Заметим, что признак Коши сильнее признака Даламбера, так как предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ может существовать, а предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a^n}$ — нет. Если же предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ существует, то существует и предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$, причем оба эти предела оказываются равными. Отсюда вытекает, что если применение одного из предельных признаков (Даламбера или Коши) не дает ответа о сходимости ряда (один из пределов, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ или $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$, равен единице), то применение другого признака также бесполезно.

Обобщенный признак Коши. *Если существует верхний предел* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=\rho$, *то при* $\rho<1$ *ряд* (1) *сходится, а при* $\rho>1$ — *расходится.* (Понятие верхнего предела разъясняется в примере 20, см. также [12].)

Интегральный признак Коши (основан на сравнении рядов с несобственными интегралами). *Пусть общий член ряда* (1) $a_n=f(n)>0$. *Если функция* $f(x)$, *принимающая в точках* $x=n$, $n=1, 2, 3, \ldots$ *значения* $f(n)$, *монотонно убывает в некотором промежутке* $a<x<\infty$, *где* $a\geqslant 1$, *то ряд* (1) *и несобственный интеграл* $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ *сходятся или расходятся одновременно* (см. [9], [12] или [24]).

Сразу же заметим, что функцию $f(x)$, принимающую в точках $x=n$ значения $f(n)$, чаще всего удается построить с помощью замены натурального n в выражении $f(n)$ на непрерывно изменяющийся аргумент x. Так, например, если $f(n)=1/n^2$, то $f(x)=1/x^2$; если $f(n)=2^n/n^n$, то $f(x)=2^x/x^x$ и т. п. Однако не всегда таким путем можно получить функцию $f(x)$. Если, например, $f(n)=1/n!$, то в этом случае нельзя заменить n на x, так как символ $x!$ при нецелых

x лишен смысла. Это, однако, не означает, что не существует функции $f(x)$, принимающей в точках $x = n$ значения $f(n)$. Напротив, она всегда существует, но ее аналитическое выражение не всегда просто найти.

Достаточный признак расходимости ряда. *Пусть члены ряда* (1) *неотрицательны. Если существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty} na_n \neq 0$, *то ряд* (1) *расходится.*

Более тонкими, чем перечисленные, являются следующие признаки сходимости (расходимости) рядов.

Признак Раабе. *Если существует число* $r > 1$ *такое, что для всех достаточно больших* n

$$R_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geqslant r,$$

то ряд (1) *сходится; если же начиная с некоторого номера* $R_n \leqslant 1$, *то ряд* (1) *расходится.*

Предельная форма признака Раабе: *если существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = R,$$

то при $R > 1$ *ряд* (1) *сходится, а при* $R < 1$ — *расходится; при* $R = 1$ *признак ответа о сходимости ряда не дает.*

Признак Бертрана. *Если существует предел*

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right]\ln n = B,$$

то при $B > 1$ *ряд* (1) *сходится, а при* $B < 1$ — *расходится.*

Признак Гаусса. *Если для ряда* (1) *отношение* a_n/a_{n+1} *может быть представлено в виде*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = A + \frac{B}{n} + \frac{Q_n}{n^p},$$

где $p > 1$, $|Q_n| \leqslant M$ (A, B, M, p — *постоянные*), *то* а) *при* $A > 1$, б) *при* $A = 1$, $B > 1$ *ряд* (1) *сходится. Если же* $A < 1$ *или* $A = 1$, *а* $B \leqslant 1$, *то ряд* (1) *расходится.*

Если, в частности, отношение a_n/a_{n+1} *можно представить в виде*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{B}{n} + \frac{C}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ или}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{B}{n-a} + \frac{C}{(n-a)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{A}$$

где B, C *и* a — *некоторые константы, а* $o(1/n^2)$ — *бесконечно малая высшего порядка малости по сравнению с* $1/n^2$ *при* $n \to \infty$, *то при* $B > 1$ *ряд* (1) *сходится, а при* $B \leqslant 1$ — *расходится.*

Для случая, когда отношение a_n/a_{n+1} представляет собой рациональную функцию от аргумента n

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n^m + c_1 n^{m-1} + \cdots + c_m}{n^m + b_1 n^{m-1} + \cdots + b_m},$$

признак Гаусса перефразируется так: *при* $c_1 - b_1 > 1$ *ряд* (1) *сходится, а при* $c_1 - b_1 \leqslant 1$ — *расходится.*

Логарифмический признак. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *с положительными членами сходится, если существует число* $q < 1$ *такое, что для всех достаточно больших* *n справедливо неравенство* $\frac{\ln n}{\ln(1/a_n)} < q$. *Если же начиная с некоторого номера* $\ln n/\ln(1/a_n) \geqslant 1$, *то данный ряд расходится.*

Признак сравнения Коши. *Если члены ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *положительны и монотонно убывают с возрастанием n, то этот ряд сходится или расходится одновременно с рядом* $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ (*или* $\sum_{k=1}^{\infty} m^k a_{m^k}$, *где m — любое натуральное число*).

Замечания. 1. При оценке факториалов больших чисел и вычислении пределов, содержащих $n!$, часто бывает полезна формула Стирлинга

$$n! \sim \sqrt{2\pi}\; n^{n+1/2} e^{-n},$$

которая означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n}} = 1$.

Применение формулы Стирлинга при исследовании рядов на сходимость будет рассмотрено в примере 15.

2. В дополнение к признакам сравнения скажем, что никакой сходящийся (расходящийся) ряд не может служить универсальным средством для установления путем сравнения с ним сходимости (расходимости) других рядов [24].

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)3^n}$.

◀ Сравнивая общий член данного ряда с общим членом сходящейся геометрической прогрессии $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$, где $q = \frac{1}{3} < 1$, замечаем, что $\frac{n}{(n+1)3^n} < \frac{1}{3^n}$ при всех n. Следовательно, исследуемый ряд сходится по признаку сравнения I.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^2+1}$.

◀ Замечаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n^2+1} = \frac{1}{2} \neq 0$. Необходимый признак сходимости не выполняется. Ряд расходится.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

◀ Так как $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$ для $n \geqslant 2$, а $\frac{1}{n}$ — общий член расходящегося гармонического ряда, то в силу признака сравнения I данный ряд расходится.

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+\ln n}$.

◀ Сравнение с гармоническим рядом по признаку сравнения I здесь ничего не дает, так как $\frac{1}{n+\ln n} < \frac{1}{n}$, и никакого заключения о сходимости данного ряда сделать нельзя. Воспользуемся приз-