数学演習講座

4

解析幾何学

解析幾何学

東京都立大学教授・理学博士
本　部　均

秋月康夫
功力金二郎
佐々木重夫
福原満洲雄
吉田耕作
編　集

数学演習
講　座
4

共立出版株式会社

ま　え　が　き

基礎数学講座の解析幾何学に引きつづいて，主に三次元までのユークリッド空間に関するものの演習問題をできるだけ豊富に集め，解析幾何学の基本的な方法をできるだけ多く示すように解答を附した．今日高等学校で，直線に関する問題は相当扱えるように教育が進んでいるので，いきおい二次曲線，二次曲面に関するものに重点がおかれた．平面における射影幾何学についても解析幾何学として初歩的な部分は一応まとめることができた．

全体としては，要項で基本的な公式，定理をすべて掲げたから，これだけでも十分解析幾何学について知ることができると思う．

1957年6月

著者しるす

目　　次

第 1 章　座標とベクトル

1・1　平行座標

要　　項

1.　直線上の座標

1°　直線上に原点Oと単位点Eをえらび，この直線上の任意の点Pについて線分 OP を線分 OE を単位の長さとして測った数 x を点Pの座標といい，$P(x)$ と表わす（ただしPがOに関してEと同じ側のとき $x>0$，反対のとき $x<0$ とする）．このような座標系を $\{O\,;E\}$ で表わす．

2点 $P(x)$，$Q(y)$ について線分 PQ の符号をもった長さ　　$PQ=y-x$

符号をもった長さについては　　$PQ=-QP$,　$PQ+QR+RP=0$

2°　直線上の2点 P_1, P_2 の座標を x_1, x_2 とするとき，線分 P_1P_2 を $m_1:m_2$ の比に分ける点Pの座標

$$x=\frac{m_2x_1+m_1x_2}{m_1+m_2}\quad (m_1+m_2\neq 0)$$

注意　$\dfrac{m_1}{m_2}>0$ のとき内分，$\dfrac{m_1}{m_2}<0$ のとき外分

$\dfrac{m_1}{m_1+m_2}=\lambda$ とおけば　　$x=(1-\lambda)x_1+\lambda x_2=x_1+\lambda(x_2-x_1)$

$\dfrac{m_1}{m_2}=\rho$ とおけば　　$x=\dfrac{x_1+\rho x_2}{1+\rho}$

3°　直線上の4点 P_1, P_2, P_3, P_4 について

$$\frac{P_1P_3}{P_3P_2}:\frac{P_1P_4}{P_4P_2}=(P_1P_2,\ P_3P_4)$$

を4点 P_1, P_2, P_3, P_4 の複比または非調和比という．

$$(P_1P_2,\ P_3P_4)=-1$$

が成り立つとき4点を調和点列といい，2点 P_1, P_2 と2点 P_3, P_4 はたがいに他を調和に分ける，P_3, P_4 は P_1, P_2 について調和共役であるという．

2点 $P_1(x_1)$，$P_2(x_2)$ について調和共役な2点 P_3, P_4 の座標を

$$\lambda_1x_1+\lambda_2x_2\quad(\lambda_1+\lambda_2=1),\qquad \lambda_1'x_2+\lambda_2'x_2\quad(\lambda_1'+\lambda_2'=1)$$

とおけば　　$\lambda_1:\lambda_2=-\lambda_1':\lambda_2'$

2.　平面上の平行座標

1°　1点Oで交わる2直線上にそれぞれ点 E_1, E_2 をとる.

O：原点,　E_1, E_2：単位点,　直線 OE_1, OE_2：座標軸（x 軸, y 軸）

任意の点から y 軸及び x 軸に平行線を引き x 軸, y 軸との交点を P', P'' とし, P', P'' の座標軸上での座標を x, y とする.

(x, y)：平行座標,　$\{O; E_1, E_2\}$：平面の平行座標系

2°　2点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ を $m_1 : m_2$ の比に分ける点Pの座標

$$x=\frac{m_2x_1+m_1x_2}{m_1+m_2},\quad y=\frac{m_2y_1+m_1y_2}{m_1+m_2}\quad (m_1+m_2\neq 0)$$

3°　$P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ を結ぶ方向と $P_1'(x_1', y_1')$, $P_2'(x_2', y_2')$ を結ぶ方向が平行の条件

$$x_2-x_1 : y_2-y_1=x_2'-x_1' : y_2'-y_1'$$

3.　空間の平行座標

1°　1点O(原点)で交わり同一平面上にない3直線上にそれぞれ E_1, E_2, E_3 を単位点としてとり, 任意の点Pの平行座標 (x, y, z) を定める. 座標系を $\{O; E_1, E_2, E_3\}$ で表わす.

2°　分点の公式, 平行の条件は平面の場合に同じ.

1・2　直交座標

要　　項

1.　平行座標系で座標軸がたがいに垂直で, 座標軸上の単位の長さが等しい場合, 直交座標系という.

2.　2点間の距離　平面上の2点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ の距離

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

P_1P_2 が x 軸となす角を θ とすれば　$x_2-x_1=d\cos\theta$, $y_2-y_1=d\sin\theta$

余弦 $\cos\theta=l$, $\sin\theta=m$ を直線 P_1P_2 の方向余弦という.

空間の2点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ の距離

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

P_1P_2 が座標軸となす角を α, β, γ とすると

$$x_2-x_1=d\cos\alpha,\quad y_2-y_1=d\cos\beta,\quad z_2-z_1=d\cos\gamma$$

余弦 $\cos\alpha=l$, $\cos\beta=m$, $\cos\gamma=n$ を直線 P_1P_2 の方向余弦という.

$$l^2+m^2+n^2=1$$

方向余弦が (l, m, n)，(l', m', n') の2直線のなす角を φ とすると

$$\cos\varphi = ll' + mm' + nn'$$

1・3　ベクトル

要　　項

1. **定義**　平面上または空間で向きをもった線分 P_1P_2 を，位置をもったベクトルといい，$\overrightarrow{P_1P_2}$ で表わし，P_1, P_2 をそれぞれベクトルの始点，終点という．

二つのベクトル $\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1'P_2'}$ は，1）$P_1P_2P_2'P_1'$ が平行四辺形をなすか，2）同一直線上にある場合，第三のベクトル $\overrightarrow{P_1''P_2''}$ が存在して，$P_1P_2P_2''P_1''$ 及び $P_1'P_2'P_2''P_1''$ がともに平行四辺形をなすとき，等しいという．

位置をもったベクトルの等しいものの類を単にベクトルといい，$\mathbf{A}, \mathbf{e}$ などで表わす．

P_1, P_2 の座標を (x_1, y_1, z_1)，(x_2, y_2, z_2) とするとき，

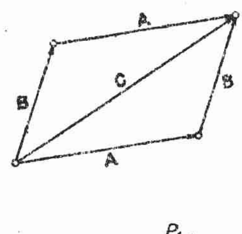
$$u = x_2 - x_1, \quad v = y_2 - y_1, \quad w = z_2 - z_1$$

を，ベクトル $\overrightarrow{P_1P_2}$ の成分という．特に始点と終点が一致するベクトル $(0, 0, 0)$ をベクトル $\mathbf{0}$ という．

注意　類のベクトルの成分は等しい．

2. **ベクトルの演算**

1°　加法　位置をもったベクトル $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ の和 $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{C}$ は図のように作図される．



$\mathbf{A} = (u, v, w)$，$\mathbf{B} = (u', v', w')$　のとき，

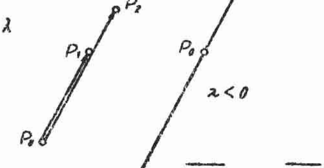
$$\mathbf{C} = (u+u', v+v', w+w')$$

加法については

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \mathbf{B}+\mathbf{A}, \quad (\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} = \mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}),$$
$$\mathbf{A}+\mathbf{0} = \mathbf{0}+\mathbf{A} = \mathbf{A}$$

二つのベクトル $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ について $\mathbf{x}+\mathbf{A}=\mathbf{B}$ を満たすベクトル $\mathbf{x}$ を $\mathbf{B}-\mathbf{A}$，特に $\mathbf{0}-\mathbf{A}$ を $-\mathbf{A}$ で表わす．

2°　スカラー乗法　位置をもったベクトル $\mathbf{A}$ と数 λ の積 $\lambda\mathbf{A}$ は図のように作図する．



$\mathbf{A} = (u, v, w)$　のとき，$\lambda\mathbf{A} = (\lambda u, \lambda v, \lambda w)$

加法，乗法について

$$\mu(\lambda\mathbf{A}) = (\mu\lambda)\mathbf{A}, \quad (\lambda+\mu)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A}+\mu\mathbf{A}$$

$$\lambda(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\lambda\mathbf{A}+\lambda\mathbf{B}$$

$$1\cdot\mathbf{A}=\mathbf{A},\quad 0\cdot\mathbf{A}=0,\quad \mathbf{B}-\mathbf{A}=\mathbf{B}+(-1)\mathbf{A}$$

3.　定義　何個かのベクトル，たとえば $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$ は，ことごとくは0でない数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ が存在して　$\lambda_1\mathbf{A}_1+\lambda_2\mathbf{A}_2+\lambda_3\mathbf{A}_3=0$
が成り立つとき，独立でないまたは一次従属であるといい，このような数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ が存在しないとき独立であるという．

4.　平面上のベクトルはその独立な二つ $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ によって一次結合の形に一義的に表わされる．空間の場合は独立な三つのベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ によって同様である．このようなベクトルの組 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ または $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ を基本ベクトルまたは基という．上のように表わすとき一次結合における係数をベクトルの成分という．

平行座標系 $\{O; E_1, E_2\}$ または $\{O; E_1, E_2, E_3\}$ で，$OE_i=\mathbf{e}_i$ を座標のベクトルという．点Pの平行座標 (x_1, x_2, x_3) は位置ベクトル $\overrightarrow{OP}$ の $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ または $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ に関する成分に他ならない．

5.　定理　二つのベクトル $\mathbf{A}=\lambda_1\mathbf{e}_1+\lambda_2\mathbf{e}_2+\lambda_3\mathbf{e}_3$，$\mathbf{B}=\mu_1\mathbf{e}_1+\mu_2\mathbf{e}_2+\mu_3\mathbf{e}_3$ または $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 及び $\mathbf{C}=\nu_1\mathbf{e}_1+\nu_2\mathbf{e}_2+\nu_3\mathbf{e}_3$ が独立であるための条件はそれぞれ

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3\end{pmatrix}\text{ の階数が }2,\quad \begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3\\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3\end{vmatrix}\neq 0$$

6.　スカラー乗積（直交基）　基本ベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ がいずれも長さ1で，たがいに垂直であるとき，この基を直交基という．ベクトル $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)$ について

$$|\mathbf{x}|^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2$$

なる $|\mathbf{x}|$ $(\geqq 0)$ を $\mathbf{x}$ の大きさという．大きさ1のベクトルを単位ベクトルという．

二つのベクトル $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)$，$\mathbf{y}=(y_1, y_2, y_3)$ について

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$$

を $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ のスカラー乗積という．ベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ のなす角を φ とすると

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})=|\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}|\cos\varphi$$

$(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は $\mathbf{x}$ 及び $\mathbf{y}$ について一次である．

直交基 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ の条件　　$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & (i=j\ \text{のとき})\\ 0 & (i\neq j\ \text{のとき})\end{cases}$

7.　ベクトル乗積（直交基）　ベクトル $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)$，$\mathbf{y}=(y_1, y_2, y_3)$ について

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = (x_2y_3 - x_3y_2,\ x_3y_1 - x_1y_3,\ x_1y_2 - x_2y_1)$$

を $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ のベクトル乗積という．

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \perp \mathbf{x}, \mathbf{y}, \qquad |[\mathbf{x}, \mathbf{y}]| = |\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}| \sin\theta$$

$\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ の空間における向きと，基本ベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ の向きは同じである．

$[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ は $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ について歪対称で一次である．

直交基 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ について $[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] = \mathbf{e}_1$,　$[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1] = \mathbf{e}_2$,　$[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] = \mathbf{e}_3$

8. 公　式

$$([\mathbf{x}, \mathbf{y}], \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, [\mathbf{y}, \mathbf{z}]) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}),\ \text{ただし}\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

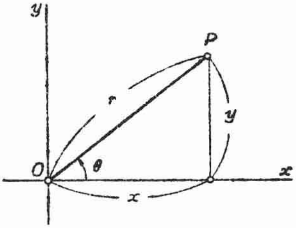
$$[[\mathbf{x}, \mathbf{y}], \mathbf{z}] = (\mathbf{x}, \mathbf{z})\mathbf{y} - (\mathbf{y}, \mathbf{z})\mathbf{x}$$

$$([\mathbf{x}, \mathbf{y}], [\mathbf{z}, \mathbf{w}]) = (\mathbf{x}, \mathbf{z})(\mathbf{y}, \mathbf{w}) - (\mathbf{x}, \mathbf{w})(\mathbf{y}, \mathbf{z})$$

1・4 極　座　標

要　　項

1. 平面の極座標



1° O：極，l：原線または基線

(r, θ)：極座標，　r：動径，　θ：偏角

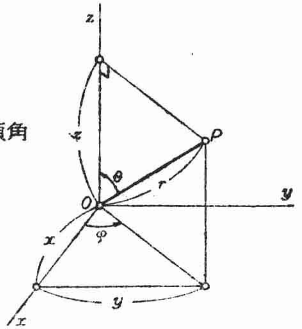
2° 直交座標 (x, y) と極座標の関係

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta;$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}, \qquad \sin\theta = \frac{y}{r}$$

2. 空間の極座標



1° (r, φ, θ)：極座標，r：動径，φ：方位角，θ：天頂角

2° 直交座標 (x, y, z) と極座標の関係

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta$$

例　　題

［1］ 直線上の任意の 4 点 A, B, C, D について次の関係を証明せよ．

$$\mathrm{AB\cdot CD + AC\cdot DB + AD\cdot BC = 0}$$

（証明）　$CD = CA + AD = AD - AC$

DB, BC についても同様であるから

$$AB \cdot CD + AC \cdot DB + AD \cdot BC = AB(AD - AC) + AC(AB - AD) + AD(AC - AB) = 0$$

［2］ P_1, P_2, P_3, P_4 が調和点列であるとき，次のことを証明せよ．

1)
$$\frac{1}{P_1P_3} + \frac{1}{P_1P_4} = \frac{2}{P_1P_2}$$

2)　P_1P_2 の中点を M とすれば　　$MP_2{}^2 = MP_3 \cdot MP_4$

（証明）　1)　$(P_1P_2, P_3P_4) = -1$ から　　$P_1P_3 \cdot P_4P_2 + P_1P_4 \cdot P_3P_2 = 0$　　（＊）

よって　　$P_1P_3(P_1P_2 - P_1P_4) + P_1P_4(P_1P_2 - P_1P_3) = 0$

$$\therefore \quad P_1P_2(P_1P_3 + P_1P_4) = 2P_1P_2 \cdot P_1P_4$$

積 $P_1P_2 \cdot P_1P_3 \cdot P_1P_4$ で割って　　$\dfrac{1}{P_1P_3} + \dfrac{1}{P_1P_4} = \dfrac{2}{P_1P_2}$

2)　$P_1M = MP_2$ だから　$P_1P_3 = P_1M + MP_3 = MP_2 + MP_3$　同様に　$P_1P_4 = MP_2 + MP_4$

よって（＊）から　　$(MP_2 + MP_3)(MP_2 - MP_4) + (MP_2 + MP_4)(MP_2 - MP_3) = 0$

括弧をはずして整とんすれば　　$MP_2{}^2 = MP_3 \cdot MP_4$

［3］ 四面体の向かいあった2辺の中点を結ぶ線分三つは1点で交わることを示せ．

（証明）　四面体を $A_1A_2A_3A_4$ とし，A_i の座標を (x_i, y_i, z_i) とする．A_1A_2, A_3A_4 の中点の座標はそれぞれ

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right), \quad \left(\frac{x_3+x_4}{2}, \frac{y_3+y_4}{2}, \frac{z_3+z_4}{2}\right)$$

この2点の中点の座標は

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}, \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}, \frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}\right)$$

これは4個の点の座標について対称だから，向かいあった2辺の中点を結ぶ線分三つは，おのおのの中点で交わる．

［4］ 空間の3点の位置ベクトルを $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ とするとき，3点が1直線上にあるための条件は，ことごとくは0でない次のような数 λ, μ, ν が存在することである．これを証明せよ．

$$\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} + \nu\mathbf{z} = 0, \qquad \lambda + \mu + \nu = 0$$

（証明）　2点 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ が一致する場合は $\mathbf{x} - \mathbf{y} = 0$，$\lambda = 1$，$\mu = -1$，$\nu = 0$．$\mathbf{x}, \mathbf{y}$ が一致しないとき3点が1直線上にあれば

$$\mathbf{z} = (1-\lambda)\mathbf{y} + \lambda\mathbf{x} \qquad \therefore \quad \lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} - \mathbf{z} = 0$$

ここに　　$\lambda + (1-\lambda) - 1 = 0.$

逆にことごとくは0でない λ, μ, ν に対して　　$\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} + \nu\mathbf{z} = 0$，　$\lambda + \mu + \nu = 0$

が成り立つとする．$\nu \neq 0$ の場合を考えれば十分である．この場合

$$\mathbf{z} = \left(-\frac{\lambda}{\nu}\right)\mathbf{x} + \left(-\frac{\mu}{\nu}\right)\mathbf{y}, \qquad \left(-\frac{\lambda}{\nu}\right) + \left(-\frac{\mu}{\nu}\right) = 1$$

したがって，$\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ ならば $\mathbf{z}$ は $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ を結ぶ直線上の点で，$\mathbf{x} = \mathbf{y}$ ならば $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ は一致

する．

［5］ 直交座標が $(-1,3,1)$，$(-3,1,2)$ の2点を結ぶ直線の方向余弦を求めよ．

（解） 2点を結ぶ直線の方向は

$$L=-3-(-1)=-2,\qquad M=1-3=-2,\qquad N=2-1=1$$

$(-2)^2+(-2)^2+1^2=3^2$ だから，求める方向余弦は $\left(-\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)$.

［6］ 平面上で直交座標が $(-1,3)$，$(3,0)$ の2点を結ぶ直線に原点から下した垂線の足，垂線の長さを求めよ．

（解） 2点を結ぶ方向は　　　$(3,0)-(-1,3)=(4,-3)$

2点を結ぶ直線上の点の座標は　　　$x=-1+4\lambda,\quad y=3-3\lambda$

この点が原点から下した垂線の足であるためには

$$(-1+4\lambda)\times 4+(3-3\lambda)\times(-3)=0 \qquad \therefore\ \lambda=\frac{13}{25}$$

したがって垂線の足は $\left(\dfrac{27}{25},\dfrac{36}{25}\right)$，垂線の長さは $\dfrac{9}{25}\sqrt{3^2+4^2}=\dfrac{9}{5}$.

［7］ 直交座標で成分が (x_1,x_2,x_3)，(y_1,y_2,y_3) である二つのベクトルのなす角を φ とすれば

$$\sin\varphi=\sqrt{\frac{(x_2y_3-x_3y_2)^2+(x_3y_1-x_1y_3)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2}{(x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2)(y_1{}^2+y_2{}^2+y_3{}^2)}}$$

これを証明し，二つのベクトルを2辺とする平行四辺形の面積 S を表わす式を書け．

（解） 二つのベクトルのなす角の余弦は

$$\cos\varphi=\frac{x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3}{\sqrt{x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2}\sqrt{y_1{}^2+y_2{}^2+y_3{}^2}}$$

$$\therefore\quad \sin^2\varphi=1-\cos^2\varphi$$

$$=\frac{1}{(x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2)(y_1{}^2+y_2{}^2+y_3{}^2)}\{(x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2)(y_1{}^2+y_2{}^2+y_3{}^2)$$
$$-(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2\}$$

{ } の中は

$$(x_2y_3-x_3y_2)^2+(x_3y_1-x_1y_3)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2$$

よって $\sin\varphi$ の式が得られる．また

$$S=|\mathfrak{x}|\cdot|\mathfrak{y}|\sin\varphi=\sqrt{x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2}\sqrt{y_1{}^2+x_2{}^2+y_3{}^2}\sin\varphi$$

よって　　　$S=\sqrt{(x_2y_3-x_3y_2)^2+(x_3y_1-x_1y_3)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2}$

［8］ 座標のベクトルが単位の長さで，座標軸の二つずつのなす角が α,β,γ である平行座標系で，原点と点 (x,y,z) の距離を d とすれば

$$d^2=x^2+y^2+z^2+2yz\cos\alpha+2zx\cos\beta+2xy\cos\gamma$$

であることを示せ.

(証明) 座標のベクトルを $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ とすれば

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)=(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)=(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3)=1,\quad (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)=\cos\alpha,\quad (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1)=\cos\beta,\quad (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)=\cos\gamma$$

点 (x, y, z) の位置ベクトルを $\mathbf{x}$ とすれば　　$\mathbf{x}=x\mathbf{e}_1+y\mathbf{e}_2+z\mathbf{e}_3$

そこで

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}, \mathbf{x})&=(x\mathbf{e}_1+y\mathbf{e}_2+z\mathbf{e}_3, x\mathbf{e}_1+y\mathbf{e}_2+z\mathbf{e}_3)\\&=(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)x^2+(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)y^2+(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3)z^2\\&\quad+2(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)yz+2(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1)zx+2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)xy\end{aligned}$$

から

$$d^2=x^2+y^2+z^2+2yz\cos\alpha+2zx\cos\beta+2xy\cos\gamma$$

[9] 1) 平面上で極座標が (r, θ), (r', θ') の2点の距離 d を求めよ.

2) 空間で極座標が (r, φ, θ), (r', φ', θ') の2点の距離 d を求めよ.

(解) 2点の動径のなす角は $\theta'-\theta$ だから, 余弦定理によって

$$d^2=r^2+r'^2-2rr'\cos(\theta'-\theta)$$

2) 極座標に従属する直交座標は

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\qquad y=r\sin\theta\sin\varphi,\qquad z=r\cos\theta$$

$$x'=r'\sin\theta'\cos\varphi',\qquad y'=r'\sin\theta'\sin\varphi',\qquad z'=r'\cos\theta'$$

よって

$$\begin{aligned}&(x'-x)^2+(y'-y)^2\\&=(r'\sin\theta'\cos\varphi'-r\sin\theta\cos\varphi)^2+(r'\sin\theta'\sin\varphi'-r\sin\theta\sin\varphi)^2\\&=(r'\sin\theta')^2+(r\sin\theta)^2-2r'\sin\theta'\cdot r\sin\theta\cos(\varphi'-\varphi)\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}&(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2\\&=r'^2+r^2-2rr'\{\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi'-\varphi)\}\end{aligned}$$

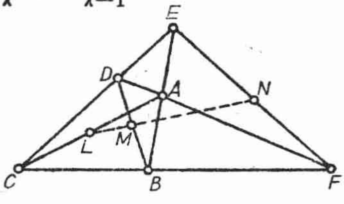
$$\therefore\quad d^2=r^2+r'^2-2rr'\{\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi'-\varphi)\}$$

演 習 問 題 1

1. $(\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3\mathrm{P}_4)=\lambda$ とすれば, $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \mathrm{P}_4$ のいろいろな順列によって得られる複比は

$$\lambda,\quad \frac{1}{\lambda},\quad 1-\lambda,\quad \frac{1}{1-\lambda},\quad \frac{\lambda-1}{\lambda},\quad \frac{\lambda}{\lambda-1}$$

のいずれかに等しいことを示せ.



2. 平面における四角形 ABCD について, AC, BD 及び図の EF の中点は1直線上にあることを証明せよ (Newton の定理).

注意 AC, BD, EF を四角形の対角線とよぶことがある.

3. $\mathbf{A}_1'=\lambda_1\mathbf{A}_1+\lambda_2\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_2'=\mu_1\mathbf{A}_1+\mu_2\mathbf{A}_2$ のとき, $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ を2辺とする平行四辺形と $\mathbf{A}_1'$,

$\mathbf{A}_2'$ を2辺とするものの面積の比を求めよ。

4. 空間で直交座標が (1,1,6), (2,0,4) なる2点を結ぶ直線に原点から下した垂線の足，垂線の長さを求めよ．

5. 座標の原点を通り，原点と点 (1,1,1) を結ぶ直線と 45° の角をなす直線上の点はどんな関係を満たすか．

6. 3点 (1,0,0), (1,2,3), (6,6,6) を頂点とする三角形の面積を求めよ．

7. 次の式を証明せよ．

1) $[[\mathbf{x},\mathbf{y}],[\mathbf{z},\mathbf{w}]]=(\mathbf{x},\mathbf{z},\mathbf{w})\mathbf{y}-(\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{w})\mathbf{z}=(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{w})\mathbf{z}-(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})\mathbf{w}$

2) $(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3)(\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\mathbf{y}_3)=\begin{vmatrix}(\mathbf{x}_1,\mathbf{y}_1) & (\mathbf{x}_1,\mathbf{y}_2) & (\mathbf{x}_1,\mathbf{y}_3)\\(\mathbf{x}_2,\mathbf{y}_1) & (\mathbf{x}_2,\mathbf{y}_2) & (\mathbf{x}_2,\mathbf{y}_3)\\(\mathbf{x}_3,\mathbf{y}_1) & (\mathbf{x}_3,\mathbf{y}_2) & (\mathbf{x}_3,\mathbf{y}_3)\end{vmatrix}$

演習問題1の解答

1. 複比 $$(P_1P_2,P_3P_4)=\frac{P_1P_3}{P_3P_2}:\frac{P_1P_4}{P_4P_2}$$

で，P_1 と P_2, P_3 と P_4 をそれぞれ交換すると

$$(P_2P_1,P_4P_3)=\frac{P_2P_4}{P_4P_1}:\frac{P_2P_3}{P_3P_1}=\frac{P_3P_1}{P_2P_3}:\frac{P_4P_1}{P_2P_4}=\frac{P_1P_3}{P_3P_2}:\frac{P_1P_4}{P_4P_2}=(P_1P_2,P_3P_4)$$

また，前の P_1,P_2 と後の P_3,P_4 を交換すると，

$$(P_3P_4,P_1P_2)=\frac{P_3P_1}{P_1P_4}:\frac{P_3P_2}{P_2P_4}=\frac{P_3P_1}{P_3P_2}:\frac{P_1P_4}{P_2P_4}=\frac{P_1P_3}{P_3P_2}:\frac{P_1P_4}{P_4P_2}=(P_1P_2,P_3P_4)$$

したがって $$(P_1P_2,P_3P_4)=(P_2P_1,P_4P_3)=(P_3P_4,P_1P_2)=(P_4P_3,P_2P_1)=\lambda$$

このように，P_1,P_2,P_3,P_4 の順列によって得られる $4!=24$ 個の複比は4個ずつ等しい．

次に (P_1P_2,P_3P_4) で P_3,P_4 を交換すると

$$(P_1P_2,P_4P_3)=\frac{P_1P_4}{P_4P_2}:\frac{P_1P_3}{P_3P_2}=\frac{1}{(P_1P_2,P_3P_4)}$$

よって (P_1P_2,P_3P_4) 及びこれから上の法則で作られる他の3個の複比は

$$(P_1P_2,P_4P_3)=\frac{1}{\lambda} \qquad (1)$$

例題1の等式によって $$P_1P_2\cdot P_3P_4+P_1P_3\cdot P_4P_2+P_1P_4\cdot P_2P_3=0$$

$P_1P_4\cdot P_2P_3$ で割ると $$-\left(\frac{P_1P_2}{P_2P_3}:\frac{P_1P_4}{P_4P_3}\right)-\left(\frac{P_1P_3}{P_3P_2}:\frac{P_1P_4}{P_4P_2}\right)+1=0$$

$$\therefore\quad (P_1P_3,P_2P_4)=1-\lambda \qquad (2)$$

これは (P_1P_2,P_3P_4) で P_2,P_3 を交換して得られる．(1), (2) の法則によって

$$(P_1P_3,P_4P_2)=\frac{1}{1-\lambda},\qquad (P_1P_4,P_2P_3)=\frac{\lambda-1}{\lambda},\qquad (P_1P_4,P_3P_2)=\frac{\lambda}{\lambda-1}$$

これらによって P_1, P_2, P_3, P_4 の順列によって得られる複比の値は λ, $1-\lambda$, $\dfrac{1}{\lambda}$, $\dfrac{1}{1-\lambda}$,

$\dfrac{\lambda-1}{\lambda}$, $\dfrac{\lambda}{\lambda-1}$ であることがわかる．

2．O を座標の原点，CB を x 軸，CD を y 軸にとり，A の座標を $(1,1)$ とする．さらに

$$\mathrm{BA}: y-1=m(x-1), \qquad \mathrm{DA}: y-1=m'(x-1)$$

とすれば，B, E, D, F の座標は

$$\mathrm{B}\left(1-\frac{1}{m}, 0\right), \quad \mathrm{E}(0, 1-m), \quad \mathrm{F}\left(1-\frac{1}{m'}, 0\right), \quad \mathrm{D}(0, 1-m')$$

そこで CA, BD, EF の中点 L, M, N の座標は

$$\mathrm{L}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \mathrm{M}\left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{m}\right), \frac{1}{2}(1-m')\right), \quad \mathrm{N}\left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{m'}\right), \frac{1}{2}(1-m)\right)$$

ところで
$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{m}\right)\times m-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{m'}\right)\times m'=\frac{1}{2}\times(m-m'),$$
$$\frac{1}{2}(1-m')\times m-\frac{1}{2}(1-m')\times m'=\frac{1}{2}\times(m-m')$$

であるから，L, M, N は1直線上にある．

3．$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ のベクトル乗積 $[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2]$ の大きさは $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ を2辺とする平行四辺形の面積に等しい．ところで

$$\begin{aligned}[\mathbf{A}_1', \mathbf{A}_2'] &= [\lambda_1\mathbf{A}_1+\lambda_2\mathbf{A}_2, \mu_1\mathbf{A}_1+\mu_2\mathbf{A}_2]=[\lambda_1\mathbf{A}_1, \mu_2\mathbf{A}_2]+[\lambda_2\mathbf{A}_2, \mu_1\mathbf{A}_1]\\ &=(\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1)[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2]\end{aligned}$$

だから，二つの平行四辺形の面積の比は $1:|\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1|$ である．

注意　$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ を含む平面上で，$\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1$ が正であるか，負であるかにしたがって $\mathbf{A}_1$ から $\mathbf{A}_2$ への回転の向きと $\mathbf{A}_1'$ から $\mathbf{A}_2'$ へのそれが同じであるか，反対である．

4．2点を結ぶ方向は　$(2, 0, 4)-(1, 1, 6)=(1, -1, -2)$

2点を結ぶ直線上の点の座標は

$$x=1+\lambda, \quad y=1-\lambda, \quad z=6-2\lambda$$

この点が原点から下した垂線の足であるためには

$$(1+\lambda)\times 1+(1-\lambda)\times(-1)+(6-2\lambda)\times(-2)=0 \qquad \therefore\ \lambda=2$$

よって垂線の足は $(3, -1, 2)$，垂線の長さは $\sqrt{3^2+(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{14}$．

5．この直線上の点 (x, y, z) と点 $(1, 1, 1)$ を原点で見こむ角は $45°$ であるから

$$\cos 45°=\frac{x+y+z}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad \therefore\ \frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

両辺を平方して　$3(x^2+y^2+z^2)=2(x+y+z)^2$

あるいは　$x^2+y^2+z^2-4yz-4zx-4xy=0$

注意　これは直円錐を表わす．

6．3点を A_1, A_2, A_3 で表わせば　$\overrightarrow{A_1A_2}:(0, 2, 3)$,　$\overrightarrow{A_1A_3}:(5, 6, 6)$