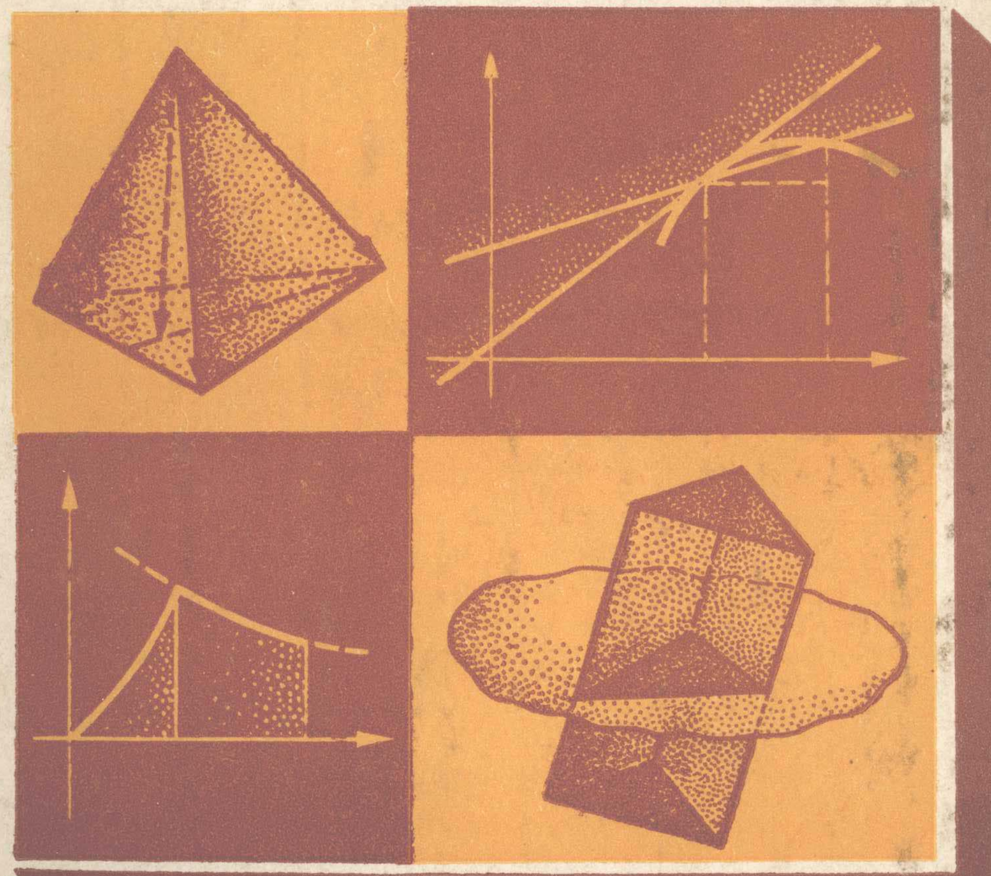
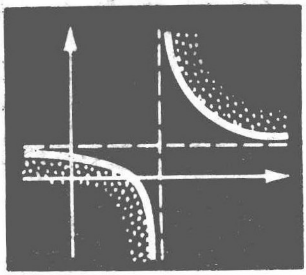
математика

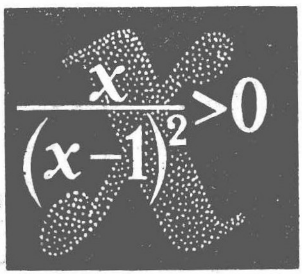
ПОСОБИЕ ДЛЯ ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫХ ОТДЕЛЕНИЙ

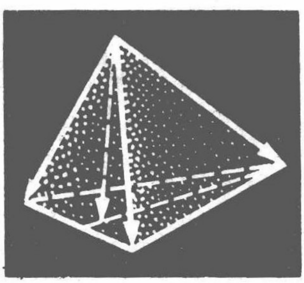
Пособие предназначено для слушателей подготовительных отделений вузов. Материал излагается с учетом новой школьной программы.



«ВИЩА ШКОЛА»




$\frac{x}{(x-1)^2}>0$



Математика

МАТЕМАТИКА

ПОСОБИЕ ДЛЯ ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫХ ОТДЕЛЕНИЙ

Под общей редакцией профессора
А. И. Бородина

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования УССР в качестве учебного пособия для слушателей подготовительных отделений вузов

КИЕВ
ГОЛОВНОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ «ВИЩА ШКОЛА»
1980

ББК 22.1я729
51
М34

УДК 51 (07)

Математика : Пособие для подготовительных отделений / Под общ. ред. проф. А. И. Бородина.— Киев: Вища школа. Головное изд-во, 1980. 280 с.— 20202; 1702000000.

Материал пособия изложен в соответствии с новой программой вступительных экзаменов в вузы, утвержденной в 1977 г. (вариант «А»).

Освещены логические и теоретико-множественные вопросы курса математики, вопросы арифметики и алгебры, изложены элементы анализа, а также основные разделы геометрии. Изложение теоретического материала сопровождается решениями примеров, имеется много задач для самостоятельного решения.

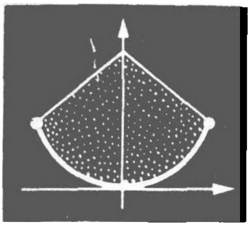
Пособие предназначено для слушателей подготовительных отделений и может быть использовано теми, кто самостоятельно готовится к вступительным экзаменам по математике в вузы, где не предъявляются повышенные требования по этому предмету.

Ил. 176

Авторский коллектив: **А. И. Бородин, В. Н. Бандура, А. И. Зинченко, В. М. Каменская, Ю. А. Палант, А. Я. Савченко**

Редакция литературы по математике и физике
Зав. редакцией *Е. Л. Корженевич*

М $\frac{20202\text{-}093}{\text{М}211(04)-80}$ 107—80. 1702000000.



Глава

I

СИМВОЛИКА. МНОЖЕСТВА

§ 1. НЕКОТОРЫЕ ПОНЯТИЯ И СИМВОЛЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Наша речь, устная и письменная, строится из предложений. Относительно некоторых из этих предложений можно сказать, истинны они или ложны, относительно других — нет. Так, предложение «простых чисел бесконечно много» — истинно, предложение «все треугольники равнобедренны» — ложно.

Предложение, относительно которого известно, истинно оно или ложно, называют ***высказыванием.***

Высказывание обозначают либо содержательным предложением, его составляющим («$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$»), либо заглавной буквой латинского алфавита A, B, C, D, X, Y, ...

Различают высказывания простые и составные. Нет формального определения того, какое высказывание следует считать простым, какое — составным, и для объяснения этих понятий приведем несколько примеров.

Примеры

1. Высказывание «Данное целое число или четное, или нечетное» — составное, оно образовано из двух простых высказываний «данное целое число четное» и «данное целое число нечетное», соединенных союзом «или». Составное высказывание истинно, одно из простых истинно, а второе — ложно.

2. Высказывание «Площадь круга радиуса r равна πr^2 и сутки состоят из 12 часов» составное, оно получено из двух простых высказываний — «Площадь круга радиуса r равна πr^2», «Сутки состоят из 12 часов» — с помощью союза «и». Составное высказывание ложно, так как первое из простых истинно, второе — ложно.

Таким образом, из двух данных высказываний A, B можно с помощью союзов «и», «или» образовывать новые высказывания «A и B», «A или B». При этом считается, что высказывание «A и B» истинно тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания; высказывание «A или B» истинно тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно из высказываний A или B.

Пример

Высказывание «Если диагонали данного выпуклого четырехугольника конгруэнтны, то этот четырехугольник — прямоугольник» есть пример составного высказывания: два простых высказывания «Диагонали данного выпуклого четырехугольника конгруэнтны» и «Этот (данный) четырехугольник — прямоугольник» соединены связкой «если..., то...». Составное высказывание истинно, если речь идет о прямоугольнике, и ложно, если, например, данный четырехугольник — равнобочная трапеция. В первом случае истинны все три высказывания — как составное, так и оба простых, во втором — истинно только первое из простых.

Из двух высказываний A и B можно образовать новое высказывание «если A, то B» («$A \Rightarrow B$»), которое ложно тогда и только тогда, когда A истинно, B ложно. *Высказывание «$A \Rightarrow B$» называется* ***импликацией.***

Образуем высказывание «$A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$». Мы получили новое *высказывание, которое обозначается* $A \Leftrightarrow B$ и *называется* ***эквиваленцией.*** Эквиваленция истинна тогда и только тогда, когда оба высказывания либо истинны, либо ложны одновременно. Заметим, что последнее утверждение есть следствие ранее принятых соглашений об истинности высказываний «A и B», «$A \Rightarrow B$» и поэтому нуждается в доказательстве. В обыденной речи эквиваленция выражается словами «тогда и только тогда», «если и только если», «необходимо и достаточно», «равносильно» ...

Рассмотрим теперь такие предложения: «Действительное (вещественное) число x иррационально», «Точка на координатной плоскости с координатами (x, y) лежит на прямой $2x + 3y = 1$». Являются ли они высказываниями? Нет, так как ничего нельзя сказать по поводу их истинности. Однако эти предложения становятся высказываниями, как только вместо x, (x, y) мы ставим конкретные объекты указанной в предложениях природы. Например, при $x = \sqrt{5}$ первое предложение становится истинным высказыванием, при $x = \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1}$ — ложным. Второе предложение в случае $(x, y) = (-1, 1)$ есть истинное, в случае $(x, y) = (2, 0)$ — ложное высказывание.

Пусть дано некоторое множество X с элементами $x \in X$.

Переменным высказыванием *над множеством X называется предложение об элементах множества X, $A(x)$, которое становится высказыванием всякий раз, когда вместо x в предложение подставляется конкретный элемент $x_0 \in X$.*

Пример

Предложение «x — действительное число, и $x^2 - 3x + 2 = 0$» есть переменное высказывание, истинное для $x = 1$ и $x = 2$, ложное для всех других действительных чисел.

Пусть дано два переменных высказывания $A(x)$ и $B(x)$ над одним и тем же множеством X. *Говорят, что $B(x)$* ***следует*** *из $A(x)$, если $B(x)$ истинно всякий раз, когда истинно $A(x)$, и обозначают*

$$A(x) \Rightarrow B(x).$$

При этом $B(x)$ есть **необходимое условие для** $A(x)$, а $A(x)$ — **достаточное условие для** $B(x)$.

Примеры

1. Шестизначный номер троллейбусного билета назовем «счастливым», если сумма трех первых цифр его равна сумме трех последних. Множество X есть множество всевозможных последовательностей из шести цифр, $A(x)$ — билет «счастливый»,

$B(x)$ — сумма цифр номера четная. Тогда $A(x) \Rightarrow B(x)$, так что для того чтобы номер был счастливым, необходимо, чтобы сумма цифр, его составляющих, была четной.

2. Пусть $X = \mathbf{R}$, $A(x)$ — «$x^2 < x + 1$», $B(x)$ — «$x < \sqrt{x+1}$». Поскольку $A(x)$ истинно для всех $x \in \left]\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[$, а $B(x)$ истинно для $x \in \left]-1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[$, то $A(x) \Rightarrow B(x)$.

3. Пусть $X = \mathbf{R}$, $C(x)$ — «$\sin x > 0$», $D(x)$ — «$0 < x < \pi$». Тогда из свойств функции $y = \sin x$ заключаем, что $D(x) \Rightarrow C(x)$, так что для того чтобы $\sin x$ было положительным числом, достаточно, чтобы $0 < x < \pi$.

Факт «следования» можно выразить также с помощью ранее введенной операции «импликации»: *если для всех x, при которых истинно высказывание $A(x)$, истинна импликация $A(x) \Rightarrow B(x)$, то $B(x)$ есть следствие $A(x)$.*

Если для двух высказываний $A(x)$ и $B(x)$ над одним и тем же множеством X верно $A(x) \Rightarrow B(x)$ и $B(x) \Rightarrow A(x)$, то такие два высказывания называют **эквивалентными** и обозначают

$$A(x) \Leftrightarrow B(x).$$

Говорят, что $A(x)$ есть ***необходимое и достаточное условие*** *для $B(x)$.*

Примеры

1. Пусть $X = \mathbf{N}$, $A(x)$ — «число x кратно 9», $B(x)$ — «сумма цифр числа x кратна 9». Тогда $A(x) \Leftrightarrow B(x)$, или, словесно: «Для того чтобы натуральное число было кратно 9, необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр его была кратна 9».

2. Пусть X — множество всех прямоугольных треугольников, $C(x)$ — «треугольник прямоугольный», $D(x)$ — «сумма квадратов длин двух сторон треугольника равна квадрату длины третьей его стороны». Тогда $C(x) \Leftrightarrow D(x)$. Следование $C(x) \Rightarrow D(x)$ составляет содержание теоремы Пифагора, $D(x) \Rightarrow C(x)$ есть теорема, обратная теореме Пифагора, ее справедливость можно установить, пользуясь, например, теоремой косинусов.

Рассмотрим, наконец, еще два способа образования высказываний, исходя уже из переменного высказывания.

Пусть $A(x)$ — переменное высказывание над множеством X.

Можно образовать такие два новых высказывания: «Для всех $x \in X$ $A(x)$ истинно» и «Существует такое $x \in X$, что $A(x)$ истинно». Соответствующие символические обозначения таковы: $\forall (x \in X)\ A(x)$, $\exists (x \in X)\ A(x)$. Первое из них истинно тогда и только тогда, когда $A(x)$ истинно для всех $x \in X$, второе истинно тогда и только тогда, когда $A(x)$ истинно хотя бы для одного элемента $x \in X$.

Знак $\forall$ называют **квантором общности** и читают «**для всех**», «**для любого**», «**для каждого**», ...; знак $\exists$ называют **квантором существования** и читают «**существует**», «**есть**», «**найдется**», ...

Примеры

1. Высказывание «Сумма углов любого треугольника равна 180°» можно с помощью квантора $\forall$ записать так: $\forall\ (\triangle ABC)\ (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°)$. Это — истинное высказывание.

2. Высказывание «Для любого $x \in \mathbf{R}$ верно $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{4}{\sin^2 2x}$» можно записать:

$$\forall\ (x \in \mathbf{R}) \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{4}{\sin^2 2x} \right).$$

Это высказывание ложное. Высказывание

$$\forall \left(x \in \mathbf{R},\ x \neq \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z} \right) \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{4}{\sin^2 2x} \right)$$

истинное.

3. Высказывание «Уравнение $x^2 + 5x + 6 = 0$ имеет действительные корни» можно записать с помощью квантора $\exists$:

$$\exists\ (x \in \mathbf{R})\ (x^2 + 5x + 6 = 0).$$

Это истинное высказывание.

4. Высказывание $\exists\ (x \in Q)\ (x^2 = 2)$ ложное, а $\forall\ (x \in Q)\ (x^2 \neq 2)$ — истинное.

5. Высказывание «Число a есть предел последовательности (x_n)» с помощью кванторов можно записать так:

$$\forall\ (\varepsilon \in \mathbf{R},\ \varepsilon > 0)\ \exists\ (n_0,\ n_0 \in \mathbf{N})\ \forall\ (n \in \mathbf{N},\ n \geqslant n_0)\ (|x_n - a| < \varepsilon).$$

Упражнения

1. В написанных ниже предложениях вместо многоточия вставить одно из слов «необходимо», «достаточно», «необходимо и достаточно»:

а) для того чтобы сумма двух целых чисел была кратна 3, ..., чтобы каждое из них было кратно 3;

б) для того чтобы из отрезков a, b, c можно было составить треугольник, ..., чтобы выполнялось неравенство $a < b + c$;

в) для того чтобы функция $y = \arcsin\ (1 + x^2)$ была определена в точке x, ..., чтобы $x = 0$;

г) для того чтобы натуральное число было квадратом нечетного числа, ..., чтобы оно представлялось в виде разности квадратов двух целых чисел;

д) для того чтобы было выполнено неравенство $\log_{\frac{1}{3}} \frac{x+4}{2x-3} < \log_{\frac{1}{3}} (8 - x)$ для $x \in \mathbf{R}$, ..., чтобы было выполнено одно из двух неравенств: $8 > x > 7$ либо $\frac{3}{2} < x < 2$;

е) для того чтобы существовал предел суммы двух последовательностей, ..., чтобы существовали пределы каждой из них.

Ответ. а) достаточно; б) необходимо; в) необходимо и достаточно; г) необходимо; д) необходимо и достаточно; е) достаточно.

2. С помощью кванторов записать следующие высказывания и установить их истинность или ложность:

а) для любых двух простых чисел p и q, больших 3, $p^2 - q^2$ кратно 24;

б) для любого натурального n

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2};$$

в) любое целое число, кратное 4, заканчивается двумя нулями;

г) уравнение $x^2 - 3y^2 = 17$ имеет решение в целых числах;

д) число 2 не является пределом последовательности $\left(\frac{n}{2n+1}\right)$.

Ответ. а) $\forall\ (p, q$: p, q — простые числа, $p > 3$, $q > 3)$ $\exists\ (k : k \in \mathbf{Z})$ $(p^2 - q^2 = 24k)$; истинно.

б) $\forall\ (n\colon\ n \in \mathbf{N}) \left(1^2 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}\right)$; истинно.

в) $\forall\ (n\colon n \in \mathbf{Z};\ n = 4k,\ k \in \mathbf{Z})\ (n = 100m,\ m \in \mathbf{Z})$; ложно.

г) $\exists\ (x,\ y\colon x \in \mathbf{Z},\ y \in \mathbf{Z})\ (x^2 - 3y^2 = 17)$; ложно.

д) $\exists\ (\varepsilon \in \mathbf{R},\ \varepsilon > 0)\ \forall\ (n_0,\ n_0 \in \mathbf{N})\ \exists\ (n,\ n \in \mathbf{N},\ n > n_0)\left(\left|2 - \frac{n}{2n+1}\right| > \varepsilon\right)$; истинно.

§ 2. МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

В математике имеется ряд изначальных, неопределяемых понятий, таких как точка, прямая, плоскость, натуральное число, представление о которых может дать лишь многовековой опыт человека. Множество — пример еще одного такого понятия. В обыденной речи мы часто употребляем синонимы слова «множество»: стая, совокупность, класс и т. д.

Множества обозначают заглавными буквами латинского алфавита: A, B, C, ... с индексами или без них. Задать множество можно двумя способами: либо перечислить все объекты, входящие в него, либо указать некоторый характерный признак P, который обладает свойством исключенного третьего: о любом объекте можно сказать, обладает он этим признаком или нет. Объект, состоящий в списке (при первом способе задания множества), либо обладающий признаком (при втором), называется элементом множества. Элементы множеств обозначают малыми латинскими буквами a, b, c, ..., y, z в случае, если речь идет о множествах вообще, или же за ними сохраняют конкретные обозначения, если природа множества четко определена. Тот факт, что элемент a принадлежит множеству A, записывают так: $a \in A$ (читают: «a принадлежит A»), если же b не есть элемент B, то пишут $b \notin B$ (читают «b не принадлежит B»).

При первом способе задания множества пользуются такой записью: $M = \{a, b, c, ..., f\}$, при втором: $M = \{x \mid P(x)\}$ (множество всех объектов x, обладающих свойством P). Следует заметить, что одно и то же множество может быть задано различными способами. Так, например, множество $M = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ можно задать и так: $M = \{x \mid x$ — натуральное число, делитель числа $18\}$ (здесь свойство P состоит в том, что объект есть натуральное число, на которое делится 18).

Для обозначения некоторых множеств, элементами которых являются числа либо пары чисел, применяют стандартные обозначения, данные, например, в книге «Алгебра и начала анализа. Учебное пособие для 10 класса средней школы», М., Просвещение, 1977 г., с. 269. Приведем еще примеры множеств, встречающихся в школьном курсе математики.

$L = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ ax + by = c\}$ — прямая линия;

$M = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ ax + by \leqslant c\}$ — полуплоскость, содержащая начало координат, если $c \geqslant 0$;

$C = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\}$ — окружность с центром в точке (a, b) радиуса $|r|$;

$S = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ (x - a)^2 + (y - b)^2 \leqslant r^2\}$ — круг с центром в точке (a, b) радиуса $|r|$, которому принадлежат все точки окружности;

$$F = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ y = f(x),\ x \in D(f)\}$$ — график функции $y = f(x)$ с областью определения $D(f)$.

Среди всех множеств выделяют одно — так называемое пустое множество,— не содержащее ни одного элемента. Так, например, множество $\{x \mid x \in \mathbf{R},\ x^2 + x + 1 = 0\}$ пусто, так как нет ни одного действительного числа, для которого равенство $x^2 + x + 1 = 0$ было бы верным. Пустое множество обозначают знаком $\varnothing$.

Если каждый элемент множества A является в то же время элементом множества B, то говорят, что A есть подмножество множества B.

Пример

Пусть

$$A = \{x \mid x \in \mathbf{R},\ x^2 - 3x + 2 = 0\}, \quad B = \{x \mid x \in \mathbf{R},\ |x - 2| + |x + 2| = 4\},$$

тогда

$$A = \{1, 2\}, \quad B = [-2, 2] \quad \text{и} \quad A \subset B.$$

Принято считать, что $\varnothing$ есть подмножество любого множества.

Если одновременно $A \subset B$ и $B \subset A$, то говорят, что множества A и B равны ($A = B$).

Пример

Множества

$$A = \{x \mid x \in \mathbf{R},\ x^2 - 3x + 2 = 0\} \quad \text{и} \quad B = \{x \mid x \in \mathbf{N},\ x \text{ — делитель } 2\}$$

равны.

Отметим, что свойство равенства множеств обладает важным свойством транзитивности, т. е. из того, что $A = B$, $B = C$, следует, что $A = C$.

В самом деле, имеем $A \subset B$, $B \subset C \Rightarrow A \subset C$. Обратно, $C \subset A \Rightarrow$ $\Rightarrow A = C$.

Решение уравнения, неравенства, системы уравнений либо неравенств состоит в отыскании множества всех действительных чисел или пар действительных чисел, удовлетворяющих некоторому характерному признаку: при решении уравнения или системы уравнений этим признаком является верное равенство между двумя или несколькими числами; при решении неравенства или системы неравенств — верные числовые неравенства.

В процессе решения выполняют различные преобразования и получают новые неравенства, уравнения, системы неравенств и уравнений. Очень важно при этом (особенно при решении неравенств), чтобы множества решений исходных и преобразованных уравнений и неравенств были равны.

Уравнения, системы уравнений, неравенства, системы неравенств, системы уравнений и неравенств называются эквивалентными (равносильными), если множества их решений равны.

Рассмотрим несколько примеров.

Примеры

1. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+2x+1}=2,$$

т. е. найти множество

$$A=\{x\mid x\in\mathbf{R},\ \sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+2x+1}=2\}.$$

Заметим, что

$$B=\{x\mid x\in\mathbf{R},\ (x-1)+(x+1)=2\}\subset A,$$

так как

$$B=\{1\},\quad \{1\}\in A.$$

В то же время множества A и C, где

$$C=\{x\mid x\in\mathbf{R},\ |x-1|+|x+1|=2\},$$

равны, так как $\sqrt{x^2\pm 2x+1}=|x\pm 1|$.

Поэтому исходное уравнение эквивалентно такому: $|x-1|+|x+1|=2$, решением которого есть множество $[-1;\ 1]$.

2. Решить уравнение $x=\sqrt{x+1}$.

Решение. Сравним множества

$$A=\{x\mid x\in\mathbf{R},\ x=\sqrt{x+1}\}\quad \text{и}\quad B=\{x\mid x\in\mathbf{R},\ x^2=x+1\}.$$

Поскольку

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}\in B,\quad \frac{1-\sqrt{5}}{2}\notin A,\quad \frac{1+\sqrt{5}}{2}\in B,\quad \left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}=A,$$

то $A\subset B$.

3. Решить неравенство $x<\sqrt{x+1}$.

Решение. Сравним множества

$$C=\{x\mid x\in\mathbf{R},\ x<\sqrt{x+1}\}\quad \text{и}\quad D=\{x\mid x\in\mathbf{R},\ x^2<x+1\}.$$

В силу того что

$$C=\left[-1;\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[;\quad D=\left]\frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[,$$

то $D\subset C$.

Анализ последних двух примеров приводит к такому выводу: и в том и в другом случае возведение в квадрат обеих частей уравнения либо неравенства является неэквивалентным преобразованием, так как множества решений до и после преобразования не равны между собой. В случае уравнения множество решений преобразованного уравнения шире исходного, в случае неравенства — уже.

Над множествами можно производить различные операции, определения которых мы и рассмотрим ниже.

Объединением множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называют множество B, состоящее из тех и только тех элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Тот факт, что B есть объединение $A_1, A_2, \ldots, A_n$, записывают так:

$$B=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n.$$

Иными словами, каждый элемент, входящий в объединение множеств, обладает хотя бы одним из свойств, характеризующих объединяемые множества.

Пример

Доказать, что если $A \subset B$, то $A \cup B = B$.

Доказательство. Пусть $a \in A \cup B$. Тогда либо $a \in A$, либо $a \in B$. Поскольку $A \subset B$, то в обоих случаях $a \in B$. Следовательно, $A \cup B \subset B$. Поскольку, с другой стороны, $A \cup B \supset B$, то $A \cup B = B$.

Понятие объединения множеств используется при решении уравнений и неравенств.

Примеры

1. Решить уравнение

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2.$$

Решение. Пользуясь формулой $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$, приводим исходное уравнение к эквивалентному

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = 0.$$

Группируя затем первые два и последние два слагаемых, получим

$$\cos x \cos 2x \cos 5x = 0.$$

Поскольку для того чтобы произведение нескольких чисел было равно нулю, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы одно из них было равно нулю; получаем множество всех решений исходного уравнения в виде объединения трех множеств:

$$\left\{x \mid x = \frac{(2n+1)\pi}{2},\ n \in \mathbf{Z}\right\},$$

$$\left\{x \mid x = \frac{(2k+1)\pi}{4},\ k \in \mathbf{Z}\right\},$$

$$\left\{x \mid x = \frac{(2m+1)\pi}{10},\ m \in \mathbf{Z}\right\}.$$

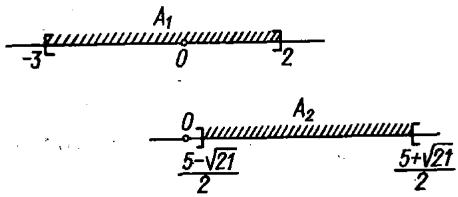


Рис. 1

Учитывая, что

$$\left\{x \mid x = \frac{(2n+1)\pi}{2},\ n \in \mathbf{Z}\right\} \subset \left\{x \mid x = \frac{(2m+1)\pi}{10},\ m \in \mathbf{Z}\right\},$$

получаем окончательно множество всех решений исходного уравнения

$$\left\{x \mid x = \frac{(2m+1)\pi}{10},\ m \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{x \mid x = \frac{(2k+1)\pi}{4},\ k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

2. Решить неравенство

$$\sqrt{x+3} > x - 2.$$

Решение. Множеством решений этого неравенства является объединение решений двух таких систем неравенств:

$$\begin{cases} x + 3 \geqslant 0, \\ x - 2 < 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x - 2 \geqslant 0, \\ x + 3 > (x-2)^2. \end{cases}$$

Это означает, что множество решений неравенства представимо в виде объединения двух множеств

$$A_1 = [-3,\ 2[\quad \text{и} \quad A_2 = \left]\frac{5-\sqrt{21}}{2},\ \frac{5+\sqrt{21}}{2}\right[.$$

Для нахождения объединения этих множеств целесообразно использовать геометрическую интерпретацию, изобразив множества на числовой прямой (рис. 1).

Теперь можно сказать, что множество решений данного неравенства есть $\left[-3, \frac{5+\sqrt{21}}{2}\right[$.

Введем еще одну операцию над множествами.

Пересечением множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *называется множество* B, *состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат всем множествам* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *одновременно.*

То, что B есть пересечение $A_1, A_2, \ldots, A_n$, записывают так:

$$B = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n.$$

Пересечение множеств можно определить так же, как множество всех объектов, каждый из которых обладает всеми свойствами, определяющими пересекаемые множества.

Если $A \cap B = \varnothing$, то говорят, что множества A и B не пересекаются.

При решении уравнений, неравенств, систем уравнений и неравенств часто приходится находить пересечения некоторых множеств.

Примеры

1. Решить уравнение

$$\log_{\sin x}\left(\sin x - \frac{1}{4}\cos x\right) = 3.$$

Здесь речь идет о нахождении пересечения двух множеств

$$A_1 = \{x \mid x \in \mathbf{R},\ \sin x > 0,\ \sin x \neq 1\} \text{ и } A_2 = \left\{x \mid x \in \mathbf{R},\ \sin x - \frac{1}{4}\cos x = \sin^3 x\right\}.$$

Решая соответствующие неравенство и уравнение, находим

$$A_1 = \{x \mid 2\pi n < x < \pi(2n+1),\ n \in \mathbf{Z}\},$$

$$A_2 = \left\{x \mid x = (-1)^m \frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{2},\ m \in \mathbf{Z}\right\}.$$

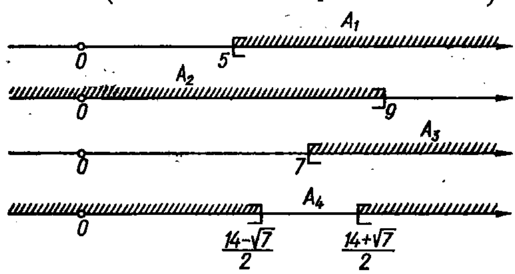


Рис. 2

Пересечение этих множеств и есть множество решений исходного уравнения

$$A_1 \cap A_2 = \left\{x \mid x = \frac{(24m+1)\pi}{12},\ m \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{x \mid x = \frac{(24m+5)\pi}{12},\ m \in \mathbf{Z}\right\}.$$

2. Решить неравенство

$$\sqrt{x-5} - \sqrt{9-x} \geqslant 1.$$

Решение. Найдем пересечение следующих четырех множеств (рис. 2):

$$A_1 = \{x \mid x \in \mathbf{R},\ x - 5 \geqslant 0\}, \quad A_2 = \{x \mid x \in \mathbf{R},\ 9 - x \geqslant 0\},$$

$$A_3 = \{x \mid x \in \mathbf{R},\ \sqrt{x-5} - \sqrt{9-x} > 0\}, \quad A_4 = \{x \mid x \in \mathbf{R},\ 4x^2 - 56x + 189 \geqslant 0\}.$$

Искомое пересечение, а следовательно, и решение неравенства есть множество

$$\left[\frac{14+\sqrt{7}}{2},\ 9\right].$$

3. Изобразить на числовой плоскости множество точек (x, y), координаты которых удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\begin{cases} y+x-3 \leqslant 0, \\ y-2x+3 > 0, \\ 2y-x-3 \leqslant 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Пересечением полуплоскостей, соответствующих множествам

$$A_1 = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ y+x-3 \leqslant 0\},$$
$$A_2 = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ y-2x+3 > 0\},$$
$$A_3 = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ 2y-x-3 \leqslant 0\},$$

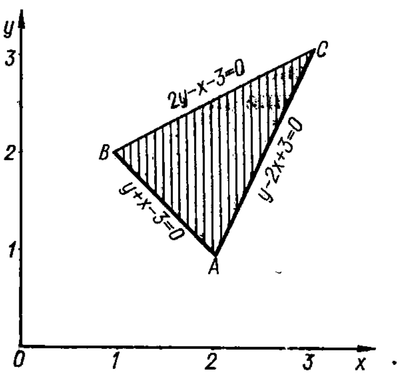


Рис. 3

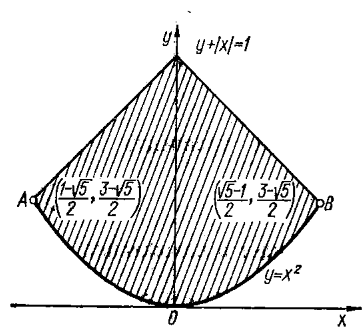


Рис. 4

является внутренняя область треугольника ABC, где A (2, 1); B (1, 2); C (3, 3), включая и стороны $[AB]$ и $[AC]$ (рис. 3).

4. Изобразить на числовой плоскости множество точек, координаты которых (x, y) удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\begin{cases} y \geqslant x^2; \\ y + |x| \leqslant 1. \end{cases}$$

Все точки, удовлетворяющие первому неравенству, находятся над графиком параболы $y = x^2$ или на самом графике. Второму неравенству удовлетворяют все точки, лежащие внутри и на сторонах угла 90° с вершиной в точке (0,1), биссектриса этого угла совпадает с осью ординат (рис. 4).

Замечание. Отметим, что при решении многих уравнений и неравенств, систем уравнений и неравенств приходится пользоваться как пересечениями, так и объединениями. При этом часто бывает полезным такое м н е м о н и ч е с к о е п р а в и л о: *там, где в процессе решения имеет место тот или иной случай, следует пользоваться объединением множеств; там же, где одновременно должны выполняться и один, и другой, ... варианты,— пользуются пересечением.* Можно составить такой «словарь»: или — *о б ъ е д и н е н и е* ($\cup$), и — п е р е с е ч е н и е ($\cap$).

Пример

Решить неравенство

$$\log_x\left(2x - \frac{3}{4}\right) > 2.$$

Решение. Поскольку свойства монотонности логарифмической функции зависят от величины основания, то рассматривают два случая: указанное неравенство может иметь место при $0 < x < 1$ или при $x > 1$. Поэтому решение заданного неравенства можно получить объединением решений двух таких систем неравенств:

$$\begin{cases} 0 < x < 1, \\ 2x - \frac{3}{4} > 0, \\ 2x - \frac{3}{4} < x^2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x > 1, \\ 2x - \frac{3}{4} > 0, \\ 2x - \frac{3}{4} > x^2. \end{cases}$$

Решениями этих систем являются соответственно множества

$$A_1 = \left\{x \mid x \in \mathbf{R},\ \frac{3}{8} < x < \frac{1}{2}\right\},$$

$$A_2 = \left\{x \mid x \in \mathbf{R},\ 1 < x < \frac{3}{2}\right\};$$

а решением заданного неравенства есть

$$A_1 \cup A_2 = \left]\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right[\cup \left]1, \frac{3}{2}\right[.$$

§ 3. МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

Задача

Найти сумму n первых нечетных натуральных чисел.

Решение. Заметим, что

$$S_1 = 1 = 1^2,$$
$$S_2 = 1 + 3 = 4 = 2^2,$$
$$S_3 = 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2,$$
$$S_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2,$$
$$S_5 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2.$$

На основании этих равенств приходим к общему выводу:

$$S_n = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = n^2. \qquad (1)$$

Такой переход от частного к общему называется индукцией.

Индукция называется полной, если наблюдения охватывают все факты, на которые распространяется вывод. Например, рассматривая первые двадцать натуральных чисел, заключаем: все числа первых двух десятков, оканчивающиеся четной цифрой, делятся на 2.

Индукция называется неполной, если наблюдения охватывают только часть фактов, на которые распространяется вывод.

Так, вывод (1) сделан с помощью неполной индукции.

Выводы, сделанные с помощью неполной индукции, могут оказаться ошибочными. Например, нетрудно доказать, что $n^3 - n$ делится на 3, $n^5 - n$ делится на 5, $n^7 - n$ делится на 7. Напрашивается вывод: числа вида $n^k - n$ при нечетном k и любом натуральном n делятся на k. Это предположение неверно. (Такое предположение сделал немецкий математик Лейбниц, но вскоре обнаружил, что $2^9 - 2 = 510$ не делится на 9).

Неполная индукция наводит на мысль о том, каким может оказаться решение, т. е. позволяет прийти к гипотезе, но не заменяет строгого доказательства и, как показывает приведенный выше пример, может привести к неверному результату.

Часто при некоторых доказательствах, например при выводе формул общего члена арифметической и геометрической прогрессий, применяют метод неполной индукции. Такое доказательство нельзя считать полноценным.

Выводы, сделанные в результате неполной индукции, т. е. в ряде наблюдений, иногда доказываются с помощью метода математической индукции.

Применение этого метода основано на принципе (аксиоме) математической индукции.

Утверждение $A(n)$ выполняется для любого натурального n, если:

I. *Утверждение $A(n)$ выполняется при $n = 1$.*

II. *Каким бы ни было натуральное k, из справедливости утверждения при $n = k$ вытекает его справедливость при $n = k + 1$.*

Доказательство методом математической индукции состоит из двух частей:

I. *Проверка истинности высказывания $A(1)$.*

II. *Доказательство того, что для любого натурального n из справедливости утверждения при $n = k$ вытекает его справедливость при $n = k + 1$, т. е. $A(k) \Rightarrow A(k+1)$.*

Обе части доказательства по индукции существенны. Наличие лишь одной из них не обеспечивает правильности утверждения.

Примеры

1. Доказать, что сумма n первых чисел натурального ряда равна

$$\frac{n(n+1)}{2}.$$

Доказательство

I. Проверяем справедливость равенства при $n = 1$:

$$S_1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1, \quad 1 = 1.$$

II. Допустим, что утверждение справедливо при $n = k$, т. е. $S_k = \dfrac{k(k+1)}{2}$, и докажем, что $A(k) \Rightarrow A(k+1)$, т. е. $S_{k+1} = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$. Действительно, $S_{k+1} = S_k + (k+1)$, или $S_{k+1} = \dfrac{k(k+1)}{2} + (k+1)$, $S_{k+1} = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Следовательно, по принципу математической индукции рассматриваемое утверждение справедливо для любого натурального n.

2. Доказать, что

$$\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{3}{5 \cdot 7 \cdot 9} + \cdots + \frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}.$$