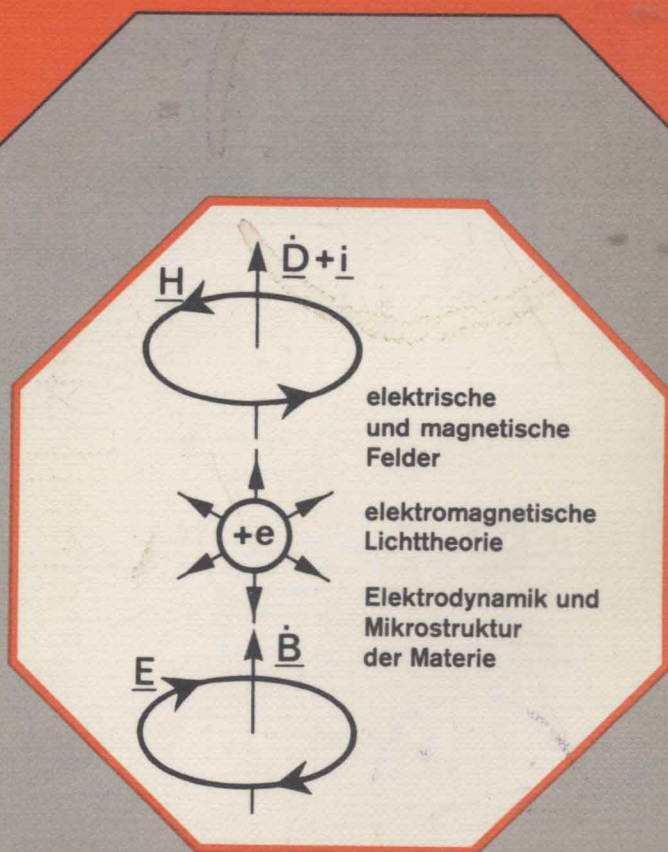


Georg S. Greschner

Maxwellgleichungen

Das elektromagnetische Feld
in Physik und Chemie

Band 1: Allgemeine Grundlagen



Hüthig & Wepf

G. S. Greschner

Maxwellgleichungen

Das elektromagnetische Feld
in Physik und Chemie

Band 1: Allgemeine Grundlagen

elektrische und magnetische Felder
elektromagnetische Lichttheorie
Elektrodynamik und Mikrostruktur der Materie

Hüthig & Wepf Verlag Basel · Heidelberg · New York

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Greschner, Georg S.:

Maxwellgleichungen: d. elektromagnet. Feld in
Physik u. Chemie / G. S. Greschner. — Heidelberg:
Hüthig und Wepf

ISBN 3-7785-0619-6

Bd. 1. Allgemeine Grundlagen. — 1981.

ISBN 3-7785-0613-7

© 1981 Hüthig & Wepf Verlag Basel: Heidelberg
Printed in Germany

Herrn Professor Dr. O. Wichterle
in Dankbarkeit gewidmet.

$$\begin{array}{ll} \operatorname{rot} H - \dot{D} = i & \operatorname{div} D = \varrho \\ \operatorname{rot} E + \dot{B} = 0 & \operatorname{div} B = 0 \end{array}$$

War es ein Gott, der diese Zeilen schrieb ...

L. Boltzmann

V o r w o r t .

Das vorliegende Buch ist den MAXWELL-schen Feldgleichungen und deren Anwendungen auf einige ausgewählte Probleme der Physik und der chemischen Physik gewidmet. Es ist für Physiko-Chemiker und Physiker geschrieben, die mit der Problematik von verschiedenen Wechselwirkungen zwischen elektromagnetischen Feldern und materiellen Körpern konfrontiert werden und zum tieferen Verständnis solcher Erscheinungen theoretische Unterstützung suchen.

Das formal in zehn Abschnitte gegliederte Buch besteht aus drei überwiegend deduktiv aufgebauten Kapiteln, die ihrerseits eine logische Folge bilden. Kapitel eins und zwei, deren Stoff sich an eine breitere Leserschicht wendet, wird im ersten Band des Buches abgefaßt, während das dritte, dem speziellen Gebiet der Lichtstreuung an Molekülen gewidmete Kapitel im zweiten Band des Buches erscheint.

Das erste Kapitel stellt eine Einführung in die elektromagnetische Theorie des Lichtes dar, die in acht Abschnitten präsentiert und in den zwei folgenden Kapiteln systematisch angewendet wird.

Im ersten Abschnitt werden die Grundbegriffe der Elektrizität und des Magnetismus eingeführt und anschließend auf Grund von vier, sich aus der breitesten experimentellen Erfahrung ergebenden Grundgesetzen die MAXWELL-schen Feldgleichungen aufgestellt.

Der zweite Abschnitt befaßt sich mit einer besonders wichtigen Gruppe von einfachen Körpern, wie Kondensatoren, OHM-schen Leitern und para- bzw. diamagnetischen Stoffen, deren Eigenschaften durch einfache und anschauliche Formen der im vorigen Abschnitt eingeführten "Materialgleichungen" zu beschreiben sind.

Im dritten Abschnitt wird der Begriff der "ebenen Welle" analysiert und die Fortpflanzung eines elektromagnetischen Feldes im Vacuum untersucht.

Einer Vertiefung der derart gewonnenen Erkenntnisse dient der vierte Abschnitt, in dem anstelle des Vacuums einfache homogene und durchsichtige Körper angenommen werden, bei denen jedoch die Richtung der Wellenfortpflanzung noch belanglos ist.

Der fünfte Abschnitt befaßt sich mit harmonischen Schwingungen und deren Verwendung zur Beschreibung der Polarisationsverhältnisse in einer ebenen elektrischen Welle.

Der sechste Abschnitt ist dem Begriff der Inhomogenität eines Mediums und dem des "optischen Weges" gewidmet. Dabei wird die naheliegende Möglichkeit genutzt, auf einige interessante und wichtige Zusammenhänge zwischen der

Feldtheorie, der klassischen Mechanik und der Quantenmechanik hinzuweisen. Dies scheint dem Verfasser vor allem auch deswegen lohnend, weil in der physikalischen und der angewandten Chemie gelegentlich die SCHRÖDINGER-Gleichung rein formal "abgeleitet" wird, obwohl sie, etwa wie der zweite Hauptsatz der Thermodynamik, prinzipiell nicht abzuleiten ist. Den Chemiker mag vielleicht interessieren, daß sie im wesentlichen auf Grund eines Dreisatzes postuliert wird.

Schließlich gehen die Abschnitte sieben und acht auf die Problematik der Feldfortpflanzung in leitenden Medien und in Kristallen ein. Im letzteren Abschnitt wird der Formalismus bewußt etwas detaillierter dargestellt, um weniger geübten Lesern den Umgang mit Tensoren zweiter Stufe vorzuführen.

Das zweite Kapitel dient der Anwendung der Theorie auf einige wichtige Zusammenhänge zwischen Elektrizität, Magnetismus und Mikrostruktur der Materie und stellt außerdem eine Grundlage für die theoretischen Betrachtungen des dritten Kapitels aus dem 2. Band dar. Ein Teil des aus dem Inhaltsverzeichnis ersichtlichen Aufbaus des zweiten Kapitels entspricht den Bedürfnissen, die sich beispielsweise im Fortgeschrittenenpraktikum und dem zugehörigen Seminar über elektrische und magnetische Eigenschaften der Materie im Institut für Physikalische Chemie der Universität Mainz ergeben. Aber auch der Physiker, der Elektrodynamik studieren will, findet in den Abschnitten dieses Kapitels - und vor allem im Kapitel I §6 - eine nützliche Ergänzung des klassischen Vorlesungsstoffes.

Alle in diesem Text vorkommenden Gleichungen stützen sich auf das internationale SI-System, dessen elektrische und magnetische Einheiten zu hoher Symmetrie und eindrucksvoller Einfachheit der Ausdrücke führen.

Zur mathematischen Unterstützung des physikalischen Textes hat der Autor im 3. Band des Buches eine kompakte Einführung in die wichtigsten verwendeten Formalismen abgefaßt, derart, daß der 3. Band auch als ein selbständiges Lehrbuch der Mathematik für Naturwissenschaftler verwendbar ist. Darüber hinaus wurden die entsprechenden Operationen im Text der Bände 1 und 2 selbst etwas ausführlicher gehalten. Diese beiden Maßnahmen dürften zum Verständnis der Zusammenhänge auch dem Chemiker weitgehend ausreichen.

Für kritisches Durchlesen des Manuskriptes und für wertvolle Hinweise zu einigen Punkten des Textes möchte der Autor Herrn Professor Dr. B. A. Wolf aus dem Institut für Physikalische Chemie der Universität Mainz an dieser Stelle herzlichst danken. Mein ganz besonderer Dank gilt Herrn Dr. Otto Bodmann aus dem selben Institut für die zahlreichen sehr wertvollen Anre-

gungen und Diskussionen, die zum gegenwärtigen Stand des Buches wesentlich beigetragen haben. Dem HÜTHIG-Verlag bin ich für die schöne Ausstattung des Werkes zum großen Dank verpflichtet.

Mainz / Zermatt, Weihnachten 1980

Georg S. Greschner

Matrizen und Determinanten in elektronischen Schaltungen

von Horst Rühl

1977, 284 S., 73 Abb., 7 Tab., Kunststoffeinband, DM 28,50
ISBN 3-7785-0402-9

Die mathematischen Grundlagen der Matrizenrechnung werden so abgehandelt, wie sie innerhalb der Elektrotechnik und speziell der Elektronik benötigt werden. Die mathematischen Grundlagen werden präzise erklärt, wobei die Probleme der Transformationen, Eigenwertprobleme und Matrizenfunktionen über die Grundvorlesungen hinaus berücksichtigt werden. Bei den elektrotechnischen Anwendungen wurden ausschließlich passive und aktive Netzwerke der Elektronik bevorzugt. Da die mathematischen Zusammenhänge durch viele Beispiele dargestellt sind, kann das Taschenbuch auch jederzeit zum Nachschlagen verwendet werden, was besonders für bereits in der Praxis stehende Ingenieure interessant ist. Für das Verständnis des Buches genügt der Stoff der mathematischen und elektrotechnischen Grundvorlesungen einer Fachhochschule bzw. einer technischen Hochschule.

Zweipole und Vierpole in elektronischen Schaltungen

von Horst Rühl

1975, 272 S., 110 Abb., 3 Bildtaf., 5 Tab., Kunststoffeinband, DM 21,80
ISBN 3-7785-0337-5

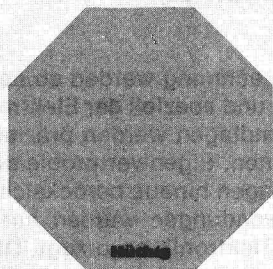
Die Theorie der Netzwerke ist die Grundlage jedes Studiums an Technischen Hochschulen und Fachhochschulen. Der Autor führt in die mathematischen Grundlagen der Netzwerktheorie ein, indem er die Darstellung mit vielen Beispielen auf anwendungsbezogene Studiengänge ausrichtet. Neben der Definition der wichtigsten Netzwerkgrößen wird die umfassende mathematische Darstellungsmöglichkeit der Zusammenhänge durch die Matrizenrechnung erläutert.

Dr. Alfred Hüthig Verlag · Postfach 102869 · 6900 Heidelberg 1

D. Braun · H. Cherdron · W. Kern

Praktikum der makromolekularen organischen Chemie

3. überarbeitete und erweiterte Auflage



Praktikum der makromolekularen organischen Chemie

**von Prof. Dr. Dietrich Braun,
Prof. Dr. Harald Cherdron
und Prof. Dr. Werner Kern**

3., überarb. und erw. Aufl. 1979, 333 S.,
35 Abb., geb., DM 68,50
ISBN 3-7785-0539-4

An einer Reihe von Universitäten werden bereits Polymer-Praktika für Chemiker angeboten. Trotzdem erfahren viele Chemiker während ihres Studiums noch immer sehr wenig über dieses Gebiet und haben vor allem keine Gelegenheit, sich durch eigene Versuche mit den experimentellen Methoden der makromolekularen Chemie vertraut zu machen. Hier soll das „Praktikum der makromolekularen organischen Chemie“ helfen. Ausführliche Beschreibungen der allgemeinen Arbeitsmethoden zur Darstellung und Untersuchung von Polymeren, ergänzt durch über 100 gut ausgearbeitete Versuchsvorschriften mit ausreichenden theoretischen Erläuterungen ermöglichen es, Synthese, Reaktionen und Eigenschaften makromolekularer Stoffe kennenzulernen.

Inhaltsübersicht

Grundbegriffe der makromolekularen Chemie • Arbeitsmethoden der Polymerchemie • Theoretische und praktische Grundlagen der Synthesen von makromolekularen Stoffen durch Polymerisation, Polykondensation und Polyaddition • Chemische Umsetzungen mit makromolekularen Stoffen

Dr. Alfred Hüthig Verlag · Postfach 102869 · 6900 Heidelberg 1

INHALTSVERZEICHNIS

Vorwort

Seite:

I. KAPITEL. EINFÜHRUNG IN DIE ELEKTROMAGNETISCHE LICHTTHEORIE.

§ 1.	DIE MAXWELL-SCHEN FELDGLEICHUNGEN	1
1.1.	Coulombgesetz und elektrische Feldstärke	1
1.2.	Fluß und Spannung eines elektrischen Feldes	3
1.3.	Das magnetostatische Coulombgesetz	6
1.4.	Fluß und Spannung eines magnetischen Feldes	11
1.5.	Dielektrische Verschiebung und Stromdichte	13
1.6.	Magnetische Induktion	20
1.7.	Das Induktions- und Verkettungsgesetz	23
1.8.	Die Maxwellgleichungen in Differentialform	26
1.9.	Die Kontinuitätsgleichung	29
§ 2.	HOMOGENE ISOTROPE KÖRPER	33
2.1.	Isotrope Dielektrika	33
2.2.	Das Ohmgesetz	40
2.3.	Dia-, Para- und Ferromagnetika.....	41
2.4.	Das symmetrische Gaußsystem	44
2.5.	Ladungsdichte und Relaxationszeit	45
2.6.	Erhaltungssatz der Energie. Der Poyntingvektor	46
2.7.	Die Feldgleichungen für homogene, isotrope Körper.....	48
§ 3.	EBENE WELLEN	49
3.1.	Das elektromagnetische Feld im Vacuum	50
3.2.	Ebene Welle und schwingende Saite	51
§ 4.	DAS ELEKTROMAGNETISCHE FELD IN DURCHSICHTIGEN MEDIEN	55
4.1.	Fortpflanzung der elektromagnetischen Welle	56
4.2.	Die Maxwellbeziehung	61
4.3.	Grenzflächen und Randbedingungen	63
§ 5.	HARMONISCHE WELLEN	67
5.1.	Skalare Schreibweise	67
5.2.	Vektorielle Schreibweise	69
5.3.	Polarisationsverhältnisse in einer ebenen Schwingung	71

§ 6.	INHOMOGENE MEDIEN. DAS EIKONAL UND DIE SCHRÖDINGER-GLEICHUNG	76
6.1.	Der optische Weg	76
6.2.	Schwach inhomogene Körper	78
6.3.	Geometrische Optik und klassische Mechanik	87
6.4.	Die Quantenmechanik	120
§ 7.	DAS ELEKTROMAGNETISCHE FELD IN ISOTROPEN METALLTEILCHEN	177
7.1.	Die fiktive komplexe Dielektrizitätskonstante	178
7.2.	Brechungsindex und Absorptionskoeffizient	180
7.3.	Gedämpfte Schwingungen	182
§ 8.	DAS ELEKTROMAGNETISCHE FELD IN KRISTALLEN	193
8.1.	Doppelbrechung und dielektrische Anisotropie	194
8.2.	Energietransport in nichtmagnetischen Kristallen	197
8.3.	Kristallsymmetrie und Dielektrizitätstensor	202

II. KAPITEL. ELEKTRISCHE UND MAGNETISCHE EIGENSCHAFTEN DER MATERIE.

§ 9.	ELEKTRODYNAMIK UND MIKROSTRUKTUR DER MATERIE	214
9.1.	Turbidität und molekulare Inhomogenität	216
9.2.	Polarisation und Magnetisierung	217
9.3.	Induzierte Dipole und inneres Feld	232
9.4.	Polarisierbarkeitstensor und Deformationsenergie	236
9.5.	Lorentz-Lorenz-Gleichung und Molpolarisation	242
9.6.	Dispersion und Maxwell-sche Relation. Molrefraktion	246
9.7.	Dipolmoment und Debye-sche Gleichung. Dielektrische Relaxation	256
9.8.	Messungen der DK. Kapazität und Selbstinduktivität	273
9.9.	Molekularströme und das Gesetz von Biot und Savart	288
9.10.	Das Keplerproblem und das Bohr-sche Magneton	294
9.11.	Magnetische Bahnmomente	308
9.12.	Zeemaneffekt und Landé-Faktor. Elektronenspin	313
9.13.	Kopplungen magnetischer Bahn- und Spinmomente	315
9.14.	Was ist der Elektronenspin?	322
9.15.	Dia- und Paramagnetismus als Folge der Atomstruktur	339
9.16.	Debye-Curie-sche Gleichung und Molsuszeptibilität	342
9.17.	Ferromagnetismus. Langevin-sche Funktion und Hysterese	343
9.18.	Messungen der Suszeptibilität mit der Gouy-schen Waage	349
	LITERATURVERZEICHNIS	357
	SACHVERZEICHNIS	359

I. KAPITEL. EINFÜHRUNG IN DIE ELEKTROMAGNETISCHE LICHTTHEORIE.

§1. DIE MAXWELL-SCHEN FELDGLEICHUNGEN.

Viele Phänomene, mit denen Physiko-Chemiker und Physiker konfrontiert werden, rühren von Wechselwirkungen zwischen materiellen Körpern und einem elektrischen, magnetischen oder elektromagnetischen Feld her. Auf einige dieser Phänomene werden wir in den folgenden zehn Paragraphen näher eingehen. Die Mannigfaltigkeit solcher Erscheinungen führt unmittelbar zu der wichtigen Frage: Gibt es trotzdem einige wenige Grundgesetze, von denen die vielen beobachtbaren Gesetzmäßigkeiten mathematisch abgeleitet werden können? Die Erfahrung zeigt, daß es tatsächlich solche Grundgesetze gibt. Eines von ihnen ist das bekannte COULOMB-Gesetz, mit dem wir uns im folgenden Abschnitt näher befassen wollen.

1.1. COULOMBGESETZ UND ELEKTRISCHE FELDESTÄRKE.

Nach diesem sehr einfachen Gesetz wirkt eine Punktladung e_1 , die sich am Fuße irgendeines Radiusvektors $\underline{r}$ befindet, auf eine andere Punktladung e_2 mit der Kraft

$$\underline{F} = \frac{e_1 e_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\underline{r}}{r} \quad (I1)$$

in der Richtung des Einheitsvektors $\underline{r}/r$ der Verbindungslinie $\overline{e_1 e_2}$, wenn sich die beiden Ladungen im *V a c u u m* befinden. Der Faktor 4π in Gl.(I1) stellt eine Normierung des Ausdrucks auf den Raumwinkel dar, während die Größe ϵ_0 die *E i n h e i t* der Ladung e bestimmt. Setzt man z.B. in Gl.(I1) $e_1 = e = e_2$ und

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi} \quad \text{dimensionslos} \quad (I2a)$$

ein, so folgt für die Ladung e die elektrostatische cm-g-sec-Einheit (CGSE)

$$(e) = (rF^{1/2}) = \text{cm dyn}^{1/2} = \text{g}^{1/2} \text{cm}^{3/2} \text{sec}^{-1} =: 1 \text{ CGSE Ladung.} \quad (I2b)$$

Den Empfehlungen der CONFERENCE GÉNÉRALE DES POIDS ET MESURES 1960 folgend, wollen wir hier mit Ausnahme einiger weniger Stellen rein informativer Art diese irrationalen Ausdrücke jedoch nicht verwenden. Wir fassen ϵ_0 als meßbare Größe auf und definieren

$$(e) := 1 \text{ Ampère} \times 1 \text{ sec} = 1 \text{ As} =: 1 \text{ MKSA-Einheit der Ladung} \quad (I2c)$$

derart, daß

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \frac{A^2 s^2}{m^2 \text{ Newton}} \quad c = 2,997925 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad (I2d)$$

gilt. Das derart definierte m-kg-sec-Ampère-System (MKSA), kurz SI-System genannt, legen wir diesem Buche zu Grunde. Schreibt man das COULOMB-Gesetz (I1) mit ϵ_0 aus Gl.(I2d) in der Form:

$$\underline{F} = e_2 \underline{E} \quad \underline{E} = \frac{e_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{r}{r},$$

so kann ganz analog zum NEWTON-schen Gravitationsgesetz die Kraftwirkung der Ladung e_1 auf die variable "Probeladung" $e_2 = e$ so verstanden werden, daß um die punktförmige Ladung e_1 ein kugelsymmetrisches elektrisches Feld entsteht, welches im Abstand r von e_1 auf die ebenfalls punktförmige Probeladung $e = e_2$ mit der Intensität $\underline{E} = \underline{E}(r)$ kraftmäßig wirkt.

Dieser Begriff der COULOMB-schen Feldintensität kann direkt verallgemeinert werden, indem die Ladung e_1 mit dem Schwerpunkt an der Stelle (x,y,z) bezüglich irgendeines kartesischen Koordinatensystems $O(x,y,z)$ zur Zeit t nicht mehr punktförmig angenommen und die Intensität des elektrischen Feldes um e_1 durch dessen Kraftwirkung

$$\underline{F} = e \underline{E} \quad (I3)$$

auf eine punktförmige Probeladung e an einer anderen Stelle (x,y,z) zur Zeit t definiert wird. Der Vektor $\underline{E}$ aus dieser Gleichung, der irgendeine Vektorfunktion der Form

$$\underline{E} = \phi_1(x,y,z,t) \quad (I4)$$

bezüglich $O(x,y,z)$ darstellt, heißt elektrische Feldstärke des Feldes um e_1 an der betrachteten Stelle (x,y,z) zur Zeit t . Für seine SI-Einheit ergibt sich aus Gl.(I2c) und (I3) die Dimension (vgl. (I12)!))

$$(E) = (F/e) = 1 \text{ Newton } A^{-1} s^{-1} = 1 \text{ kg m } A^{-1} s^{-3}, \quad (I5)$$

in der keine Wurzel mehr vorkommt. Sind die drei Komponenten der Vektorfunktion (I4) in den Achsen x , y und z des betrachteten kartesischen Systems bekannt,

$$\underline{E} = E_x(x,y,z,t) \underline{e}_x + E_y(x,y,z,t) \underline{e}_y + E_z(x,y,z,t) \underline{e}_z,$$

so können im elektrischen Feld Kurven konstruiert werden, deren Tangenten in allen Punkten des Feldes stets die Richtung der lokalen Feldstärke $\underline{E}(t)$ zur Zeit t angeben. Wird nämlich eine solche Kurve - oder, wie man sagt, **F e l d l i n i e** - im betrachteten kartesischen System $O(x,y,z)$ zur Zeit t vom Radiusvektor $\underline{r} = \underline{r}\{x(t), y(t), z(t)\}$ nach FIG. 1 umschrieben, so muß definitionsgemäß das Totaldifferential

$$d\underline{r} = dx \underline{e}_x + dy \underline{e}_y + dz \underline{e}_z$$

in jedem Punkt des Feldes in der Richtung der dort wirkenden Feldstärke $\underline{E}$ liegen. Mit anderen Worten, die sich entsprechenden Komponenten der beiden Vektoren $d\underline{r}(t)$ und $\underline{E}(t)$ müssen zu jeder Zeit t einander proportional sein, und zwar über das gleiche Differential dk :

$$dx = dk E_x \qquad dy = dk E_y \qquad dz = dk E_z .$$

Hieraus folgt die Differentialgleichung dieser Feldlinien (vgl. auch Band III) durch Eliminieren von dk :

$$\frac{dx}{E_x(x,y,z,t)} = \frac{dy}{E_y(x,y,z,t)} = \frac{dz}{E_z(x,y,z,t)} . \quad (16)$$

Da nach Gl.(13) die im Felde wirkende Kraft $\underline{F}$ stets die Richtung der Feldstärke $\underline{E}$ haben muß, stimmt in jedem Punkt des elektrischen Feldes die Richtung der Feldstärke mit der Richtung der dort wirkenden Kraft überein. Folglich werden geladene Massenpunkte in elektrischen Feldern stets längs den Feldlinien beschleunigt. Man nennt daher die Feldlinien oft auch **K r a f t l i n i e n** des elektrischen Feldes.

1.2. FLUSS UND SPANNUNG EINES ELEKTRISCHEN FELDES.

Stellt man sich ein Bündel von derartigen Kraftlinien vor, die ein Flächenelement dS mit der äußeren Normale $\underline{n}$ unter einem Winkel $\chi(\underline{E}, \underline{n})$ durchdringen, und bildet die Projektion $E \cos(\underline{E}, \underline{n}) = \underline{E} \cdot \underline{n}$ der Feldstärke $\underline{E}$ auf die Richtung von $\underline{n}$, so stellt die infinitesimale Größe $\underline{E} \cdot \underline{n} dS$ offensichtlich einen Fluß der Kraftlinien senkrecht durch das Flächenelement dS dar (vgl. FIG. 1). Daher heißt das Flächenintegral (vgl. Band III)

$$\Phi_e^E = \iint_{\Sigma} \underline{E} \cdot \underline{n} dS = \iint_{\Sigma} E_n dS \quad (17)$$

Fluß des elektrischen Feldes $\underline{E}$ durch die Fläche Σ , oder kurz **K r a f t -**

fluß durch Σ . Die SI-Einheit des Kraftflusses ist durch Gl.(I7) und (I5) gegeben:

$$(\Phi_e^E) = (ES) = 1 \text{ kg m}^3 \text{ A}^{-1} \text{ s}^{-3} . \quad (I8)$$

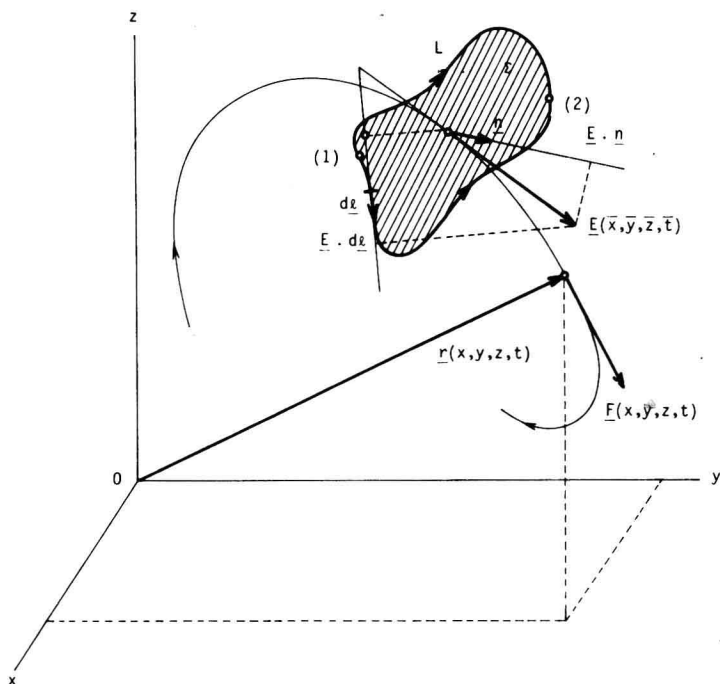


FIG. 1. Fluß und Spannung eines elektrischen Feldes.

So findet man nach Gl.(I7), (I1) mit $e_1 = e = e_2$ und (I3) für den Kraftfluß eines elektrostatischen Feldes um eine feste, punktförmige Ladung e die Größe

$$\oint_{\Sigma} \underline{E} \cdot \underline{n} \, dS = \oint_{\Sigma} \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos(\underline{r}, \underline{n}) \, dS = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\Sigma} \frac{\cos(\underline{r}, \underline{n})}{r^2} \, dS .$$

Rechts steht das bekannte GAUSS-Integral mit dem Wert (vgl. Band III, z.B.)

$$\oint_{\Sigma} \frac{\cos(\underline{r}, \underline{n})}{r^2} \, dS = 4\pi .$$

Folglich ist der gesuchte Fluß des elektrostatischen Feldes aus $\mathbf{e}$ durch Σ gleich e/ϵ_0 . Werden schließlich k solche Punktladungen e_i durch die Fläche Σ eingeschlossen, ergibt sich somit der zugehörige Kraftfluß zu

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^k e_i. \quad (I9)$$

Im Zusammenhang mit dem elektrischen Feld sei noch ein anderes wichtiges Integral eingeführt. Sei Σ eine diesmal nicht geschlossene Fläche, durch die ein Kraftfluß irgendeines elektrischen Feldes erfolgt, L eine beliebige Kurve auf Σ (z.B. die Randkurve von Σ) und $d\mathbf{l}$ ihr Linienelementvektor. Es kann nun durch Projektion der Feldstärke $\mathbf{E}$ des Feldes auf $d\mathbf{l}$ das Skalarprodukt $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E dl \cos(\mathbf{E}, d\mathbf{l})$ nach FIG. 1 gebildet werden. Nach Gl.(I3) ist der Skalar $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ gerade diejenige Arbeit, die von einer Einheitsladung e längs der Strecke $d\mathbf{l}$ unter der Kraftwirkung des Feldes geleistet wird. Folglich stellt das Linienintegral

$$V_e = \int_{(1)}^{(2)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{(1)}^{(2)} E_1 \, dl \quad (I10)$$

die gesamte Arbeit dar, welche bei der Bewegung einer Einheitsladung längs der Kurve L vom Punkt 1 zum Punkt 2 des Feldes erzeugt oder verbraucht wird. Es heißt **Spannung** des elektrischen Feldes längs der Kurve L zwischen deren Punkten 1 und 2. Im allgemeinen ist es in FIG. 1 nicht gleichgültig, auf welchem Wege man vom Punkt 1 zum Punkt 2 gelangt. Auch verschwindet das Integral (I10) i.a. nicht, wenn der Punkt 2 mit dem Punkt 1 zusammenfällt. In diesem Falle heißt die Spannung V_e **elektromotorische Kraft** (kurz: EMK) des Systems Feld/Ladung auf L . Nur in dem Spezialfall, in dem die Feldstärke $\mathbf{E}$ von einem Skalar U vermöge der Gleichung (vgl. dazu Band III z.B.)

$$\mathbf{E} = - \text{grad } U \quad (+)$$

abhängt, wird der Integrand in Gl.(I10) zu einem Totaldifferential- dU und folglich das Integral selbst vom Weg L zwischen den Punkten 1 und 2 unabhängig:

$$V_e = - \int_{(1)}^{(2)} \text{grad } U \cdot d\mathbf{l} = - \int_{U_1}^{U_2} dU = U_1 - U_2.$$

Die Spannung V_e ist dann der **Potentialdifferenz** $U_1 - U_2$