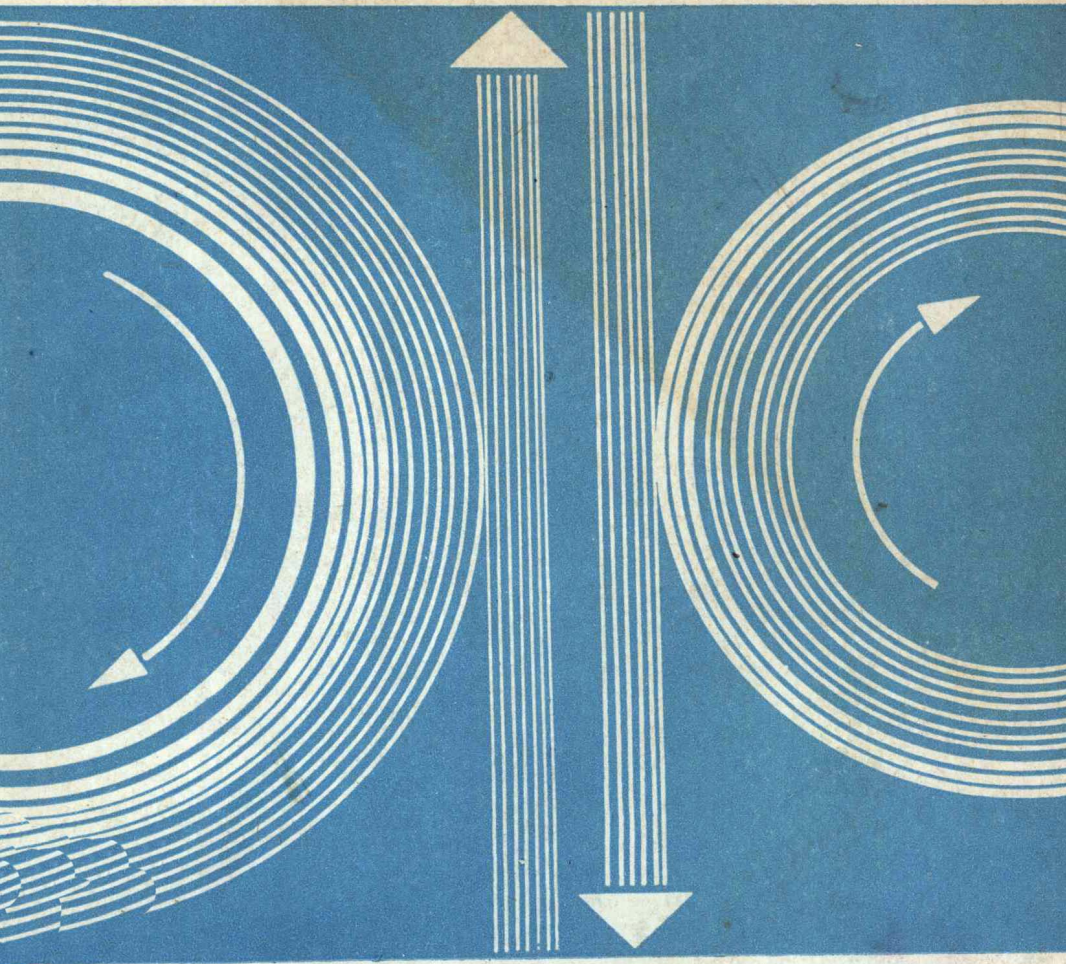


ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА



Министерство высшего и среднего специального образования БССР
Белорусский ордена Трудового Красного Знамени
политехнический институт

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

РЕСПУБЛИКАНСКИЙ МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ СБОРНИК

Выпуск 11

МИНСК "ВЫШЭЙШАЯ ШКОЛА" 1984

Главный редактор

А.Х.Ким, доктор технических наук, профессор

Редакционный совет:

Г.Ф.Ершов, В.А.Ибрагимов, А.Е.Крушевский, В.И.Коробко, М.А.Левин,
Е.Н.Ламбина, М.Д.Мартыненко, И.А.Прусов,
В.П.Ставров, Л.А.Ротт, И.Ф.Шидловский

Ответственный за выпуск И.Ф. Шидловский

Настоящий сборник посвящен вопросам механики, которые разрабатываются в вузах БССР. Тематика статей соответствует трем традиционным направлениям механики: общей механике, механике жидкостей и газов и механике твердого деформируемого тела.

В сборнике печатаются статьи, посвященные решению некоторых задач реодинамики вязкопластичных сред, задач математической и прикладной упругости, вопросам статической механики и др.

Предназначен для преподавателей общетехнических дисциплин соответствующего профиля, студентов вузов, аспирантов, инженерно-технических и научных работников.

ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОЕКТАХ ПЛОСКИХ УПРУГИХ ТЕЛ С КОНЦЕНТРАТОРАМИ ПРИ СЛОЖНОМ КВАЗИСТАТИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

1. Оптимальное проектирование упругих элементов конструкций состоит в выборе конфигурации элемента, обеспечивающей наибольшую несущую способность на множестве конфигураций, допустимых по деформативным, прочностным, технологическим и другим признакам [1]. В математическом аспекте указанная проблема принадлежит классу нелинейных обратных задач теории упругости для области V с границей S , содержащей неизвестную заранее часть S_z , и может быть сформулирована в виде

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (V); \quad \sigma_{ij,n_j} = T_i^* \quad (S_T = S_{T1} + S_{T2}); \quad (1)$$

$$g_{ij}(\sigma_{mn}, e_{mn}) = 0 \quad (V); \quad k_{ij}(e_{mn}; u_{m,n}) = 0 \quad (V); \quad (2)$$

$$u_i = u_i^* \quad (S_u = S_{u1} + S_{u2});$$

$$W(\sigma_{ij}) \leq 0 \quad (V + S) \quad (i, j, m, n = 1, 2), \quad (3)$$

где принято, что части S_T и S_u поверхности S с заданными значениями усилий T_i^* и перемещений u_i^* могут содержать как фиксированные (отмеченные индексом "1"), так и варьируемые при решении задачи (отмеченные индексом "2") участки; через g_{ij} , k_{ij} для краткости обозначены операторы определяющих уравнений упругости и соотношений Коши, и, кроме того $u_{mjn} = \partial u_m / \partial x_n$. Ограничение (3) отвечает какой-либо из классических теорий прочности, поэтому допустимая область N изменения T_i^* , u_i^* , отвечающая условиям эксплуатации элемента V , одновременно должна определять (для фиксированной V) решение упругой задачи (1), (2), не нарушающее неравенства (3). Несущая способность при этом определяется как некоторая мера области N , например, наибольшее значение параметра λ при пропорциональном нагружении $T_i^* = T_i^0 \lambda$, если функций $T_i^0(x_K)$, $u_i^*(x_K)$ не зависят от λ .

Класс $\{V, N\}$ допустимых конфигураций V (с учетом его назначения) и отвечающих им областей нагружения N определяет множество допустимых решений задачи (1) – (3), на котором и отыскивается оптимальный проект – форма области V , обеспечивающая наибольшую несущую способность.

Из сказанного следует, что отыскание оптимального проекта требует замыкания системы (1) – (3) с помощью дополнительных соотношений для определения части поверхности $S_2 = S_{T2} + S_{u2}$, варьируемой в процессе решения.

Для случая двухосного растяжения бесконечной пластины с одним или несколькими незагруженными отверстиями решение задачи (1) – (3) построено в замкнутом виде в [1], где в качестве дополнительного принималось условие равнопрочности на контурах отверстий:

$$\sigma_t = \sigma_0 \quad (S_{T2} = S_T), \quad (4)$$

где σ_t , σ_0 – тангенциальная компонента тензора напряжений (t-касательная на S) и предел прочности при растяжении соответственно. Оптимальность указанного решения доказана в работе [2], где рассматривался также случай пластины с жесткими включениями; условие (4) в последнем случае заменялось более общим предельным соотношением

$$\tau = \tau_0 \quad (S_2) \quad (5)$$

для интенсивности касательных напряжений τ . В указанном виде критерий равнопрочности справедлив и для других типов напряженных состояний – кручения, изгиба (см. также [1]).

Существенным ограничением применимости результатов [1, 2] является зависимость оптимальной формы концентраторов от параметра неоднородности $p = \sigma_y^\infty / \sigma_x^\infty$ для предельных усилий σ_x^∞ , σ_y^∞ , приложенных к пластине на бесконечности. Поэтому для нагружений с изменяющимся параметром p условие равнопрочности утрачивает смысл и должно быть обобщено с учетом истории изменения внешних нагрузок. Указанное обобщение применительно к пластинам с отверстиями рассматривается ниже.

2. Будем считать изменение T_1^* , u_1^* в процессе нагружения параметризованным с помощью совокупности параметров $\lambda(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ из области λ .

Поскольку для всех значений параметров из λ одновременно удовлетворить условию (4) невозможно при любом выборе S_2 , примем в качестве целевого минимизируемый на $\{V, N\}$ функционал

$$Q = \int_{\Lambda} \int_{S_2} (\sigma_t - \sigma_0)^2 f(\lambda) d\lambda ds. \quad (6)$$

Здесь $f(\lambda)$ – плотность распределения, учитывающая вклад состояния с параметрами λ ($\int f d\lambda = 1$). В частности, для постоянных значений T_1^* , u_1^* следует принять в качестве $f(\lambda)$ k -мерную функцию Дирака $\delta(\lambda - \lambda_0)$. Выбор постоянной σ_0 будет указан ниже.

Необходимые условия экстремума получаются, как обычно, при обращении в нуль первой вариации δQ с учетом связей (1), (2) и полагая вариации $\delta \sigma_{ij}$, δe_{ij} , δu_i независимыми взаимно и от параметров λ . Вариация функционала (6) для переменной области V имеет вид

$$\begin{aligned} \delta Q = \int_{\Lambda} f d\lambda \int_{S_2} \{ & 2(\sigma_t - \sigma_0)[2\sigma_{ij} n_j t_i (\delta n) + \delta \sigma_{ij} t_i t_j + \\ & + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial n} t_i t_j \delta n + (\sigma_t - \sigma_0)^2 \chi \delta n] \} ds, \end{aligned} \quad (7)$$

где δn — расстояние вдоль нормали n_i между кривой S_2 и ее измененной формой S_2^1 (рис. 1); t_i — вектор касательной на S_2 , κ — кривизна на S_2 .

Будем считать внешние нагрузки на S_{T2} нулевыми, причем для пластины с отверстиями поверхность S_{u2} отсутствует:

$$T_i^* = 0 \quad (S_{T2}). \quad (8)$$

Полагая функции σ_{ij} , u_i непрерывно дифференцируемыми вплоть до границы S и вводя множители Лагранжа p_i , q_i для связей (1), с учетом (8) находим:

$$\delta \int_V p_i \sigma_{ij,j} dv = \int_V p_i \delta \sigma_{ij,j} dv = \int_S \delta \sigma_{ij,n_j} p_i ds - \int_V p_{i,j} \delta \sigma_{ij} dv; \quad (9)$$

$$\delta \int_{S_{T1}} (\sigma_{ij,n_j} - T_i^*) q_i ds = \int_{S_{T1}} q_i \delta \sigma_{ij,n_j} ds; \quad \delta \int_{S_{T2}} q_i \sigma_{ij,n_j} ds =$$

$$= \int_{S_{T2}} q_i [\delta \sigma_{ij,n_j} - \sigma_{ij,t_j} (\delta n)' + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial n} n_j \delta n] ds.$$

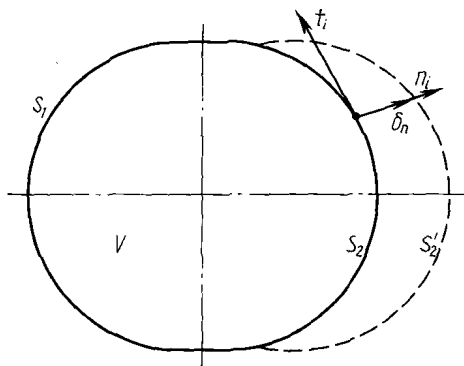


Рис. 1. Варьирование области.

Имея в виду лишь одно из естественных краевых усилий для уравнений Эйлера вариационной задачи, получающееся на $S_2 = S_{T2}$ в качестве множителя при вариации $\delta \sigma_{ij}$, вариации связей (2) в дальнейшем не понадобятся. Из (7), (9) получаем

$$\int_{S_2} [2 \int_{\Lambda} (\sigma_t - \sigma_0) f d\lambda] t_i t_j \delta \sigma_{ij} ds + \int_{S_2} (p_i + q_i) \delta \sigma_{ij,n_j} ds = 0,$$

откуда в силу произвольности $\delta \sigma_{ij}$ имеем на S_2

$$[2 \int_{\Lambda} (\sigma_t - \sigma_0) f d\lambda] t_i t_j + (p_i + q_i) n_j = 0 \quad (i, j = 1, 2). \quad (10)$$

Вследствие ортогональности слагаемых в (10) заключаем, что

$$\int_{\Lambda} (\sigma_t - \sigma_0) f d\lambda = 0 \quad (S_2). \quad (11)$$

Соотношение (11) является искомым обобщением условия равнопрочности (4) при переменном нагружении и переходит в последнее для фиксированной нагрузки $f(\lambda) = \delta(\lambda - \lambda_0)$:

$$\int_{\Lambda} [\sigma_t(\lambda, s) - \sigma_0] \delta(\lambda - \lambda_0) d\lambda = \sigma_t(\lambda, s) - \sigma_0 = 0.$$

Отметим, что аналогичный вывод легко может быть проведен и для случая, когда варьируется часть S_{u2} линии S_u (полагая при этом $u_1^* = 0$), а также для более общего условия (5).

3. Рассмотрим приложение условия (11) к задаче о бесконечной пластине со свободными от усилий отверстиями, подвергнутой двухосному нагружению $\sigma_{11} \rightarrow \sigma_1^\infty$, $\sigma_{22} \rightarrow \sigma_2^\infty$, $\sigma_{12} \rightarrow 0$ ($x_1, x_2 \rightarrow \infty$), причем внешние усилия являются переменными: $\sigma_1^\infty = \sigma_1^\infty(\lambda)$; $\sigma_2^\infty = \sigma_2^\infty(\lambda)$.

Обозначим через $\sigma_{ij}(\lambda, x_K)$ тензор напряжений в произвольный момент нагружения λ . В силу линейности задачи очевидно [3], что

$$\sigma_{ij}(x_K, \lambda) = \sigma_1^\infty(\lambda) \sigma_{ij}^{(1)}(x_K) + \sigma_2^\infty(\lambda) \sigma_{ij}^{(2)}(x_K), \quad (12)$$

причем

$$\sigma_{11}^{(1)} \rightarrow 1; \quad \sigma_{22}^{(2)} \rightarrow 1; \quad \sigma_{22}^{(1)}; \sigma_{11}^{(2)}; \sigma_{12}^{(1)}, \sigma_{12}^{(2)} \rightarrow 0 \\ (x_1, x_2 \rightarrow \infty). \quad (13)$$

Поэтому вследствие (11) тензор осредненных напряжений

$$\sigma_{ij}^0 = \int_{\Lambda} \sigma_{ij}(x_K, \lambda) f d\lambda = k_1 \sigma_{ij}^{(1)} + k_2 \sigma_{ij}^{(2)} \quad (k_{1,2} = \int_{\Lambda} \sigma_{1,2}^\infty(\lambda) f d\lambda) \quad (14)$$

удовлетворяет (11.) на контурах отверстий S_2 соотношению

$$\sigma_t^0 = \sigma_0 \quad (\sigma_t^0 = \sigma_{ij}^0 t_i t_j). \quad (15)$$

Таким образом, согласно (15), условие равнопрочности (4) должно удовлетворяться для решения (12) в некоторый промежуточный момент нагружения, определяемый соотношением параметров k_1, k_2 .

Решение задачи (13), (15) при отсутствии на S_2 усилий

$$\sigma_n^{(1)} = \sigma_{nt}^{(1)} = 0; \quad \sigma_n^{(2)} = \sigma_{nt}^{(2)} = 0 \quad (16)$$

найдем посредством комплексного представления Колосова-Мусхелишвили:

$$\sigma_n + \sigma_t = 2(\phi(\xi) + \overline{\phi(\xi)}); \\ \sigma_t - \sigma_n + 2i \sigma_{tn} = 2\xi^2 \frac{\omega'}{\bar{\omega}'} (\bar{\omega} \frac{\xi'}{\omega'} + \psi) \quad (S);$$

$$(\phi(\xi) = \phi(\omega(\xi)); \quad \Psi(\xi) = \Psi(\omega(\xi))) ,$$

где $z = \omega(\xi)$ — конформное отображение исходной плоскости $z = x_1 + ix_2$ на вспомогательную плоскость с n выброшенными кругами [1]. Ограничиваясь

для краткости случаев одного отверстия ($n = 1$), в соответствии с (12), (14) положим

$$\begin{aligned}\phi(\xi, \lambda) &= \sigma_1^\infty \phi_1(\xi) + \sigma_2^\infty \phi_2(\xi); \quad \psi(\xi, \lambda) = \sigma_1^\infty \psi_1(\xi) + \sigma_2^\infty \psi_2(\xi); \\ \phi_0(\xi) &= \int_{\Lambda} \phi f d\lambda; \quad \psi_0(\xi) = \int_{\Lambda} \psi f d\lambda.\end{aligned}\quad (18)$$

Поскольку функция $\omega(\xi)$ неизвестна, будем искать вначале осредненные функции (18). Из (13), (15), (17) при $\omega \rightarrow \xi$, $\xi \rightarrow \infty$ следует, что

$$\phi_0 + \bar{\phi}_0 \rightarrow \frac{k_1 + k_2}{2}; \quad \psi_0 \rightarrow \frac{k_2 - k_1}{2} \quad (\xi \rightarrow \infty). \quad (19)$$

Кроме того, на окружности $|\xi| = 1$, являющейся образом контура отверстия S_2 , согласно (15)–(17) имеем

$$\phi_0 + \bar{\phi}_0 = \frac{1}{2} \sigma_0; \quad 2\xi^2 \frac{\omega'}{\omega} (\bar{\omega} \frac{\phi_0'}{\omega} + \psi_0) = \sigma_0. \quad (20)$$

Из (19), (20) следует, что во внешности круга $|\xi| \geq 1$

$$\phi_0(\xi) = \frac{1}{4} \sigma_0 + iC; \quad k_1 + k_2 = \sigma_0 \quad (21)$$

(C – постоянная, определяемая вращением на бесконечности).

Второе краевое условие в (20) тогда запишется

$$\psi_0 \omega' = \frac{1}{2} \sigma_0 \bar{\omega}' \xi^2. \quad (22)$$

Решение задачи (19), (22) для $\psi(\xi)$, $\omega(\xi)$ достигается сведением ее к задаче линейного сопряжения и имеет вид

$$\omega(\xi) = \xi - \frac{2a}{\sigma_0} \cdot \frac{1}{\xi}; \quad \psi_0 \omega' = a + \frac{\sigma_0}{2\xi^2} \quad (a = \frac{k_2 - k_1}{2}). \quad (23)$$

Из (23) следует, что контур S_2 является эллипсом с параметром

$$m = \frac{k_1 - k_2}{\sigma_0} \quad \left(\frac{|k_1 - k_2|}{\sigma_0} = \left| \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right| \leq 1 \right).$$

Функции $\phi_k(\xi)$, $\psi_k(\xi)$ ($k = 1, 2$) теперь могут быть найдены способом, указанным в [3].

Полагая, в частности для полученного выше решения $f = \delta(\lambda - \lambda_0)$, из (12), (14) находим

$$k_1 = \sigma_1^\infty; \quad k_2 = \sigma_2^\infty, \quad \sigma_{ij}^0 = \sigma_{ij},$$

поэтому согласно (16) заключаем, что для фиксированных нагрузок σ_1^∞ , σ_2^∞ указанное решение совпадает с полученным в работе [1].

С целью оценки концентрации напряжений в общем случае примем в (12) траекторию нагружения

$$\sigma_1^\infty = p\lambda; \quad \sigma_2^\infty = p(1-\lambda); \quad f(\lambda) = 1/\lambda_0 \quad (0 \leq \lambda \leq \lambda_0). \quad (24)$$

Из (14), (21) имеем

$$k_1 = \frac{1}{2} p \lambda_0; \quad k_2 = p(1 - \frac{1}{2} \lambda_0); \quad p = \sigma_0, \quad m = \lambda_0 - 1. \quad (25)$$

Решение (12) согласно формулам (82) работы [3] дает значение тангенциального напряжения на S_2 в любой момент нагружения, равное

$$\sigma_t = \frac{p}{1 - 2m \cos 2\theta + m^2} [\lambda(1 - m^2 + 2m - 2 \cos 2\theta) + (1 - \lambda)(1 - m^2 - 2m + 2 \cos 2\theta)]. \quad (26)$$

При $\lambda_0 \rightarrow 0$ или $\lambda_0 = 1$ из (25) следует $m = -1$ или $m = 0$, поэтому при одноосном ($\sigma_2^\infty = p$, $\sigma_1^\infty = 0$) или двухосном симметричном нагружении оптимальным проектом является пластина с разрезом или круговым вырезом соответственно, что очевидно непосредственно.

Из соотношений (24) – (26) следует также, что полученная конфигурация отверстия удовлетворяет в процессе нагружения условию (4) лишь при значении параметра $\lambda = \lambda_0/2$.

В общем случае анализ зависимости (26) показывает, что наименьшее значение максимального напряжения по формуле (26) за весь период нагружения в выражениях (24) достигается при выборе $m = \lambda_0 - 1$ согласно зависимости (25), позволяя, в частности, достигнуть выигрыша в прочности по сравнению с вариантом пластины, имеющей круговые отверстия.

Отметим, что согласно критерию прочности наибольшее значение напряжения в теле не должно превышать допустимого значения σ_c .

Поэтому согласно (26) имеем

$$\max_{\lambda, \theta} |\sigma_t(\lambda, \theta)| = \sigma_c \quad (0 \leq \lambda \leq \lambda_0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi). \quad (27)$$

Соотношение (27) определяет допустимый уровень усилия $p = \sigma_0$. В частности, для симметричного нагружения (24) при $\lambda_0 = 1$ и оптимального проекта пластины получаем

$$3p = 3\sigma_0 = \sigma_c; \quad p = \sigma_0 = \frac{\sigma_c}{3}.$$

Аналогичным образом могут быть построены оптимальные проекты пластин с несколькими отверстиями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г.П., Ершов Л.В. Механика разрушения. – М.: Наука, 1976. – 224 с.
2. Ибрагимов В.А. О равнопрочных конфигурациях упругих тел. – Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук, 1983, № 4, с. 33.
3. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.

О КРИТЕРИИ РАЗРУШЕНИЯ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ
С УГЛОВЫМИ ТОЧКАМИ

Предложенный в [1] критерий разрушения упругих тел, граница которых содержит угловую точку, имеет вид

$$N = N_c. \quad (1)$$

Здесь N – коэффициент при главном члене сингулярного разложения поля напряжений (локально симметричного в системе координат x, y , отнесенной к угловой точке),

$$\sigma_{yy} \sim \frac{N}{r^\lambda} : \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0, \quad (2)$$

зависящий от геометрии области и условий нагружения; λ – показатель особенности, являющийся функцией угла выреза ψ .

Критерий (1) введен из соображений размерности по аналогии со случаем трещины-разреза. Однако степень его мотивированности в сравнении с последним далеко не одинакова, поскольку обоснование соотношения (1) в рамках энергетической теории или силового подхода затруднено. Другим недостатком критерия (1) является необходимость экспериментального определения постоянной разрушения N_c для всех значений угла ψ .

В целях физической трактовки соотношения (1) и постановки рационального эксперимента целесообразно дать истолкование критерия (1) с позиций линейной механики разрушения.

Основным предположением в последней является допущение о наличии в опасной точке области начальной трещины [1], малой в сравнении с характерным размером тела H . Распространение трещины служит причиной разрушения материала, причем ответственным за разрушение является коэффициент интенсивности K локального поля напряжений около конца трещины [1]. Критерий распространения трещины в линейной механике разрушения имеет вид

$$K = K_c. \quad (3)$$

Связь между величинами N, K может быть найдена из решения упругой задачи для исходной области с внесенным разрезом

$$F(N, K, H, l) = 0, \quad (4)$$

поэтому критерий разрушения с учетом (3) принимает вид

$$F(N, K_c, H, l) = 0. \quad (5)$$

Учитывая малость параметра l/H (что характерно для начальных трещин в высокопрочных сталях и других конструкционных материалах), зависимость (4) установим с помощью метода внешних и внутренних разложений [2]. В качестве внешнего разложения следует принять асимптотику поля напряжений

на бесконечности в задаче о бесконечном теле с угловым вырезом и разрезом в его вершине. Внутренним является разложение поля напряжений для исходной задачи без разреза в окрестности угловой точки.

Таким образом, предлагаемый подход к определению условия разрушения тела сводит решение задачи к определению коэффициента N в рамках обычного упругого анализа для тела без трещины; критическое значение параметра N (или, что эквивалентно, внешних усилий) определится тогда из соотношения (5).

В качестве примера, иллюстрирующего предложенный подход, рассмотрим случай антиплоской деформации цилиндрического тела с осью x_3 и поперечным сечением, отнесенным к декартовым осям x, y . Компоненты тензора напряжений могут быть определены по формуле

$$\tau_x - i \tau_y = f'(z) = F(z),$$

где $F(z)$ — аналитическая функция комплексной переменной $z = x + iy$. Отличной от нуля компонентой смещения будет смещение вдоль оси

$$x_3 \quad \omega(x_1, x_2) = \frac{1}{\mu} \operatorname{Re} f(z).$$

Главный вектор усилий R , действующий на произвольную дугу AB в области, занимаемой телом, определяется соотношением

$$R = \operatorname{Im} f(t), t \in AB. \quad (6)$$

Для асимптотического анализа поля напряжений в области, содержащей угловую точку с трещиной, рассмотрим однородную задачу для клина с разрезом в вершине (рис. 1).

Берега клина и разреза будем считать незагруженными, поэтому согласно (6) на ломаной $LOMP$ имеем:

$$f(z) - \overline{f(z)} = 0.$$

Отобразим указанную область на верхнюю полуплоскость вспомогательной плоскости комплексного переменного ξ с помощью функции

$$z = \omega(\xi) = 1(-i)^{\lambda}(\xi-1)^{m_1} \left(1 - \frac{m_1}{m_2} \xi\right)^{m_2};$$

$$\left(\lambda = \frac{2\beta}{\pi}; m_1 = \frac{\beta+\alpha}{\pi}; m_2 = \frac{\beta-\alpha}{\pi}\right). \quad (7)$$

Краевое условие (6) преобразуется к виду

$$g(\xi) - \overline{g(\xi)} = 0 \quad (\operatorname{Im} \xi = 0), \quad (8)$$

где $g(\xi) = f(\omega(\xi))$ — аналитическая в верхней полуплоскости функция.

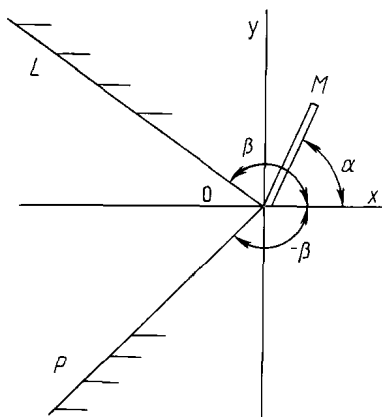


Рис. 1. Клин с разрезом в вершине.

Решениями задачи (8) являются функции

$$f_k(\xi) = C\xi^K, \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots; \operatorname{Im} C = 0). \quad (9)$$

Отрицательным значениям соответствуют решения с неограниченными смещениями в окрестности точки $\xi = 0$, являющейся образом вершины трещины М при отображении (9). Значения $k \geq 2$ определяют решения, не влияющие на асимптотику в вершине угла, поэтому следует принять в (9) $k = 1$.

Главный член разложения указанного решения при $z \rightarrow \infty$ согласно (7), (9) запишется

$$f(z) = Ci \left(\frac{z}{1} \right)^\lambda \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^s, \quad (10)$$

где $\lambda = \pi/2\beta$; $s = (a - \beta)/2\beta$.

Аналогично разложение в окрестности точки М ($z \rightarrow 1e^{i\alpha}$) имеет вид

$$f(z) = Ci(z - 1e^{i\alpha})^{1/2} \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^{1/2} \left(\frac{\pi}{l\beta} \right)^{1/2} e^{-\frac{l\alpha}{2}} \quad (11)$$

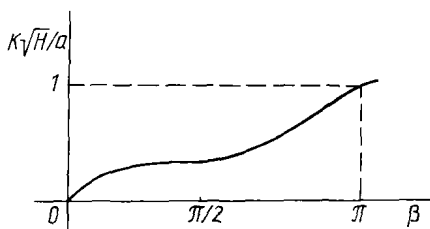


Рис. 2. Зависимость коэффициента интенсивности от угла.

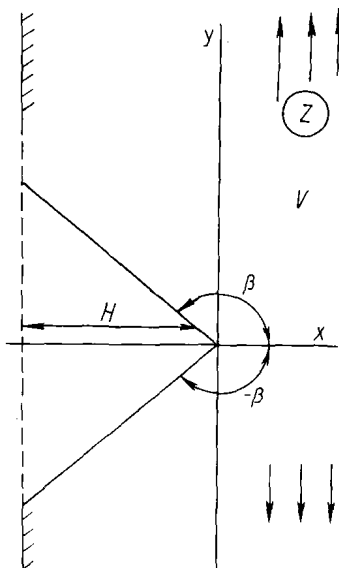


Рис. 3. Полуплоскость с угловым вырезом.

Коэффициенты интенсивности определяются формулами:

$$K = \lim_{z \rightarrow 1e^{i\alpha}} [\sqrt{(z - 1e^{i\alpha})} (\tau_y + i\tau_x)];$$

$$N = \lim_{z \rightarrow \infty} [z^{-\lambda} (\tau_y + i\tau_x)];$$

Из соотношений (9) – (11) следует, что

$$K = \frac{1}{2} C \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^{1/2} \left(\frac{\pi}{\beta l} \right)^{1/2} e^{-\frac{i\alpha}{2}};$$

$$N = c \lambda^{1-\lambda} \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^s. \quad (12)$$

Анализ первого из выражений (12) показывает, что максимальное значение $|K|$ достигается при $\alpha = 0$, поэтому наиболее опасной является трещина, симметричная относительно берегов выреза. Полагая в (12) $\alpha = 0$, получим зависимость между K и N :

$$\frac{K}{N} = \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^{1/2} \lambda^{-1/2}. \quad (13)$$

Представляет интерес зависимость коэффициента интенсивности K от угла выреза. Из анализа размерностей при однопараметрическом нагружении тела сдвиговыми усилиями интенсивности p следует, что $N = apH^{1-\lambda}$ (a — безразмерная постоянная), поэтому из (13) находим

$$\frac{K \sqrt{H}}{a} = p \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{H} \right)^{\lambda - 1/2}. \quad (14)$$

График зависимости (14) от величины угла β представлен на рис. 2.

Согласно условию (2) и соотношению (13) критерий разрушения принимает вид

$$N = K_c \left(\frac{\pi}{\beta} \right)^{1/2} \lambda^{1/2 - \lambda} \quad (\lambda = \pi/2\beta), \quad (15)$$

где коэффициент N отыскивается из обычного упругого анализа задачи без трещины.

Таким образом, в сравнении с критерием (1) экспериментального определения требуются лишь параметр K_c и характерная для данного материала длина начальной трещины l , что существенно снижает объем эксперимента.

В качестве примера приложения критерия (15) рассмотрим задачу о полуплоскости с угловым вырезом V (рис. 3).

Граница тела свободна от усилий. На бесконечном удалении от выреза приложены сдвиговые усилия $\tau_y = \tau_\infty$, $\tau_x = 0$.

Конформное отображение верхней полуплоскости $\text{Im} \xi \geq 0$ переменного ξ на область V имеет вид

$$z = \omega(\xi) = - \frac{iR}{m} \int_0^\xi \left(1 - \frac{1}{t^2} \right)^{1/2} - \frac{\beta}{\pi} d\xi, \quad (16)$$

$$\text{Здесь } m = \int_0^1 \left(\frac{1}{t^2} - 1 \right)^{1/2} - \frac{\beta}{\pi} dt; \quad R = -H \cos \beta,$$

где H — глубина выреза.

В плоскости ξ получаем следующую краевую задачу:

$$f(\xi) - \overline{f(\xi)} = 0 \quad (\text{Im} \xi = 0; \quad -\infty < \text{Re} \xi < +\infty);$$

$$\text{Im} \left(\frac{f'(\xi)}{\omega'(\xi)} \right) \rightarrow -\tau_\infty; \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (17)$$

Решением краевой задачи (17) служит функция

$$f(\xi) = \frac{\tau_{\infty} R}{m} \xi.$$

Коэффициент интенсивности напряжений в вершине угла определится теперь по формуле

$$N = \tau_{\infty} \left(\frac{2m\beta}{\pi R} \right)^{\lambda-1} \quad (\lambda = \pi/2\beta). \quad (18)$$

Критическое значение усилия τ_{∞} , отвечающее страгиванию трещины, теперь определится из (18) и (13) в виде

$$\tau_{\infty} = K_c l^{\frac{1}{2}} - \lambda R^{\lambda-1} \left(\frac{\pi}{\beta} \right)^{\lambda - \frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2m} \right)^{\lambda-1}. \quad (19)$$

В частном случае вырождения углового выреза в разрез длины H ($\beta = \pi$) критерий разрушения (19) принимает вид $\tau_{\infty} \sqrt{\frac{H}{2}} = K_c$, совпадающий с известным $\tau_{\infty} \sqrt{\frac{H+1}{2}} = K_c$ при условии малости параметра l/H .

Другой предельный случай соответствует переходу к полуплоскости с трещиной длины l ($\beta \rightarrow \pi/2$). Из (19) следует тогда соотношение $\frac{\tau_{\infty} \sqrt{1}}{\sqrt{2}} = K_c$, совпадающее с точным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г.Н. Механика хрупкого разрушения. — М.: Наука, 1974. — 640 с.
2. Черепанов Г.Н., Ершов Л.В. Механика разрушения. — М.: Наука, 1974. — 224 с.

УДК 539.3

А.Е.КРУШЕВСКИЙ, канд. техн. наук,
В.Н.АПАНОВИЧ, канд.техн.наук (БПИ)

О СХОДИМОСТИ ВАРИАЦИОННОГО МЕТОДА ПРИ ТОЧЕЧНОМ ВЫПОЛНЕНИИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

При решении задач теории упругости аналитическими вариационными методами скорость сходимости приближенных решений к точному в значительной степени определяется аппроксимативными свойствами применяемых координатных систем.

В настоящее время для улучшения качества аппроксимации решения краевой задачи применяются структуры, удовлетворяющие либо граничным условиям (ГУ), либо внутренним условиям равновесия [1].

В работе [2] показано, что использование полиномиальных координатных систем, точно удовлетворяющих условиям равновесия внутри тела, значительно улучшает сходимость приближенных решений и повышает устойчивость вычислительного процесса. В данной работе исследуется сходимость вариаци-

онных решений некоторых трехмерных задач теории упругости при точном выполнении не только условий равновесия внутри тела, но и граничных условий в некоторых точках поверхности.

Методика удовлетворения внутренних и граничных условий базируется на построении систем алгебраических уравнений связей между коэффициентами стандартных степенных рядов [1] с последующим преобразованием последних на основе общих решений уравнений связей [3].

В работе рассмотрены задачи о равновесии куба со стороной $l = 1$ при следующих исходных данных.

Задача 1. $\vec{P}(x, y, z) = \{0; 0; \cos \pi x \cos \pi y\}$, при $z = 0,5$;

$\vec{P}(x, y, z) = \{0; 0; -\cos \pi x \cos \pi y\}$, при $z = -0,5$,

где $\vec{P}(x, y, z)$ – вектор поверхностных нагрузок.

Задача 2. $\vec{P}(x, y, z) = \{0; 0; -25\}$, при $z = 0,5$; $-0,15 \leq x \leq 0,15$; $-0,15 \leq y \leq 0,15$;

$\vec{P}(x, y, z) = \{0; 0; 25\}$, при $z = -0,5$; $-0,15 \leq x \leq 0,15$; $-0,15 \leq y \leq 0,15$.

Задача 3. $\vec{U}(x, y, z) = \{0; 0; -w_0\}$, при $z = 0,5$;

$\vec{V}(x, y, z) = \{0; 0; w_0\}$, при $z = -0,5$.

Модуль упругости материала куба $E = 2 \cdot 10^6$, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, смещение грани $w_0 = 0,1$.

В силу симметрии решения рассматривалась 1/8 куба. ГУ удовлетворялись точно в точках с координатами: (0; 0; 0,5) для задачи 1; (0; 0; 0,5) для задачи 2; (0; 0; 0,5); (0; 0,25; 0,5); (0; 0,5; 0,5); (0,25; 0; 0,5); (0,25; 0,25; 0,5); (0,5; 0; 0,5); (0,5; 0,5; 0,5) для задачи 3.

Исследование сходимости проводилось сравнением численных результатов решений задач при различных порядках аппроксимации вектора смещений куба. При этом максимальная степень n аппроксимирующих полиномов последовательно увеличивалась от $n = 1$ до $n = 9$. Поскольку уравнения равнове-

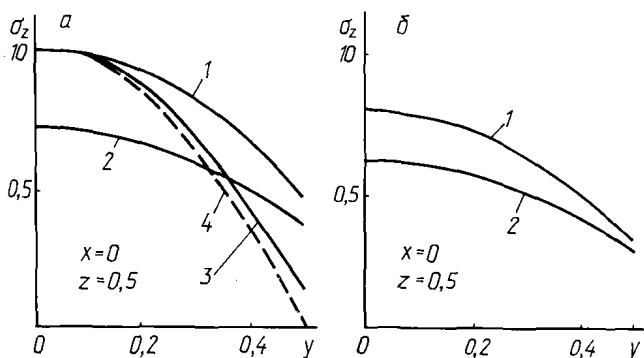


Рис. 1. Распределение напряжений σ_z для задачи 1: а – на поверхности куба; б – внутри куба; 1 – решение с выполнением граничного условия для $n = 3$; 2, 3 – соответственно решение без выполнения граничных условий для $n = 3$ и $n = 5$; 4 – точное решение.

сия внутри тела удовлетворялись точно, то оценка погрешности решений проводилась также по выполнению граничных условий.

Численные эксперименты, проведенные на ЭВМ ЕС-1022, показали, что точное выполнение граничных условий в области максимальной интенсивности поверхностных нагрузок значительно улучшает сходимость приближенных решений к точному. Для задачи 1 (рис. 1) показаны распределения напряжений σ_z по поверхности и внутри куба, рассчитанные для $n = 3$ (второе приближение) и $n = 5$ (третье приближение). Из графиков рис. 1 видно, что точечное удовлетворение граничных условий позволяет значительно уточнить расчетное напряженно-деформированное состояние куба в заданной области при низких порядках аппроксимации вектора смещений. Наблюдается хорошая сходимость приближенных решений к точному по энергии (рис. 2), где $F(\vec{V})$ — значение минимизируемого энергетического функционала; N — количество координатных функций, удерживаемых в решении.

На рис. 3 показаны графики напряжений σ_z на верхней грани куба, вычисленные для задачи 2. Анализ этих графиков показывает, что точечное выполнение граничных условий в области приложения нагрузки способствует успешному выполнению указанных условий на всей грани. С увеличением порядка аппроксимации поверхность куба "освобождается" от напряжений в тех областях, где не заданы поверхностные нагрузки. При решении этой задачи также наблюдается хорошая сходимость приближенного решения к точному по энергии (рис. 4).

В задаче 3 граничное условие в перемещениях точно интерполировалось по семи точкам. Решение проведено для $n = 5$.

Анализ расчетных значений перемещений верхней грани куба показывает, что условие $w = -w_0$ при $z = 0,5$ (соответственно $w = w_0$ при $z = -0,5$) на всей грани выполняется точно. Значения перемещений u и v на этих же гранях на 4–5 порядков меньше, чем значения перемещений w , что свидетельствует о высокой точности выполнения условий $u = v = 0$ при $z = \pm 0,5$.

На рис. 5, а, б показаны графики перемещений боковых граней куба, из которых видно, что при сжатии между жесткими плитами без скольжения куб приобретает четко выраженную "бочкообразную" форму. Этот факт подтверждается данными экспериментов [4].

В табл. 1 приведены значения напряжений в некоторых точках куба, полученные авторами (верхняя строка), вариационно-разностным методом [5] (вторая строка), методом М.М.Филоненко–Бородича [4] (третья строка), методом Ритца [6] (четвертая строка). Здесь напряжения отнесены к $2E w_0/l$.

Как видно из таблицы, внутри куба полученное авторами решение хорошо согласуется с решением Б.Е.Победри, С.В.Шешенина [5]. В частности, оба решения обнаруживают тенденцию уменьшения напряжений σ_z при приближении к поверхности куба. Однако предлагаемое решение хуже отражает особенность напряжений на контуре площадки давления. Как показано в работах [4, 5], напряжения σ_z при стремлении к границе площадки резко возрастают. Сглаживание особенности в предлагаемом решении связано, очевидно, с весьма грубой аппроксимацией вектора смещений куба.

Таким образом, анализ полученных результатов показывает, что точечное удовлетворение граничных условий является эффективным средством уточнения вариационных решений краевых задач в заданных областях. При этом в

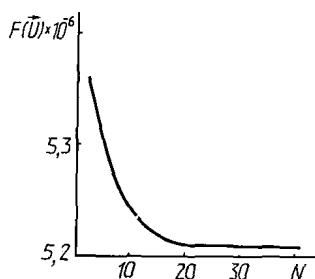


Рис. 2. Сходимость приближенных решений по энергии для задачи 1.

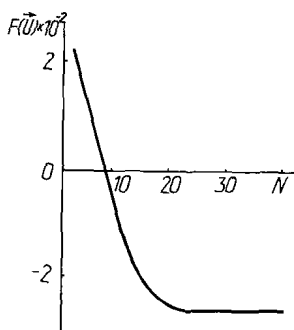


Рис. 4. Сходимость приближенных решений по энергии для задачи 2.

Рис. 5. Графики перемещений боковой поверхности куба при сжатии между двумя жесткими плитами без проскальзывания.

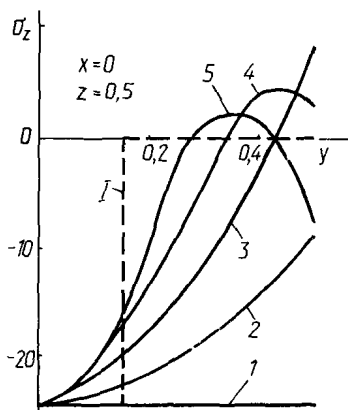


Рис. 3. Распределение напряжений σ_z по поверхности куба для задач: 1 – 5 – соответственно $n = 1$; 1 – точное решение.

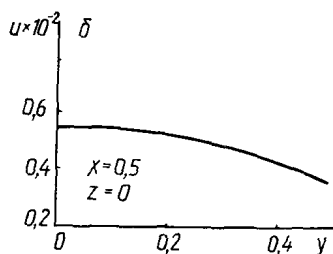
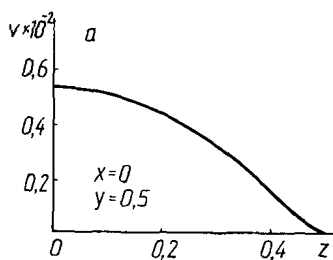


Таблица 1

Значения напряжений σ_z в некоторых точках куба

x = 0 ; z = 0				x = 0 ; z = 0,5		
y	0,0	0,25	0,5	0,0	0,25	0,5
σ_z	1,14	1,13	1,11	0,80	0,76	0,66
	1,20	1,17	1,02	0,98	1,01	1,55
	1,11	1,21	0,97	1,01	0,94	1,21
	—	—	—	1,65	1,56	1,21