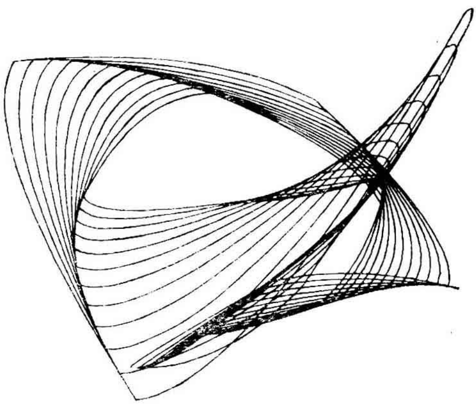
数学 III

小平邦彦 编

昭和49年４月10日文部省検定済
高等学校数学科用

数学 III

小平邦彦 編



東京書籍株式会社

別記著作者

東京大学名誉教授 学習院大学教授	小平邦彦
東京大学教授	岩堀長慶
一橋大学教授	松坂和夫
東京教育大学教授	前原昭二
東京大学教授	藤田　宏
成蹊大学教授	志村利雄
宮城教育大学教授	鶴丸孝司
杏林大学教授	伊藤豊吉
都立田無工業高校教諭	番場参策
都立田園調布高校教諭	山崎和郎
都立戸山高校教諭	三瀬茂利
都立西高校教諭	渋谷幸敏
都立小石川工業高校教諭	八木恒雄
お茶の水女子大学付属高校教諭	石田光子

東京書籍株式会社編集部

表紙　勝井三雄　　カット　日科技研 電子計算機センター

数学III

数 III 402
昭和52年 1月20日印刷
昭和52年 2月10日発行
昭和49年 4月10日文部省検定済

著作者　小平邦彦
　　　　ほか13名（別記）

発行者　東京書籍株式会社
　　　　代表者　鈴木和夫
　　　　東京都台東区台東 1 丁目 5 番18号

印刷者　東京書籍印刷株式会社
　　　　代表者　奥賀田辰雄
　　　　東京都北区堀船 1 丁目23番31号

発行所　東京書籍株式会社
　　　　東京都台東区台東 1 丁目 5 番18号
　　　　電話 東京(03)835局6111(代表)
　　　　郵便番号 1 1 0

定価　　文部大臣が認可し官報で告示した定価
（上記の定価は，各教科書取次供給所に表示します。）

表紙と各扉のカットについて

表紙や各扉のカットは，電子計算機(コンピューター)による自動製図プログラムシステムにより制作したものです。

たとえば，II章のカットは円周上の1点が，固定された円の上をころがってできる軌跡の上を，長方形が移動したものです。また，付録のカットは

$$x = e^{-\theta}(\sin\theta + \cos\theta), \quad y = e^{-\theta}(\sin 0.5\theta + \cos 0.5\theta)$$

の式でθを変化させたとき得られる曲線です。

はじめに

本書は高等学校数学ⅡBの学習を終えた諸君のために，それに続く数学の教科書として編集したものである。

数学Ⅰのはじめに述べたように，数学は本質的に自由であって，数学者はおよそ考えることが可能なものをすべて自由に考える。この意味で数学は人間精神の自由な創造物であるといわれる。一方，数学はいろいろな分野に広く応用されて，実に不思議なほど役に立つのである。

本書は4つの章からなる。第Ⅰ章では，まず無限数列について収束，発散の意味，極限についての法則を学び，次に，無限級数とその和について学ぶ。

第Ⅱ章は微分法とその応用を扱う。微分法については，すでに数学ⅡBで学んだが，そこで扱った関数は簡単な多項式で表されるものに限られていた。三角関数，対数関数，指数関数などの微分法はここではじめて学ぶのである。また，関数の商，合成関数，逆関数の微分法についてもここで学ぶ。微分法の応用としては，平均値の定理，関数の増加・減少と極大・極小，曲線の凹凸などを扱う。

第Ⅲ章で扱うのは，積分法とその応用である。積分法についてもその初歩はすでに数学ⅡBで学んだが，本章ではそれに引き続いて，さらにいろいろな関数の積分を学ぶ。また，積分の一般的方法として，置換積分法や部分積分法について学ぶ。積分法の応用としては，面積，体積，曲線の長さなどの計算，さらに，簡単な微分方程式の解法について述べる。微分方程式は物理学をはじめとして広く自然科学に応用される。

最後の第Ⅳ章では，確率と統計について学ぶ。確率の初歩についてはすでに数学Ⅰで学んだが，本章ではさらに進んで，二項分布，正規分布，分散と標準偏差などについて学ぶ。標準偏差の概念は理論上も応用上も重要である。この章の第2節では，統計的推測について述べる。

数学ⅡBのはじめに述べたように，数学を学ぶには，本を読んで覚えるだけでは不十分であって，自分でよく考え，計算をしたり問題を解いたりしてみることがたいせつである。

凡例

(例)　本文の理解を助けるために具体例を示したものです。

例題　内容を理解するための代表的な問題を，例題としてあげました。わく囲みの〔解〕や〔証明〕は，模範解を示したものです。

注意，*）注意や欄外の脚注で，理解を助ける説明を補いました。

問　学習した内容をすぐ身につけるための設問と，導入のための設問を本文中で問にしました。

問題　各節末に，その節で学んだことがらを練習するための問題を設けました。

練習問題　各章末に，その章全体の復習と応用の問題を掲げました。A は基本的なものを主とし，B はやや程度の高い問題となっています。

付録　巻末の補充問題は，さらに学習内容の進んだ箇所です。

目次

I章　数列の極限

1節　数列の収束と発散 ………… 2

1　収束，発散の意味 ……………… 2

2　極限の求め方 ……………… 6

3　数列$\{r^n\}$の極限 ……………… 12

問題 ……………… 15

2節　無限級数 ……………… 16

1　無限級数 ……………… 16

2　無限等比級数 ……………… 18

3　無限級数の和の求め方 ……… 22

問題 ……………… 26

練習問題 A，B ……………… 27, 28

II章　微分法とその応用

1節　関数の極限 ……………… 30

1　関数の極限 ……………… 30

2　関数の連続性 ……………… 36

問題 ……………… 43

2節　微分法 ……………… 44

1　導関数 ……………… 44

2　商の微分法 ……………… 46

3　逆関数の微分法 ……………… 49

4　合成関数の微分法 ……………… 51

問題 ……………… 54

3節　いろいろな関数の導関数 55

1　三角関数の導関数 ……………… 55

2　対数関数・指数関数の導関数 … 57

3　高次導関数 ……………… 63

問題 ……………… 65

4節　微分法の応用 ……………… 66

1　接線 ……………… 66

2　平均値の定理 ……………… 69

3　関数の増加・減少 ……………… 73

4　関数の最大・最小および極大・極小 ……… 77

5　曲線の凹凸 ……………… 84

6　速度・加速度，曲線の媒介変数表示 ……… 88

7　近似式 ……………… 95

問題 ……………… 100

練習問題 A，B ……………… 101, 102

Ⅲ章　積分法とその応用

1節　不定積分 …………………… 104

1　基本公式 …………………… 104

2　置換積分法 …………………… 107

3　部分積分法 …………………… 111

4　いろいろな関数の不定積分 …… 113

問題 …………………… 118

2節　定積分 …………………… 119

1　定積分 …………………… 119

2　定積分の置換積分法 ………… 121

3　定積分の部分積分法 ………… 126

問題 …………………… 127

3節　積分法の応用 …………… 128

1　面積 …………………… 128

2　体積 …………………… 133

3　曲線の長さ …………………… 136

4　定積分の近似値 ……………… 140

5　微分方程式 …………………… 145

問題 …………………… 154

練習問題 A，B ……………… 155, 156

Ⅳ章　確率・統計

1節　確率 …………………… 158

1　確率変数と確率分布 ………… 158

2　二項分布 …………………… 164

3　平均 …………………… 168

4　分散・標準偏差 ……………… 172

5　連続分布 …………………… 178

6　正規分布 …………………… 181

7　二項分布と正規分布 ………… 186

問題 …………………… 189

2節　統計的推測 ……………… 190

1　母集団と標本 ………………… 190

2　標本平均の分布 ……………… 194

3　推定 …………………… 199

4　仮説の検定 …………………… 202

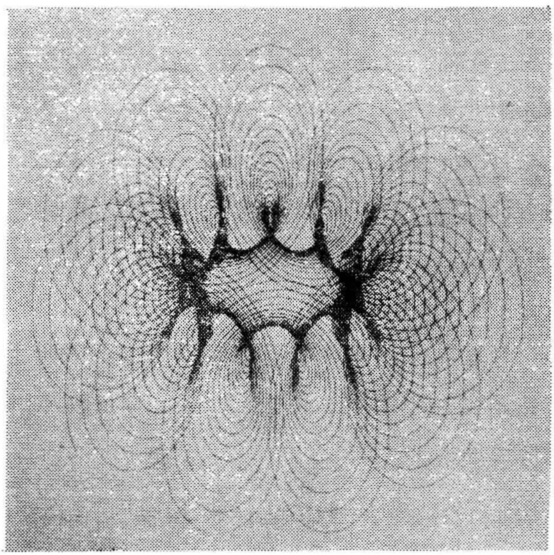
問題 …………………… 208

練習問題 A，B ……………… 209, 210

付録

補充問題 ……………………………… 212
解答 ……………………………………… 216
索引 ……………………………………… 219
数表　三角関数表 ………………………… 221
平方・平方根・逆数表 …… 222
正規分布表 …………………… 223
乱数表 …………………………… 224
ギリシア文字とその読み方 ……… 226

I・数列の極限



1節　数列の収束と発散
2節　無限級数

1節　数列の収束と発散

1　収束，発散の意味

たとえば

$$1+1,\ 1+\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{3},\ \cdots\cdots\cdots,\ 1+\frac{1}{n},\ \cdots\cdots\cdots$$

のように，ある規則にしたがって順に数を並べたものを **数列** とよぶことは数学ⅡBで学んだ。さらに，一般に数列を

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\cdots\cdots,\ a_n,\ \cdots\cdots\cdots$$

のように書き表し，おのおのの数 a_n をその数列の **項** ということ，数列を $\{a_n\}$ と表すこと，また，有限個の項からなる数列を **有限数列** とよぶことなどもすでに学んだ。

有限数列に対して，項が限りなく続く数列を **無限数列** という。

本章では主として無限数列を取り扱うから，単に数列といえば，無限数列を意味するものとする。

例 1　次のような数列の一般項が，n の増加とともに変わっていくようすを図に表してみよう。

(1)　$1+1,\ 1+\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{3},\ \cdots\cdots\cdots,\ 1+\frac{1}{n},\ \cdots\cdots\cdots$

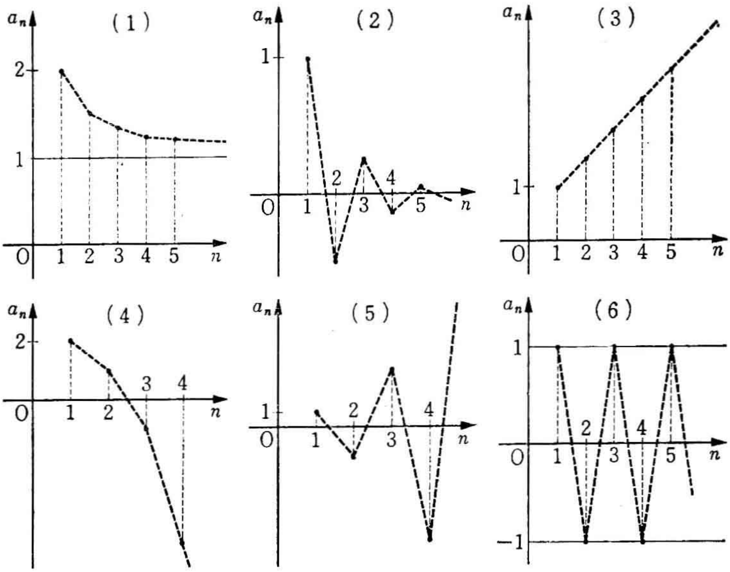
(2)　$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ \cdots\cdots\cdots,\ \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},\ \cdots\cdots\cdots$

(3)　$1,\ 1\frac{1}{2},\ 2,\ 2\frac{1}{2},\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ \frac{n+1}{2},\ \cdots\cdots\cdots$

(4)　$3-1,\ 3-2,\ 3-2^2,\ \cdots\cdots\cdots,\ 3-2^{n-1},\ \cdots\cdots\cdots$

(5)　$1,\ -2,\ 4,\ -8,\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ (-2)^{n-1},\ \cdots\cdots\cdots$

(6)　$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ (-1)^{n-1},\ \cdots\cdots\cdots$



上の図からわかるように，n が大きくなるにつれて一般項の値が変化するようすは，数列によってそれぞれ異なっている。たとえば，n が限りなく大きくなるとき，数列(1)の項 $1+\dfrac{1}{n}$ は1に近づき，数列(2)の項 $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ は0に近づく。

一般に，無限数列

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\cdots\cdots,\ a_n,\ \cdots\cdots\cdots$$

の項 a_n が，n が限りなく大きくなるにつれて，一定の値 α に限りなく近づくとき，数列 $\{a_n\}$ は α に **収束** するといい，α を数列 $\{a_n\}$ の **極限値** という。

数列 $\{a_n\}$ の極限値が α であることを

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

または

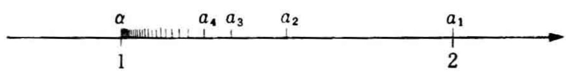
$$n \to \infty \quad \text{のとき} \quad a_n \to \alpha$$

と書き表す。[*)]（“$n\to\infty$ のとき”を略して単に“$a_n\to\alpha$”と書くこともある。）

$\boxed{例}$ **2**　$\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=1,\qquad \lim_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=0$

数列 $\{a_n\}$ が α に収束するということは，数直線上に点 a_n をとれば，n が大きくなるとき，点 a_n と点 α との距離 $|a_n-\alpha|$ がいくらでも小さくなるということにほかならない。

上の例 2 の数列 $\left(a_n=1+\dfrac{1}{n}\right)$ については，下の図のようになる。



問 1　数列 $\left\{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$ の初項から第 5 項までを表す点を数直線上にとってみよ。

上に述べたように，$a_n\to\alpha$ は $|a_n-\alpha|\to 0$ と同じことである。特に，$a_n\to 0$ は $|a_n|\to 0$ と同じことである。

数列 $\{a_n\}$ が α に収束するというとき，項 a_n のうちに α に等しいものがあってもさしつかえない。

特に，すべての a_n が α に等しい数列，すなわち

$$\alpha,\ \alpha,\ \alpha,\ \cdots\cdots\cdots,\ \alpha,\ \cdots\cdots\cdots$$

も α に収束すると考え

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$$

と書く。このような数列を **定数数列** という。

---

*）∞は“無限大”と読む。

p.2の例1で数列(3), (4), (5), (6)はいずれも収束しない。収束しない無限数列は **発散** するという。

これらの数列のうち, (3)の項 $\dfrac{n+1}{2}$ は, n が限りなく大きくなるにつれて限りなく大きくなる。

一般に数列 $\{a_n\}$ において, n が限りなく大きくなるにつれて a_n が限りなく大きくなるとき, 数列 $\{a_n\}$ は **正の無限大に発散** するといい,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

または

$$n \to \infty \quad \text{のとき} \quad a_n \to \infty$$

と書く。

これに対して, 数列(4)の項 $3-2^{n-1}$ は, $n\to\infty$ のとき負でその絶対値 $|3-2^{n-1}|$ は限りなく大きくなる。すなわち, $3-2^{n-1}$ は限りなく小さくなる。

一般に数列 $\{a_n\}$ において, n が限りなく大きくなるにつれて, a_n が負でその絶対値が限りなく大きくなるとき, 数列 $\{a_n\}$ は **負の無限大に発散** するといい,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

または

$$n \to \infty \quad \text{のとき} \quad a_n \to -\infty$$

と書く。

例 3 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2} = \infty, \qquad \lim_{n\to\infty} (3-2^{n-1}) = -\infty$

負の無限大とはっきり区別するために, 正の無限大を $+\infty$ と書くこともある。たとえば, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2} = +\infty$ などと書く。

また，p.2の数列(5)，(6)は収束もしないし，正の無限大にも負の無限大にも発散しない。このような無限数列は**振動**するという。

収　束		…………	$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$
発　散	正の無限大に発散	…………	$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$
	負の無限大に発散	…………	$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$
	振　動	…………	その他の場合

数列の収束・発散

注意　無限数列 $\{a_n\}$ が∞に発散するとき，$\{a_n\}$ の極限が∞であるということもある。$-\infty$に発散する場合も同様である。

問 2　次の数列の収束，発散をいえ。

(1)　$-5,\ -2,\ 1,\ 4,\ \cdots\cdots,\ 3n-8,\ \cdots\cdots$

(2)　$1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{16},\ \cdots\cdots,\ \frac{1}{n^2},\ \cdots\cdots$

(3)　$6,\ 4,\ 6,\ 4,\ \cdots\cdots,\ 5+(-1)^{n-1},\ \cdots\cdots$

(4)　$2,\ \frac{2}{3},\ \frac{10}{9},\ \frac{26}{27},\ \cdots\cdots,\ 1+\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1},\ \cdots\cdots$

2　極限の求め方

数列

$$1.1,\ 1.01,\ 1.001,\ 1.0001,\ \cdots\cdots \qquad (1)$$

は1に収束し，数列

$$4.2,\ 4.02,\ 4.002,\ 4.0002,\ \cdots\cdots \qquad (2)$$

は4に収束する。

(1)の各項を3倍した数列をつくれば

$$3.3,\ 3.03,\ 3.003,\ 3.0003,\ \cdots\cdots$$

となり，これは $3\times1=3$ に収束する。

また，(1)，(2)の各項の和を項とする数列をつくれば

$$5.3,\ 5.03,\ 5.003,\ 5.0003,\ \cdots\cdots$$

となり，これは $1+4=5$ に収束する。

差，積，商についても同様のことが成り立つ。

〔I〕 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が収束して

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n=\beta$$

ならば

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} ka_n=k\alpha$ （k は定数）

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha+\beta$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\alpha-\beta$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n=\alpha\beta$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ （ただし $\beta\neq 0$）

極限の四則

上にあげた法則と

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

とを用いて，次のような問題を解くことができる。

例題 1 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+2}{n-1}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n^2-n+1}$