Проблемы советской экономики

В.Г. МЕДНИЦКИЙ

ОПТИМИЗАЦИЯ ПЕРСПЕКТИВНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

адемия наук СССР
Центральный
экономико-
математический
институт

Проблемы советской экономики

В. Г. МЕДНИЦКИЙ

ОПТИМИЗАЦИЯ ПЕРСПЕКТИВНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

Ответственный редактор
доктор экономических наук
В. А. ВОЛКОНСКИЙ

Издательство «Наука»
Москва 1984

В книге рассматриваются модели и алгоритмы разработки перспективного плана на отраслевом и народнохозяйственном уровнях. Особое внимание уделяется вопросам создания оптимального народнохозяйственного перспективного плана, изучению применения объективно обусловленных оценок в перспективном планировании.

На широкий круг специалистов, занимающихся применением экономико-математических методов в экономике.

Медницкий Владимир Георгиевич

ОПТИМИЗАЦИЯ ПЕРСПЕКТИВНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

Утверждено к печати
Центральным экономико-математическим институтом
АН СССР

Редактор издательства Н. А. Григорьева
Художественный редактор И. Ю. Нестерова
Технические редакторы В. Д. Прилепская, А. М. Сатарова
Корректоры А. Б. Васильев, Г. Н. Лащ

ИБ № 28355

Сдано в набор 11.11.83. Подписано к печати 21.02.84.
Т-05529. Формат 84×108 1/32. Бумага типографская № 2.
Гарнитура обыкновенная новая. Печать высокая
Усл. печ. л. 7,98. Усл.кр.-отт. 8.19. Уч.-изд. л. 8,5. Тираж 3200 экз. Тип. зак. 3480
Цена 85 коп.

Издательство «Наука»
117864 ГСП-7, Москва, В-485, Профсоюзная ул., 90

2-я типография издательства «Наука»
121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

М $\frac{0604020102-119}{042\ (02)-84}$ 66-84-II

ВВЕДЕНИЕ

Планирование производства включает два крупных этапа: определение состава будущих мощностей и их размещение и нахождение методов их наиболее рационального использования. Первая из названных задач в основном решается в перспективном планировании, вторая же в большей степени относится к текущему планированию. Полностью разделить эти задачи, однако, нельзя. При проектировании тех или иных машин, установок, сооружений, предприятий, технологических процессов и т. п. следует исходить из их экономической эффективности. Для ее оценки необходимо сопоставить затраты — текущие и капитальные — с отдачей. Таким образом, и в перспективном планировании, интересуясь в основном развитием структуры системы, необходимо оценивать различные ее варианты в соответствии с возникающими возможностями организации процесса производства. Естественно, описание самого процесса получается укрупненным и преследует цель не столько спланировать ассортимент и объемы продукции, сколько оценить эффективность различных вариантов структуры системы. В текущем планировании уточняется информация как о целях, так и о производственных возможностях, при этом можно наиболее обоснованно планировать загрузку мощностей.

В конкретных ситуациях обычно существует много вариантов решения тех или иных вопросов, возникающих перед плановиками, и окончательный выбор определяется как целевыми установками, так и возможностями, вернее, оценкой последних в моменты, когда решения должны быть приняты. Оптимальное решение отличается от других тем, что с точки зрения поставленных целей выявленные возможности используются наиболее полно, однако найти это решение, руководствуясь лишь общими соображениями, трудно. И тогда приходит на помощь метод математического моделирования, позволяющий в сочетании с комплексом средств современных ЭВМ ставить и решать сложные задачи.

Главным достоинством математической модели является возможность точного и однозначного описания проблемы. Одновременно это и недостаток метода — жизнь сложна и не всегда однозначна. Формулируя определенную задачу на математическом языке, мы обычно описываем одну из возможных точек зрения, которая после анализа решения, предложенного ЭВМ, может измениться. Диалог с ЭВМ в процессе вариантных расчетов позволяет, однако, получить достаточно обоснованные выводы для выработки окончательных рекомендаций.

Рассматриваемые в книге модели наиболее типичны для постановки задач перспективного планирования в сложных производственных системах. Как правило, они могут формулироваться в статическом и динамическом вариантах. Значительный опыт расчетов накоплен лишь для статики. Динамические модели, безусловно, более информативны, но весьма трудны для реализации. Другой важной особенностью решения задач являются дискретные переменные. Их появление приводит к проблемам максимизации (минимизации) довольно хороших функций (вогнутых или выпуклых) на сложных областях типа объединения конечной, но практически очень большой системы выпуклых множеств и т. п.

Основное внимание в книге уделено использованию свойств сопряженных функций, позволяющих упростить соответствующие задачи разложением их на более простые. Однако изложение ведется на языке, использующем только ставшие уже общеупотребительными понятия матриц и векторов. При этом используется следующая мнемоника. Матрицы обозначаются прописными буквами латинского алфавита с нижними индексами. Для векторов, за редкими исключениями, используются строчные буквы с индексами вверху. Для обозначения значений функций в основном употребляются буквы греческого алфавита, а для скаляров — латинские строчные с нижними индексами. Отступления от этих правил делались лишь в отдельных случаях, когда соответствующие обозначения стали общепринятыми, например K — для капиталовложений.

Глава первая

ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ПЛАНОВЫХ РЕШЕНИЙ

Производственная деятельность человека заключается в преобразовании предметов труда в его продукты. При этом естественно выделить первичные ресурсы, которые мы извлекаем из окружающей среды и используем на начальных стадиях производственного процесса; промежуточные продукты, производимые в самом процессе и обеспечивающие его продолжение, и конечные продукты, потребление и использование которых происходит за пределами производственной системы. Их номенклатура и объемы зависят как от объективных факторов — номенклатуры и объемов первичных ресурсов, вовлеченных в производство, характера самих производственных процессов, так и субъективных факторов — рациональной организации производства в целом и отдельных его элементов, правильного понимания целей, на достижение которых направлена деятельность различных частей, подразделений и всей производственной системы. Таким образом, возможны различные варианты планов, отличающиеся конечными результатами. Оптимальным можно назвать такое решение, в котором *номенклатура и объемы* конечной продукции наилучшим образом соответствуют имеющимся потребностям, а возможности ее производства использованы полностью.

Более точное определение этого понятия, а также методы разработки оптимальных планов базируются на изучении математических моделей, к описанию которых мы переходим.

1. Модели оптимального распределения ресурсов

Совсем коротко задача оптимального планирования может быть записана в виде

$$\max \{U(y) \mid y \in Y,\ y \geqslant 0\}. \tag{1}$$

Разыскивается набор значений составляющих вектора конечной продукции, максимизирующий некоторую функцию этих величин $U(y)$, при условии, что сам вектор y удовлетворяет производственным ограничениям. Эти ограничения выделяют некоторое множество Y возможных его значений, и максимизирующий вектор разыскивается среди его элементов: $y \in Y$. В замкнутой экономике на компоненты вектора конечной продукции накладывается еще условие неотрицательности, так как конечный продукт можно произвести в рамках существующего производства, но нельзя получить извне. Следует отметить, что незамкнутую экономику всегда можно переопределить как замкнутую, вводя в модель дополнительно описания экспортно-импортных операций.

Для использования модели (1) в расчетах необходимо располагать конкретными формами описания множества Y и функции U. Для описания Y наиболее часто используется линейная технологическая модель:

$$F\Lambda \leqslant f, \tag{2}$$

$$Q\Lambda = 0, \tag{3}$$

$$\Lambda \geqslant 0, \tag{4}$$

$$y = D\Lambda, \tag{5}$$

где f — вектор первичных ресурсов; F — матрица нормативов их затрат в технологических процессах; Q, D — матрицы нормативов затрат и выпуска промежуточных и конечных продуктов; Λ — вектор интенсивностей использования технологических процессов.

Его компоненты и представляют собой параметры, которые можно изменять, влияя на ход и организацию производственного процесса. Значения их, однако, не вполне произвольны, а заключены в множестве F_*, описание которого дается ограничениями (2)—(4) в виде конкретных условий баланса между объемами ресурсов, которыми мы располагаем или способны произвести, и возникающей в них потребностью. Выбор некоторого элемента из F_* возможен в качестве физически осуществимого метода использования производственной системы, но ничего не говорит о результатах принятого решения. Последние и описываются преобразованием (5). Таким образом, каждому набору параметров, фиксирующих определенный метод организации производственной деятельности, ставится в соответствие результат в форме вектора, компоненты которого описывают объемы производства конечных продуктов всех видов. По мере того как Λ принимает возможные значения из F_*, соответствующие значения y заполняют множество всевозможных конечных результатов Y, или, говоря короче, Y — образ F_* при технологическом преобразовании D. По своему физическому смыслу преобразование (5) является тоже балансовым соотношением, в котором подсчитывается разница между общим объемом произведенных продуктов и той их частью, которая была использована в производстве.

Изящество теории оптимального планирования заключается прежде всего в том, что все рассматриваемые соотношения, по крайней мере в теоретическом плане, могут рассматриваться как чисто натуральные балансы физически определенных количеств продуктов, ресурсов и т. п., которые потребляются или производятся в каких-то технологических процессах. За пределы системы выходит некоторая их часть — конечный продукт, выбором которого в пределах множества допустимых значений

$$Y_* = \{y \mid y \in Y,\ y \geqslant 0\} \tag{6}$$

можно распорядиться. Если этот выбор описывается определенным критерием, то оптимизация параметров всего производственного процесса сводится к решению условно-экстремальной задачи. Может возникнуть вопрос: «А где же цены, где экономическая эффективность?» Все это выводится из анализа условий оптимальности рассматриваемой задачи, но отнюдь не просто. Чтобы сделать выводы, надо освоить ряд довольно абстрактных и не всегда простых понятий. Рассмотрим на небольшом числовом примере, что могут собой представлять множества F_*, Y, Y_*.

Предположим, что все производство состоит из двух подразделений — Б и А, а за единицу измерения приняты максимально возможные объемы производства продукции в каждом из них в некоторых фиксированных ассортименте и ценах, исходя только из наличных производственных мощностей обоих подразделений. Обозначая через x_1 и x_2 фактические объемы их производства, получим ограничения

$$0 \leqslant x_1 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant 1. \tag{2'}$$

Дополнительно к ним могут существовать и другие ограничения, например по труду в виде

$$0{,}22x_1 + 0{,}88x_2 \leqslant 1. \tag{2''}$$

Его коэффициенты ,22; ,88 отражают как фактическое распределение труда между подразделениями (в данном условном примере 20% используется в Б и 80% в А), так и его дефицитность: в соответствии с принятыми данными для полного использования мощностей обоих подразделений $x_1 = x_2 = 1$ требуется 1,1 единиц труда, что на 10% превышает имеющуюся наличность.

Если других ограничений нет, то неравенства (2′), (2″) полностью описывают множество технологических возможностей, причем параметрами служат объемы производства продукции в обоих подразделениях. Откладывая их значения по двум взаимно перпендикулярным осям, нетрудно получить графическое изображение множества F_*, приведенное на рис. 1.

Ограничения (2′) выделяют единичный квадрат, а (2″) срезает у него вершину (1,1), соответствующую полному использованию мощностей в обоих подразделениях. Точки A' и B' отражают роль ограничения по труду. Если, например, группу A полностью обеспечить ресурсами труда, то выпуск продукции в группе B определяется из условия, $,22x_1 \leqslant 1 - ,88$, т. е. максимально возможное значение x_1 составит только ,545 от всего возможного объема производства. Аналогичным образом при полном использовании мощностей группы B оставшихся ресурсов труда хватит на производство, 886 единиц продукции в группе A. Точки отрезка $B'A'$ соответствуют различным другим соотношениям между объемами производства в обоих подразделениях при условии полного использования ресурсов труда. Отрезки AB' и BA' соответствуют полному использованию мощностей одного из подразделений. Если же объемы производства определяются некоторой внутренней точкой фигуры F_*, то будут недоиспользоваться и ресурсы мощностей и ресурсы труда. Определение множества F_*, таким образом, зависит от нашего отношения к использованию труда. Если недоиспользование его ресурсов допустимо, то F_* совпадает с областью $OAB'A'B$ на рис. 1. Если же обязательно полное использование всего наличного труда, то ограничение (2″) должно быть заменено равенством, а F_* изображается в этом случае отрезком $B'A'$.

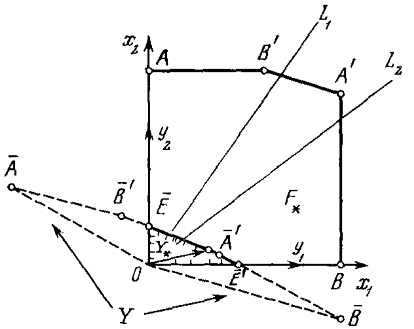

Рис. 1. Двухсекторная модель

Для определения объемов конечной продукции необходима дополнительная информация о том, какая часть продукции каждого из подразделений расходуется на производственные нужды. Предположим, например, что 70% продукции подразделения Б представляет собой сырье и материалы, используемые в подразделении А. В последнем, кроме того, расходуется 60% собственной продукции, а 30% ее направляется в подразделение Б. Собирая эти данные в матрицу

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & -{,}7 \\ -{,}3 & {,}4 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

получим условия баланса между продукцией обоих подразделений

$$x_1 - {,}7x_2 = y_1, \qquad - {,}3x_1 + {,}4x_2 = y_2, \tag{5'}$$

где y_1, y_2 — объемы производства конечной продукции.

Соотношения (5′) позволяют непосредственной подстановкой вычислять значения составляющих вектора конечного производства при любых значениях его суммарных объемов. Например, при $x_1 = x_2 = 1$ получаем $y_1 = {,}3$ и $y_2 = {,}1$, т. е. в конечное производство войдет 30% продукции группы Б и 10% продукции, произведенной в А, но для образования реальных значений вектора конечной продукции, конечно, необходимо выбирать значения суммарных объемов из допустимого множества их значений F_*. Вычисляя результат подстановки в ограничения (5′) координат любой точки из множества F_*, получим в той же координатной системе новую геометрическую фигуру $O\bar{A}\bar{B}'\bar{A}'\bar{B}$. Это и есть Y. Видно, что большая его часть лежит в области отрицательных значений конечного продукта. Это легко объяснить. Например, точка A входит в F_*, а координаты ее $x_2 = 1$, $x_1 = 0$ означают, что мы пытаемся организовать производство, полностью используя мощности подразделения A и ничего не производя в Б. Каков же будет результат? Подставляя координаты A в (5′), получим $y_2 = 0{,}4$, $y_1 = -0{,}7$; другими словами, вся свободная продукция подразделения A выходит непосредственно на конечное потребление, но поскольку подразделение Б работу прекратило, то продукция, производившаяся им для подразделения А, оказывается в дефиците.

Таким образом, условия неотрицательности вектора конечного производства существенно сужают область фактически возможных изменений технологических переменных (на рис. 1, в частности, она заключена между лучами OL_1 и OL_2). В пространстве же компонент вектора конечного производства получаем множество Y_*, определяющее реально достижимые значения объемов производства конечной продукции. Если бы мы приняли условие полного использования ресурсов труда, то множество Y изобразилось бы отрезком $\bar{B}'\bar{A}'$, а Y_* — его частью, лежащей в положительном квадранте.

Как показывает пример, даже в такой сравнительно простой модели возможные планы производства определены не однозначно. Существует множество точек, обозначённое нами через Y_*, и все они определяют собой осуществимые конечные результаты производства. Если мы тем не менее выбираем одну из них, значит, она представляется нам лучшей, чем остальные. Таким образом, фактически оценка различных элементов допустимого множества происходит независимо от того, имеется ли у нас сформулированный в явной форме критерий оптимальности, или выбор окончательного решения производится из каких-либо иных соображений, не формализованных математически. В случае, когда критерий сформулирован и описан в форме некоторой функции, теоретический анализ проблемы оптимизации может быть продолжен. В частности, мы получаем возможность рассчитывать параметры оптимальных планов.

2. Оценки оптимального плана

Предположим, что в предыдущем примере критерий задан требованием $\max U(y_1, y_2) = 4{,}27\; y_1^{0,6} y_2^{0,3}$. Таким образом, U — конкретная функция обеих переменных конечного выпуска и спрашивается, каким образом можно определить ее максимум на множестве Y_*, изображенном на рис. 1 (или заданном аналитически соотношениями (2′), (2″), (5′)).

Высказываемая иногда в литературе идея перебора о том, что машина за очень короткое время просматривает множество вариантов плана и выбирает из них наилучший, здесь сразу отвергается. Множество различных вариантов плана совпадает в нашем примере со всеми точками многоугольника $\bar{E}\bar{A}'\bar{E}'O$ (или отрезка $\bar{E}\bar{A}'$). Их количество не только бесконечно, но указанные точки вообще не могут быть перечислены в виде какой-то последовательности вариантов по принципу 1-й вариант плана, 2-й вариант и т. д. Следовательно, мы должны располагать методом, позволяющим, во-первых, вычислить некоторую точку $y^0 \in Y_*$ как оптимальную (или, лучше сказать, предположительно оптимальную), а затем уметь доказать, что она действительно оптимальная, не прибегая к прямому сравнению величины критерия в этой точке $U_0 = U(y^0)$ с его значениями во всех остальных точках допустимого множества.

Для построения доказательства такого типа кроме самого вектора y^0 требуется, очевидно, какая-то дополнительная информация. Оказывается, что она сосредоточена в векторе оценок. Оценками плана y^0 называем некоторый вектор p с тем же количеством компонент, если он удовлетворяет двум условиям:

а) стоимость набора y^0 в оценках p не меньше, чем любого другого допустимого вектора. Математически это эквивалентно соотношению [1]

$$\langle p, y - y^0 \rangle \leqslant 0 \text{ для всех } y \in Y_*; \tag{8}$$

б) приращение функции критерия при переходе от y^0 к любому другому набору y, не обязательно допустимому, не превосходит разницы в стоимости обоих наборов при измерении последней в оценках p. В математической записи

$$U(y) - U(y^0) \leqslant \langle p, y - y^0 \rangle \text{ для всех } y. \tag{9}$$

Если для некоторого допустимого плана y^0 задачи (1) удалось построить вектор оценок, то указанный план в ней оптимален. Действительно, в (8) для всех других допустимых планов образуется неположительная величина, а из неравенства (9) в этом случае следует, что

$$U(y) \leqslant U(y^0) \text{ для всех } y \in Y_*, \tag{9'}$$

т. е. y^0 — один из максимизирующих векторов.

Отметим сразу же одно следствие этих соотношений. Если $p = 0$, то в левой части (9) стоит тождественный нуль для всех y, а значит, и неравенство (9') выполняется не только для допустимых, но и для всех мыслимых значений этого вектора. Другими словами, y_0 — решение задачи на безусловный экстремум функции $U(y)$. В то же время, если y^0 — внутренняя точка множества Y_*, т. е. существует малое смещение от нее в любом направлении, приводящее снова к допустимому плану, то, полагая $y =$

---

[1] Символ $\langle a, b \rangle$ означает сумму попарных произведений компонент обоих векторов, указанных, в скобках: $a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$.

$= y^0 + \lambda p$, где $\lambda > 0$ и достаточно мало (тогда точка y остается в допустимом множестве), получаем в (8) неравенство $\lambda \langle p, p \rangle \leqslant 0$, откуда $p = 0$. Таким образом, если $p \neq 0$, то план y^0 находится на границе допустимого множества и производственные ограничения действительно сдерживают рост функции критерия, т. е. мы имеем дело с задачей на условный экстремум.

Здесь может возникнуть вопрос. Ясную и простую идею максимизации функции критерия на множестве допустимых планов мы заменили двумя математическими условиями — неравенствами (8) и (9), введя в них новые неизвестные в форме вектора оценок. Кажется, что такой прием не упрощает, а усложняет нашу исходную задачу. Посмотрим, однако, что дают оценки для определения оптимального плана в рассмотренном выше числовом примере.

Поскольку функция критерия растет вдоль любого луча по мере удаления от начала координат, то ясно, что искомая точка максимума лежит на участке границы множества Y_*, образованном отрезками $\bar{E}\bar{A}'$, или $\bar{A}'\bar{E}'$. Первый из них определяет ограничение по труду. Содержащую его прямую можно описать аналитически с помощью коэффициентов полных затрат труда. Подсчитывая их, сначала определяем матрицу, обратную $\mathbf{D}$ (см. (7)):

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} 2{,}105 & 3{,}684 \\ 1{,}579 & 5{,}263 \end{pmatrix},$$

а затем умножаем ее слева на вектор прямых затрат труда. В итоге получаем уравнение для участка границы $\bar{E}\bar{A}'$ в виде

$$1{,}853 y_1 + 5{,}442 y_2 = 1. \qquad (2''')$$

Если на этом участке расположена точка (y_1^0, y_2^0), представляющая оптимальный план, то оценки можно выбрать пропорциональными коэффициентам: $p_1 = \lambda \cdot 1{,}853$ и $p_2 = \lambda \cdot 5{,}442$, так как для произвольного допустимого плана получаем неравенство $p_1 y_1 + p_2 y_2 = \lambda (1{,}853 y_1 + 5{,}442 y_2) \leqslant \lambda$, а для оптимального — знак неравенства заменяется точным равенством. Неравенство (8), таким образом, будет выполнено.

Функция критерия вогнута и дифференцируема по обеим переменным. Для таких функций имеет место неравенство

$$U(y) - U(y^0) \leqslant \langle \nabla U |_{y=y^0}, \ y - y^0 \rangle, \qquad (9'')$$

выполняющееся для любой пары точек y, y^0 из области определения, где через $\nabla U\,|_{y=y^0}$, как обычно, обозначен вектор частных производных функций U в точке y^0. Если на отрезке $\bar{E}\bar{A}'$ найдем точку y^0, для которой можно подобрать λ, удовлетворяющее равенству

$$\nabla U\,|_{y=y^0} = p, \tag{10}$$

то получим оценки, а значит, докажем оптимальность точки y^0.

Данное рассуждение является весьма общим. Обычно в конкретных задачах, имея дело с дифференцируемой функцией, подбираем точку, лежащую на границе допустимого множества, для которой выполняется условие (10). Методы подбора, однако, существенно зависят от описания функции. Так, в рассматриваемом примере функция имеет вид $U_0 y_1^{\alpha} y_2^{\beta}$

$$\frac{\partial U}{\partial y_1} = U_0 \alpha y_1^{\alpha-1} y_2^{\beta}; \qquad \frac{\partial U}{\partial y_2} = U_0 \beta y_1^{\alpha} y_2^{\beta-1},$$

следовательно, $\dfrac{\partial U}{\partial y_2} \Big/ \dfrac{\partial U}{\partial y_1} = \dfrac{\beta}{\alpha} \cdot \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{\beta}{\alpha \cdot k}$, если положить $y_2 = y_1 k$. Но из условий (10) имеем

$$\frac{\partial U}{\partial y_2} \Big/ \frac{\partial U}{\partial y_1} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{5,442}{1,853},$$

значит, $k = \dfrac{1,853 \cdot 0,3}{5,442 \cdot 0,6} = 1,7025$. Теперь y_1^0 и y_2^0 вычисляются из уравнений $y_2 = 1,7025 y_1$ и (2'''): $y_1^0 = ,3598$; $y_2^0 = ,0612$. На рис. 1 видно, что эта точка почти совпадает с $\bar{A}'$. Мы можем, однако, выяснить ее расположение точнее, подсчитывая с помощью матрицы D^{-1} валовые выпуски $x_1^0 = ,983$; $x_2^0 = ,890$. Ограничения (2') действительно выполнены и, следовательно, план оптимален. Только теперь для полноты картины, поскольку для решения задачи это уже несущественно, вычисляется значение критерия в оптимальной точке. Оно получается равным единице.

Приведенный пример можно прокомментировать следующим образом. Вопрос определения оптимального плана мы заменили другим: для какой точки из множества Y_* можно определить оценки? Затем все внутренние точки этого множества были отброшены по соображениям монотонности критерия. Участок его границы был исследован подробнее. В результате мы установили, что на прямой, содержащей отрезок $\bar{E}\bar{A}'$, имеется единственная точка с координатами (,3598, ,0612), для которой возможно построение оценок. Вычислив координаты соответствующей точки в F_*, мы установили, что предположительно оптимальная точка лежит внутри отрезка $\bar{E}\bar{A}'$, следовательно, она допустима и действительно оптимальна. Таким образом, переходя от прямых поисков оптимальной точки к определению плана, допускающего построение оценок, получаем возможность отбрасывать элементы допустимого множества как не имеющие оценок. В этом и заключается значение последних. Переходя к их вычислению, получаем возможность отбрасывать части множества Y_*, не производя их детального анализа.

Возникает вопрос: в какой мере метод оценок универсален? Во всех ли без исключения оптимизационных задачах для оптимального вектора можно вычислить оценки, или существуют типы задач, у которых вектора оценок просто не существует? Ответ на поставленный вопрос, к сожалению, положительный. Для существования вектора оценок в задаче максимизации, например, необходимо, чтобы множество ограничений было выпуклым, а функция критерия — вогнутой. Но и этого еще недостаточно. Обычно требуется некоторое дополнительное условие. Например, когда ограничения задачи линейны, нужно, чтобы по крайней мере в двух точках допустимого множества Y_* функция $U(y)$ принимала конечные значения и хотя бы одна из этих точек не лежала на границе множества всех точек, в которых функция конечна. При таком обилии оговорок было бы удивительно, если бы в некоторых экстремальных задачах часть указанных условий не выполнялась, и, действительно, как увидим дальше, имеются важные по своему содержанию задачи, для которых вектор оценок в приведенном выше смысле не существует.

3. Структура оптимизационных моделей

При построении экономико-математических оптимизационных моделей используются в основном три типовые структуры.

Первая из них описывается системой соотношений транспортной задачи

$$\min\Big\{\sum_{ij} c_{ij}x_{ij} \,/\, \sum_j x_{ij} \leqslant b_i,\ \sum_i x_{ij} \geqslant a_j,\ x_{ij} \geqslant 0\Big\}. \qquad (11)$$

(Строится план перевозок x_{ij}, минимизирующий суммар-

Таблица 1

Типы ограничений	Пункты	Наименование переменных				Объемы	
		$x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}$	$x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}$	$\dots$	$x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn}$		
	потребления	1	1		1	a_1	потребления
		1	1		1	a_2	
		$\ddots$	$\ddots$		$\ddots$	$\vdots$	
		1	1...		1	a_n	
	производства	—1 —1...—1				b_2	производства
			—1 —1 ... —1			b_2	
				$\ddots$		$\vdots$	
					—1 —1 ... —1	b_m	
		$c_{11}, c_{22}, \dots, c_{2n}$	$c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2n}$	$\dots$	$c_{m1}, c_{m2}, \dots, c_{mn}$		
		Коэффициенты удельных затрат на перевозку продукции					

ные транспортные затраты при условии, что вывоз от любого поставщика i не превосходит объемов его производства b_i, а ввоз к любому из потребителей j не меньше его потребностей a_j.) В матричной форме эта задача представлена в табл. 1.

Каждый ее столбец соответствует перевозке от i-го поставщика к j-му потребителю и содержит только два элемента: $+1$ в строке j и -1 в строке $n + i$. Типы этой задачи в действительности более разнообразны. Так, и поставщики, и потребители могут рассматриваться как узлы некоторого графа Г. Тогда наличие столбца в матрице ограничений просто указывает на существование коммуникации с направлением перевозки от вершины, помеченной -1, к вершине с пометкой $+1$. Могут различаться также типы ограничений: «равно», когда сальдо потоков, проходящих через вершину, совпадает с заданной в последней величиной расхода; «меньше равно», когда не превосходит, и «больше равно», когда расход служит его нижней границей. Тип указывается конкретно для каждого ограничения в дополнительном столбце модели, как показано в табл. 1.

Обобщением этой модели является так называемая двухкомпонентная задача. Каждый столбец ее матрицы содержит по-прежнему только два отличных от нуля элемента. Значение одного из них может быть произвольным, второй обычно равен 1 или —1. Вот типичный пример:

$$\min \{\sum_{i,r} c_{ir}x_{ir} + \sum_{ils} c_{ils}x_{ils}\} \tag{12}$$

при ограничениях

$$\sum_{r \in R_l} x_{ir} = \sum_{s} x_{ils}; \tag{13}$$

$$\sum_{l} x_{ils} = a_{is}; \tag{14}$$

$$\sum_{i} t_{ir}x_{ir} \leqslant \Phi_r; \tag{15}$$

$$x_{ir} \geqslant 0, \qquad x_{ils} \geqslant 0. \tag{16}$$

Здесь x_{ir} — объем производства i-й продукции на r-м предприятии. Неравенство (15) балансирует потребность во времени обработки всей продукции с фондом времени Φ_r, которым предприятие r располагает. Потребность a_{is} в i-м продукте у s-го потребителя удовлетворяется за счет ввоза из различных пунктов производства согласно уравнению (14), а вывоз в соответствии с (13) совпадает с объемами производства на всех предприятиях l-го пункта, множество которых обозначено через R_l. Минимизируется сумма производственных и транспортных затрат.

В модели (12) — (16) сочетается несколько транспортных моделей (по одной для каждого продукта) с моделью распределения мощностей совокупности предприятий для производства набора продуктов I. Каждая из технологических переменных x_{ir} имеет ненулевые коэффициенты только в двух соотношениях, одно из которых входит в систему (15), а второе — в (13). Поэтому в целом мы получаем двухкомпонентную задачу.

Отказываясь от каких-либо ограничений на количество и знак элементов в столбцах матрицы ограничений, получаем другую типовую структуру — технологическую модель с непрерывными переменными. В качестве примера можно привести обобщение численного примера, рассмотренного выше, для n отраслей:

$$\max \{U(y) \mid (E - A)x = y, \langle t, x \rangle = T, x \leqslant M, y \geqslant 0\}. \tag{17}$$