

О. А. Михайлов

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
СТАТИСТИКА
и ЛИНЕЙНОЕ
ПРОГРАММИРОВАНИЕ
В ЧЕРНОЙ МЕТАЛЛУРГИИ**

МЕТАЛЛУРГИЗДАТ · 1961

О. А. МИХАЙЛОВ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА И ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ В ЧЕРНОЙ МЕТАЛЛУРГИИ



ГОСУДАРСТВЕННОЕ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛИТЕРАТУРЫ ПО ЧЕРНОЙ И ЦВЕТНОЙ МЕТАЛЛУРГИИ
Москва 1961

АННОТАЦИЯ

В книге изложены краткие сведения по основам теории вероятностей и математической статистики, а также дано представление о методах линейного программирования, позволяющих отыскивать оптимальное решение различных производственных задач.

Приведены примеры конкретного применения методов математической статистики и линейного программирования в черной металлургии. Дано описание исследований в области доменного, сталеплавильного и прокатного производства, проведенных методами множественной корреляции и дисперсионного анализа.

Рассмотрены методы статистического контроля металлургического производства.

Книга рассчитана на инженеров предприятий черной металлургии, работников научно-исследовательских и проектных институтов, а также может быть полезной для студентов металлургических высших учебных заведений.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	4
Введение	6
I. Краткие сведения из теории вероятностей и математической статистики	13
1. Основные положения теории вероятностей	13
2. Ряды распределения и их основные характеристики	20
3. Понятие о законе распределения случайной величины	46
4. Дисперсионный анализ	49
5. Корреляционный анализ	54
II. Исследования методами множественной корреляции	65
1. Доменное производство и подготовка сырья	65
2. Сталеплавильное производство	77
3. Прокатное производство	92
III. Исследования методами дисперсионного анализа	99
IV. Статистические методы контроля производства	106
V. Линейное программирование	121
1. Метод разрешающих множителей	134
2. Симплекс-метод	140
3. Графический метод	145
4. Распределительный (транспортный) метод	147
<i>Приложение I</i>	157
<i>Приложение II.</i>	158
Литература	159

ПРЕДИСЛОВИЕ

За последние годы методы математической статистики получают все более широкое распространение в черной металлургии.

Они позволяют установить количественную меру зависимости между изучаемыми производственными факторами, которую очень часто другими методами установить невозможно, в частности при анализе показателей работы доменных, сталеплавильных и прокатных цехов. Детально разработанные и весьма эффективные статистические методы получают все большее применение в области контроля производства и качества продукции на заводах черной металлургии.

Наряду с этим все большее значение приобретают методы линейного программирования, являющегося новым разделом прикладной математики. Методы эти, получившие распространение сравнительно недавно, дают возможность определить оптимальный состав шихты, установить оптимальную программу загрузки металлургических агрегатов (в частности, прокатных станов), наиболее рациональный раскрой проката, а также найти наиболее целесообразный в экономическом отношении вариант транспортных перевозок сырья, топлива и готовой продукции.

В свете задач, поставленных XXI съездом КПСС, июньским (1959 г.) и июльским (1960 г.) Пленумами ЦК КПСС о дальнейшем техническом прогрессе в период развернутого строительства коммунистического общества и значительном увеличении производства черных металлов, научные исследования, проводимые методами математической статистики, в ближайшие годы должны получить еще более широкое развитие. Ввиду этого очевидна необходимость ознакомления инженерно-технических работников металлургических заводов и научно-исследовательских институтов с основами математической статистики и методами статистических исследований. В течение семилетки получат также распространение математические методы в экономическом анализе и планировании.

Данная книга посвящена вопросам применения математической статистики и линейного программирования в черной ме-

таллургии¹, в ней дается также элементарное изложение основ теории вероятностей и математической статистики.

Книга предназначена для ознакомления инженеров металлургических предприятий и работников научно-исследовательских и проектных институтов с применением математической статистики в черной металлургии и с ее элементарными основами, а также с вопросами линейного программирования.

Книга будет также полезна и для студентов металлургических вузов.

Автор выражает благодарность заслуженному деятелю науки проф. Б. С. Ястремскому, проф. А. Я. Боярскому, докт. физико-математических наук А. Л. Брудно, доц. А. М. Длину, доц. Н. С. Райбману, канд. эконом. наук Е. В. Гохман, инж. Ю. М. Булавко и редактору книги С. П. Гарецкому за ряд ценных замечаний и помощь, оказанную ими автору при подготовке книги к изданию.

¹ По первоначальному замыслу она намечалась как часть общего труда «Применение вычислительной техники в черной металлургии», разделенного впоследствии на две части. Одной из этих частей является данная книга, а другой — книга, посвященная вопросам управления металлургическими агрегатами (А. Б. Челюсткин. Применение вычислительной техники для управления металлургическими агрегатами. Металлургиздат, 1960 г.).

ВВЕДЕНИЕ

Математическая статистика, являющаяся одним из разделов прикладной математики, изучает закономерности массовых, повторяющихся явлений, процессов и событий. За последние годы методы статистического анализа, тесно связанные с теорией вероятностей, получили особенно широкое применение.

Это объясняется, в частности, тем, что практическое применение методов статистического анализа требует довольно громоздких вычислений, что еще в недалеком прошлом было серьезным препятствием на пути их распространения в промышленности.

В настоящее время благодаря большим успехам, достигнутым вычислительной техникой, такие вычисления не связаны со сколько-нибудь значительными трудностями.

Возникновение и разработка основных положений математической статистики связаны с работами ученых: Бернулли, Лапласа, Пуассона, Чебышева, Маркова, Ляпунова, Остроградского, Пирсона, Фишера и др.

Советская школа теории вероятностей представлена крупнейшими учеными С. Н. Бернштейном, А. Н. Колмогоровым, А. Я. Хинчиным, Б. В. Гнеденко, В. И. Романовским, Н. В. Смирновым, Б. С. Ястремским и др.

Различные приемы и методы прикладной математики во время второй мировой войны в США считались секретными и были опубликованы лишь после ее окончания. В то же время столь эффективные способы интенсификации металлургических процессов, как применение кислорода в сталеплавильном производстве или повышенного давления газа под колошником доменных печей, описывались открыто. Это свидетельствует о том большом значении, которое придается за рубежом возможности широкого практического применения данной науки.

Задачи современной математической статистики далеко выходят за рамки того узкого представления, которое иногда отождествляет термин «статистика» с набором таблиц и диаграмм, иллюстрирующих логические рассуждения.

Задача математической статистики, основанной на применении теории вероятностей, заключается в изучении объективных

связей и зависимостей между явлениями там, где ввиду сложности этих явлений обычные методы математического анализа неприменимы.

Особенно эффективным для исследовательских целей является метод множественной корреляции, дающий возможность изучения связи между многими величинами или элементами производственных процессов.

Применение этого метода позволяет установить количественную зависимость изучаемых показателей, например производительности металлургических агрегатов от состава шихты, физических свойств и химического состава сырых материалов, температуры процесса и пр.

Общеизвестно, что содержание углерода в ванне мартеновской печи по расплавлению шихты оказывает существенное влияние на продолжительность плавки. Однако в тех случаях, когда недостаточно только знать о наличии такой зависимости, но нужно найти ее количественную меру, следует применить метод множественной корреляции. В этом случае при определении зависимости производительности печи от изменения изучаемого фактора (например, от содержания углерода в ванне по расплавлению шихты) учитывается влияние и других многочисленных факторов.

На одном из металлургических заводов при помощи метода множественной корреляции изучалась зависимость часовой производительности мартеновской печи от ряда факторов. При этом на основании исследования 357 плавов было установлено, что такие факторы, как процент лома, руды и холодного чугуна в шихте вместе взятые объясняют не более 9,9% всех колебаний часовой производительности печи, а влияние одного такого фактора, как содержание углерода в металле по расплавлению, характеризуется соответственно цифрой 22%.

Этот результат, полученный при помощи математической статистики, представляет большой интерес: существенное значение данного фактора было общеизвестным, однако количественную оценку его влияния другими методами получить не удалось.

Наряду с этим заслуживает внимания проведенное методом множественной корреляции изучение зависимости расхода кокса в доменных печах от ряда показателей. В основу исследования были приняты данные о работе 70 доменных печей за период более четырех лет (300 пече-лет), а за единицу статистических наблюдений — показатели работы каждой из доменных печей за один месяц.

В качестве факторов, от которых зависит расход кокса, вначале было взято 300 различных переменных, которые впоследствии были сведены к 50 укрупненным показателям (содержание углерода в коксе, серы в железосодержащей части шихты, доля

агломерата и рудной мелочи в шихте и др.). В конечном счете было получено уравнение, выражающее количественную зависимость удельного расхода кокса от 15 основных факторов.

В результате исследования было установлено, что увеличение доли агломерата в шихте со 150 до 200 кг на 1 т чугуна за счет соответствующего снижения доли железной руды приводило при определенных условиях работы доменных печей к уменьшению удельного расхода кокса примерно в количестве 5 кг/т, и наоборот, увеличение доли мелочи в рудной части шихты на 50 кг/т влекло за собой повышение расхода кокса в среднем на 3 кг/т.

Из опыта работы предприятий также известно, что применение методов математической статистики в ряде случаев позволило определить причины брака металла.

В черной металлургии выявление действительных причин брака иногда бывает связано со значительными трудностями. В отдельных случаях среди производственников возникают дискуссии, где высказывается большое количество субъективных мнений и теорий, иногда недостаточно подтверждаемых объективными данными.

С этой точки зрения заслуживают внимания результаты статистического исследования, проведенного на одном из металлургических заводов с целью определения причин повышенного брака и низкого выхода первого сорта стали.

Исследование методами множественной корреляции показало существенное влияние (с вероятностью более 0,95) на качество металла трех факторов: температуры стали при выпуске из печи, продолжительности разливки и температуры прокатки слитков на заготовочном стане. В связи с этим было рекомендовано повысить температуру выпуска стали, сократить продолжительность ее разливки и снизить температуру прокатки.

При обсуждении результатов исследования они вызвали сомнения у некоторых инженерно-технических работников цеха, так как отчасти противоречили установившемуся опыту работы. В связи с этим была подвергнута статистическому анализу еще одна выборка из 37 других плавок стали той же марки и выводы, сделанные при первом исследовании, подтвердились. В дальнейшем в технологию выплавки стали были внесены соответствующие изменения, давшие положительные результаты.

Все же эффективность применения математической статистики для многих работников цеха была неожиданностью, о чем свидетельствует высказывание одного опытного сталеплавателя: «не думал, что мне в мои старые годы покажут интегралы, как нужно варить сталь».

Применение методов математической статистики при проведении научно-исследовательских работ открывает новые возможности. Обычно в производственных условиях стремятся изучать какой-либо из рассматриваемых показателей (коэффициент ис-

пользования полезного объема доменной печи или съем стали с 1 м² площади пода мартеновской печи), зависящий от большого количества различных факторов, путем поочередного изменения одного из факторов, тогда как все остальные по возможности сохраняются неизменными (так называемое исследование при «прочих равных условиях»). В тех случаях, когда исследования проводят при большом количестве влияющих факторов, количество экспериментов приходится резко увеличивать. Такие эксперименты часто сопровождаются снижением производительности агрегатов из-за необходимости искусственно изменять некоторые параметры для создания прочих равных условий.

Помимо этого, изменение одного фактора при постоянных других факторах в условиях производства не всегда возможно. Так, например, как указывает профессор А. Д. Готлиб «При изучении влияния нагрева дутья на расход кокса трудно создать такие условия, чтобы доменная печь в течение достаточно длительного отрезка времени работала при методически меняющемся нагреве дутья, но при неизменных прочих равных условиях...»¹.

Использование же метода множественной корреляции позволяет при наличии зависимости между несколькими переменными оценивать связь между двумя величинами, исключая влияние остальных переменных, математически, путем вычисления так называемого частного коэффициента корреляции.

Таким образом, используя методы математической статистики, в ряде случаев можно быстро и точно установить степень влияния того или иного технологического фактора на изменение производственных показателей.

Однако следует иметь в виду, что приемы статистической обработки не должны доминировать над инженерным анализом исследуемых проблем и для правильного их применения необходимы знания соответствующей области техники, в частности металлургического производства.

Применение математической статистики получает все большее распространение в области контроля производства и качества продукции. С этой целью в различных цехах металлургических предприятий заполняют контрольные статистические карты.

На ряде заводов по всем основным переделам производится статистический контроль сырья и готовой продукции с помощью графиков, которые показывают ежесуточные отклонения изучаемых показателей от среднесуточных и среднемесячных величин. Ведутся ежесуточные и ежесуточные контрольные диаграммы, учитывающие такие показатели, как выход годных слябов и из-

¹ А. Д. Готлиб. Некоторые вопросы применения математической статистики к анализу производственных и исследовательских данных в металлургии чугуна. Научные труды Днепропетровского металлургического института, вып. XIII, 1948.

менение их веса, толщину листа и различных покрытий, количество брака и пр.

В первую очередь математическая статистика получила распространение для контроля производства в металлообрабатывающей промышленности, в частности, для выборочного текущего контроля качества выпускаемых изделий. Это было вызвано тем, что с ростом масштабов производства производить сплошную проверку всех изделий стало практически невозможно.

Кроме того, при некоторых испытаниях контролируемые изделия сильно изнашиваются или разрушаются (например, при определении продолжительности горения электрической лампочки). В таких случаях пользуются статистическими методами выборочного исследования. Из практики работы установлено, что проверка правильно выбранных проб дает вполне надежные результаты; имеет значение и то обстоятельство, что проверка меньшего количества изделий может быть более тщательной и полной.

Методы математической статистики широко применяются, в частности, при разработке новых стандартов для научного обоснования вводимых технических допусков и припусков. При этом на основе анализа фактических данных производится оценка вероятного количества нестандартной продукции при различных проектах новых технических условий (стандартов), характеризующихся обычно более жесткими требованиями к устанавливаемым нормам допускам.

В металлургической промышленности имеются большие возможности для успешного применения математической статистики. Но особенности технологических процессов предприятий черной и цветной металлургии делают невозможным простое заимствование способов, уже испытанных в других отраслях промышленности, в частности в машиностроении. Поэтому в большинстве случаев приходится разрабатывать новые, особые методы исследования.

Таков краткий перечень основных технико-экономических задач в области металлургического производства, при решении которых уже применяются методы математической статистики. В связи с быстрым распространением этих методов в различных областях исследовательской работы круг вопросов, при решении которых пользуются ими, все время расширяется.

В течение нескольких последних лет возник и получил широкое распространение новый раздел прикладной математики, названный линейным программированием.

Линейное программирование, являющееся одним из видов исследований, известных также под названием операционных исследований¹, представляет собой совокупность математических

¹ Ф. Морз и В. Кимбелл. Методы исследования операций. Советское радио, М., 1956.

методов решения большой группы так называемых экстремальных задач (определение программы или плана, при которых рассматриваемая функция достигает максимума или минимума) с линейными связями и ограничениями.

Этот новый раздел прикладной математики был создан в соответствии с требованиями промышленности для выбора оптимальной схемы организации и планирования производства. При взаимодействии ряда производственных факторов часто требовалось решать такие практические задачи, для которых известные математические методы оказались непригодными.

В результате нескольких лет математических исследований, проводившихся в СССР, США, Англии и других странах, методы решения этих задач были найдены и практическое использование их способствовало повышению производительности и экономии значительных средств. В результате за короткий срок линейное программирование получило широкое применение в промышленности.

При помощи линейного программирования можно найти оптимальную программу использования производственных мощностей металлургических агрегатов (или оборудования) в условиях большого количества заказов, или выбрать оптимальный с экономической точки зрения вариант транспортных перевозок из большого количества различных возможных вариантов.

При помощи линейного программирования можно также выбрать оптимальный вариант комплексного использования руд черных и цветных металлов, установить оптимальный состав шихты, выбрать наиболее рациональный раскрой металла и решить ряд других аналогичных задач на оптимум. Таким образом, основной задачей линейного программирования является установление оптимального плана, при котором обеспечивается лучшее использование ресурсов и наиболее высокие технико-экономические показатели производственных процессов.

Критериями оптимальности того или иного производственного варианта могут быть различные показатели; увеличение производительности оборудования, сокращение срока выполнения заказов потребителей, снижение себестоимости продукции, улучшение ее качества и т. д.

Теория методов линейного программирования довольно сложна, но практическое применение их не вызывает особых затруднений, так как сводится в основном к четырем арифметическим действиям и использованию системы специальных таблиц.

Однако в ряде случаев из-за большого количества рассматриваемых факторов для осуществления необходимых вычислений нельзя обойтись без современных счетно-решающих машин. Расходы на эксплуатацию, а иногда и на сооружение этих машин в короткий срок перекрываются экономией, получаемой в

результате роста производительности труда, сокращения железнодорожных, автотранспортных перевозок и пр.

За рубежом линейное программирование или операционные исследования получили довольно широкое распространение в США и в Англии, где этим вопросам посвящено не только большое количество научных трудов и книг, но и два периодических издания (журнала). Над проблемами, связанными с применением линейного программирования, работают также во Франции, Норвегии, ФРГ, ГДР, Польше, Венгрии и Чехословакии. В зарубежной технической литературе высказывается мнение, что с введением линейного программирования «управление производством из искусства превратилось в науку».

Один из методов решения задач на линейное программирование — метод разрешающих множителей — был разработан в 1939 г. советским математиком проф. Л. В. Канторовичем. В своей работе «Математические методы планирования производства» он дал математическое обоснование метода и показал его применение на ряде практических задач. Укоренившийся в настоящее время термин «линейное программирование»¹ был введен примерно на 10 лет позднее американскими исследователями Д. Данцигом и Т. Купмансом.

Таким образом, несмотря на то, что метод Л. В. Канторовича не именовался линейным программированием, по существу он был создан для решения тех же задач.

В капиталистическом обществе линейное программирование подчинено задаче получения максимальной прибыли крупными монополиями.

В отличие от этого в Советском Союзе при решении хозяйственных задач на линейное программирование за критерий оптимальности принимается достижение максимального народнохозяйственного эффекта в виде экономии материальных ресурсов и роста производительности общественного труда.

Курс линейного программирования (в самостоятельном виде или в виде раздела родственных дисциплин) введен в высших учебных заведениях как в СССР, так и за рубежом. Все это также является свидетельством широкого и всеобщего признания методов линейного программирования, недавно еще малоизвестных, а в настоящее время завоевывающих все более прочное место в промышленности и на транспорте.

¹ В. С. Немчинов внес предложение закрепить за этим методом название «метод оптимального программирования» (Сб. «Применение математики в экономических исследованиях», Соцэкгиз, 1959, стр. 19).

1. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ¹

Теория вероятностей, в отличие от других математических наук, изучает случайные явления, которые при осуществлении некоторого комплекса исходных условий могут либо произойти, либо не произойти, т. е. это наука о закономерностях случайных явлений.

К такого рода явлениям можно, например, отнести факт появления белого шара при извлечении их наугад из урны с шарами белого и черного цвета. Несмотря на то, что случайные явления в каждом отдельном случае могут произойти или не произойти, на базе массового повторения их проявляются закономерности, мало зависящие от случая и обусловленные только комплексом исходных условий.

Основные понятия теории вероятностей: испытание (или опыт), событие и вероятность. Испытание — это практическое осуществление комплекса исходных условий; результат испытания называют событием.

Пусть, например, стрелок сделал целый ряд выстрелов в цель: каждый из этих выстрелов будет испытанием, попадание в цель — событием.

Важнейшим свойством события является то, что оно не может произойти частично: оно или происходит или не происходит.

Вероятность является количественной оценкой степени объективной возможности появления какого-либо определенного события в тех или иных конкретных условиях. Так, если в результате ряда испытаний установлено, что при определенных условиях стрелок на каждые 100 выстрелов в среднем попадает в цель 80 раз, то говорят, что в данном случае вероятность попадания составляет 80%, или 0,8.

Одним из основных понятий теории вероятностей является понятие равновозможности.

Рассмотрим следующий пример.

Пусть в некотором сосуде находится 10 шаров одинакового

¹ [1; 2; 3; 4; 5].

размера и веса, пронумерованных порядковыми номерами от 1 до 10. Шары тщательно перемешивают и один из них извлекают наугад. В соответствии с ранее установленной терминологией каждая операция извлечения шара из сосуда является испытанием, факт извлечения шара определенного номера — событием. События, заключающиеся в извлечении шара № 1 и шара № 2, являются несовместимыми, так как осуществление одного из них исключает осуществление другого. В то же время они являются равновероятными, так как нет основания считать, что одно из этих событий будет появляться чаще, чем остальные. Такие равновероятные и взаимоисключающие друг друга события, из которых одно обязательно осуществляется в данном испытании, иногда называются шансами. Вероятностью некоторого события в определенном испытании называют отношение числа шансов, благоприятствующих данному событию к общему числу шансов.

Так, например, какова вероятность того, что в приведенном выше примере с шарами, вынув из сосуда один шар, мы извлечем шар № 8?

Поскольку в данном случае мы имеем группу из 10 несовместимых и равновероятных событий, из которых только одно приводит к извлечению шара № 8, то, следовательно, вероятность извлечения шара № 8 (как и вероятность извлечения любого другого определенного шара из указанных десяти шаров) $p = \frac{1}{10}$ или 10%.

Совершенно очевидно, что вероятность любого события будет выражаться положительными числами от 0 до 1.

Вероятность невозможного события, которое в условиях данного испытания заведомо не может произойти, равна нулю.

С другой стороны, событие называют достоверным, если оно неизбежно происходит при данном испытании. Очевидно, что вероятность достоверного события равна единице. Значение же вероятности $p = 0,5$ указывает, что наступление и ненаступление события одинаково возможны. Собственно случайным событием называется событие, вероятность которого больше нуля и меньше единицы. В практических приложениях теории вероятностей очень малую вероятность рассматривают как практическую невозможность, а вероятность, близкую к единице, как практическую достоверность.

Рассмотрим несколько видоизмененный пример.

Пусть в некотором сосуде находятся 10 шаров одинакового размера, отличающихся цветом: 5 белых, 4 красных и 1 черный. Наугад извлекается один шар, так что условия равновероятности и несовместимости событий, под которыми понимается извлечение шара определенного цвета, соблюдены.

Определим вероятность того, что наудачу вынутый шар ока-

жется белым. Эту вероятность можно выразить числом:

$$p = \frac{5}{10}.$$

Вероятность же того, что вынутый шар окажется или белым или черным, очевидно, равна:

$$p = \frac{5}{10} + \frac{1}{10} = \frac{6}{10}$$

Этот пример может служить иллюстрацией к так называемому правилу сложения вероятностей (для несовместимых событий).

Правило сложения вероятностей: вероятность появления одного из нескольких несовместимых событий равна сумме вероятностей этих событий.

Пусть некоторое событие A представлено несколькими несовместимыми вариантами ($A = A_1 + A_2 + \dots + A_s$). При этом вероятность события A равна сумме вероятностей событий $A_1, A_2, \dots, A_s$, т. е.

$$p(A) = p\left(\sum_{i=1}^s A_i\right) = \sum_{i=1}^s p(A_i).$$

Группа событий называется полной, если при испытании обязательно осуществляется хотя бы одно из них. Если полная группа событий содержит только два несовместимых события, они называются противоположными.

Очевидно, что сумма вероятностей несовместимых событий, образующих полную группу, равна единице. Точно также единице равна сумма вероятностей противоположных событий, другими словами, вероятность события равна единице минус вероятность противоположного события.

Рассмотрим теперь вероятность сложного события, состоящего в совпадении нескольких простых событий.

Пусть из продукции некоторого завода забраковано 3%, а из годной продукции доля первого сорта составляет 90%. Требуется определить вероятность того, что наугад взятая деталь окажется деталью первого сорта. Очевидно, что это событие можно рассматривать как сложное событие, заключающееся в совпадении двух следующих простых событий: деталь должна оказаться, во-первых, из числа годных и, во-вторых, из той части годной продукции, которая является первым сортом.

Вероятность того, что деталь окажется годной, а не браком, составляет $100\% - 3\% = 97\%$.

Из этого количества первый сорт составляет 90%, т. е. искомая вероятность:

$$p = 0,97 \cdot 0,90 = 0,873, \text{ или } 87,3\%.$$

Этот пример может служить упрощенной иллюстрацией так называемого правила (теоремы) умножения вероятностей.

Правило умножения вероятностей: вероятность сложного события, состоящего в совпадении нескольких простых независимых событий, равна произведению вероятностей этих событий.

Рассмотрим другой пример. Пусть в некотором сосуде находится 5 белых и 6 черных шаров. Требуется определить вероятность того, что, извлекая дважды наугад по одному шару, мы оба раза достанем белый шар.

Возможны два следующих варианта задачи:

1. Вынутый шар возвращается в сосуд — так называемая «схема возвращенного шара». Испытания, производимые по такой схеме, являются независимыми, так как вероятность события в каждом из этих испытаний не зависит от результатов прочих испытаний. Таким образом, вероятность извлечения белого шара как при первом, так и при втором испытании одинакова и равна $\frac{5}{11}$.

Вероятность же сложного события — двукратного извлечения белого шара — равна:

$$p = p_1 \cdot p_2 = \frac{5}{11} \cdot \frac{5}{11} = \frac{25}{121}.$$

2. Вынутый шар не возвращается в сосуд — так называемая «схема невозвращенного шара». Испытания, производимые по этой схеме, являются зависимыми, так как вероятность события в каждом из этих испытаний уже зависит от результатов испытаний, имевших место ранее.

В этом варианте, как и в предыдущем, при первом испытании вероятность извлечения из сосуда белого шара также равна:

$$p_1 = \frac{5}{11}.$$

Однако при втором испытании (после первого испытания — безвозвратного извлечения одного белого шара) в сосуде останется уже не 11, а 10 шаров, в том числе четыре белых вместо пяти. Таким образом, вероятность извлечения белого шара при втором испытании будет равна:

$$p_2 = \frac{4}{10},$$

а вероятность двукратного извлечения белого шара

$$p = p_1 \cdot p_2 = \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} = \frac{2}{11}.$$

В этом примере вероятность p_2 , т. е. вероятность появления белого шара при втором испытании при условии, что первый раз был также вынут белый шар, является так называемой условной вероятностью. Вообще условной вероятностью события