ЭКОНОМИКА
И
УПРАВЛЕНИЕ

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ ДЛЯ РУКОВОДИТЕЛЯ

АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА
при СОВЕТЕ МИНИСТРОВ СССР

ЭКОНОМИКА
И
УПРАВЛЕНИЕ

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ ДЛЯ РУКОВОДИТЕЛЯ

МОСКВА «ЭКОНОМИКА» 1984

65.9(2)30—2
Э40

Рецензент
кандидат экономических наук Б. Н. БЕЗРУКОВ

Э $\frac{0604020101-191}{011(01)-84}$ 39—84

ВВЕДЕНИЕ

Наука об управлении народным хозяйством непрерывно обогащает арсенал своих методов и средств. Решающую роль в этом процессе играет ее математизация. Расширяющееся использование математических моделей и методов в управлении социалистической экономикой — одна из примечательных особенностей современного этапа ее развития.

Различные результаты исследований по созданию математических методов обоснования решений при управлении хозяйственными системами начали складываться в научную дисциплину в 60-е годы. У этой науки пока еще нет общепринятого названия. В первое время она рассматривалась как один из разделов общей науки об управлении — кибернетики. Затем стали применяться такие названия, как «исследование операций», «математическая экономика», «экономико-математическое моделирование» и др. В этой книге авторы будут придерживаться наименования «экономико-математические методы и модели».

Причиной появления экономико-математических методов послужило усложнение экономики и управления хозяйством. Принимаемые в сфере хозяйственной деятельности решения уже не могут основываться исключительно на опыте и интуиции. Практика выявила многогранные возможности экономико-математических методов в разработке и выполнении планов на различных уровнях управления.

Советской науке принадлежит приоритет в решении многих важнейших вопросов теории и практического применения экономико-математических методов. В первую очередь это относится к разработке балансовых методов анализа экономики. Первый баланс народного хозяйства был составлен ЦСУ СССР за 1923/24 хозяйственный год. Он на многие годы опередил аналогичные работы за рубежом. В 1939 г. Л. В. Канторовичем (ныне академик, лауреат Ленинской и Нобелевской премий) впервые был разработан метод решения задач линейного программирования, охватывающих множество хозяйственных ситуаций, в которых возникает проблема наилучшего использования ограниченных ресурсов.

С помощью экономико-математических методов решаются разнообразные задачи планирования и управления: развитие, размещение и специализация существующих и вновь создаваемых предприятий; выбор перспективной структуры производства и соотношения между действующими, реконструируемыми и новыми мощностями; установление оптимальных размеров предприятий, характера и типа реконструкции объектов отрасли; определение оптимальных схем перевозок продукции и др.

Благодаря использованию экономико-математических методов в задачах развития предприятий и размещения производства достигается экономия до 5—7 % капитальных вложений и 2—3 % себестоимости продукции по сравнению с планами, составленными традиционными методами. При оптимизации структуры продукции и распределения дефицитных ее видов между потребителями в целях достижения максимального народнохозяйственного эффекта такая экономия составляет до 10—15 % капитальных вложений и 5—10 % издержек производства. Эти результаты подтверждаются широким кругом экспериментальных и практических расчетов, выполненных во многих отраслях народного хозяйства. В отдельных отраслях решение задач оптимизации уже принесло народному хозяйству экономию в сотни миллионов рублей.

Экономико-математические методы, соединенные с современной вычислительной техникой в рамках разного рода автоматизированных систем, становятся важнейшим элементом планирования и управления хозяйством на предприятиях и в объединениях, в отраслях и межотраслевых комплексах, в экономических районах и территориально-производственных комплексах. Эти методы все более активно используются в практике разработки и реализации планов экономического и социального развития.

Литература по экономико-математическим методам весьма обширна. Однако значительная часть изданий предназначена для разработчиков методов и специалистов по АСУ. Кроме того, эти издания, как правило, требуют хорошего знания современной математики. Это и определило задачу, стоявшую перед авторами: подготовить книгу, рассчитанную на экономистов и инженеров, изучающих экономико-математические методы для практического использования и не имеющих возможности для математической переподготовки.

Книга включает разделы, посвященные методам оптимизации, статистическим методам управления, отдельным видам экономико-математических моделей для планирования и управления и их использованию в народном хозяйстве. В главе 1 кратко излагаются элементы математики, на которых основаны экономико-математические методы.

Книга написана: П. В. Авдуловым (глава 1, § 1.3—1.6), Э. И. Гойзманом (глава 1, § 1.1, 1.2, глава 3), В. А. Кутузовым (глава 2), акад. Н. П. Федоренко (введение, глава 4).

1

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

1.1. Классические методы оптимизации

Основные понятия в экономической науке, связанные с решением задач на оптимум, ведут свое происхождение от понятий математического анализа, а для решения относительно простых оптимизационных задач часто могут быть использованы методы дифференциального исчисления.

Большое значение в экономике имеет исследование таких функциональных связей, как зависимость производительности труда от количества тех или иных ресурсов (в том числе и трудовых), объема выпуска продукции от затрат, спроса на ту или иную продукцию от цены и др. В задачах такого рода нередко требуется максимизировать или минимизировать тот или иной показатель.

Говорят, что переменная величина z является *функцией* от другой переменной величины x, если в силу какой-то закономерности каждому значению этой переменной отвечает определенное значение переменной z. В общем виде это записывается как

$$z = f(x).$$

Переменную величину x называют *независимой переменной,* или аргументом. Множество всех возможных значений переменной x называют *областью определения* (или *областью существования*) функции. Функции могут быть заданы аналитически (формулами), с помощью таблиц, графически. Для обозначения функции $z=f(x)$ при $x=a$ употребляется запись $z=f(a)$.

Например, если

$$z = 3x^2 - 2,$$

то

$$f(x) = 3x^2 - 2,$$

и при $x=2$

$$f(2)=3\cdot 2^2-2=10.$$

Обратим внимание на случай, когда функция задается с помощью нескольких выражений, каждое из которых соответствует своей области определения. Способ записи таких функций показан на примере

$$z=\begin{cases} 2-x & \text{для } 0\leqslant x\leqslant 2, \\ 2-x^2 & \text{для } 2<x\leqslant 3, \\ \frac{1}{3}x & \text{для } x>3. \end{cases}$$

Вид этой функции представлен на рис. 1.1.

Простейшими функциональными зависимостями являются: *прямая пропорциональная зависимость* (рис. 1.2)

$$z=ax;$$

линейная функция (рис. 1.3)

$$z=ax+b;$$

обратная пропорциональная зависимость (рис. 1.4)

$$z=\frac{a}{x};$$

дробно-линейная функция (рис. 1.5)

$$z=\frac{ax+b}{cx+d};$$

квадратичная функция (рис. 1.6)

$$z=ax^2;$$

квадратичная функция общего вида (рис. 1.7)

$$z=ax^2+bx+c;$$

показательная функция (рис. 1.8)

$$z=a^x;$$

логарифмическая функция (рис. 1.9)

$$z=\lg_a x;$$

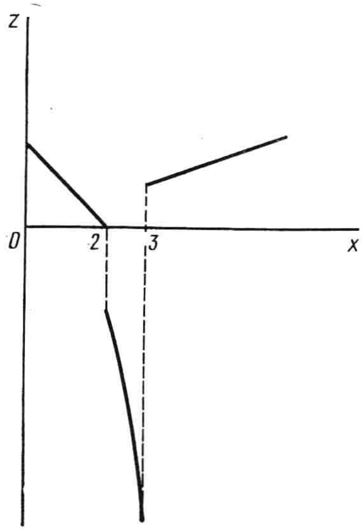
степенная функция (рис. 1.10)

$$z=x^a;$$

многочлен (полином) n-й степени

$$z=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ .\ .\ .\ +a_{n-1}x+a_n.$$

Аналогичным образом вводятся понятия и обозначения функций от двух, трех и, наконец, n переменных. Так, если



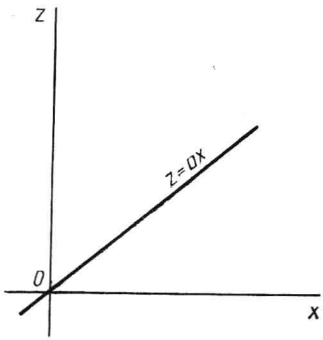
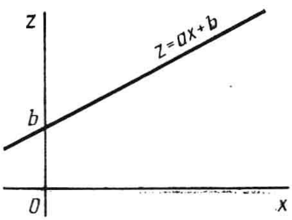


Рис. 1.1. Функция сложного вида

Рис. 1.2. Прямая пропорциональная зависимость



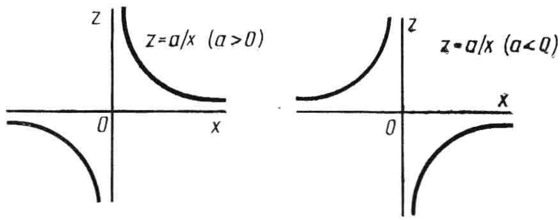
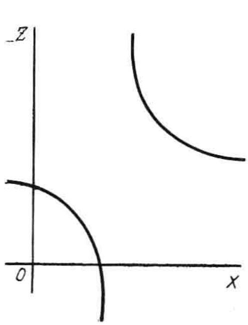


Рис. 1.3. Линейная функция

Рис. 1.4. Обратная пропорциональная зависимость



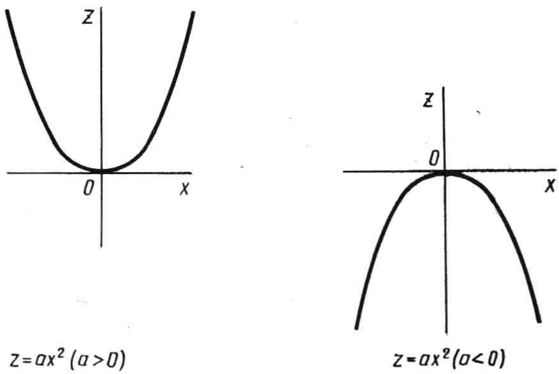


Рис. 1.5. Дробно-линейная зависимость

Рис. 1.6. Квадратичная функция

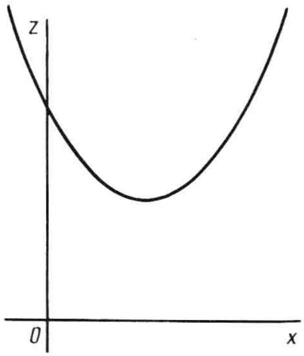


Рис. 1.7. Квадратичная функция общего вида

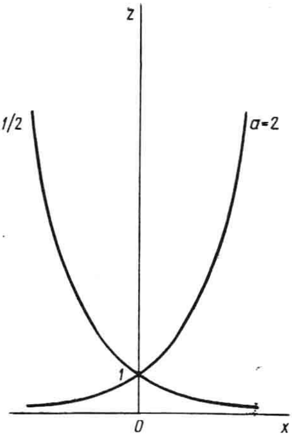


Рис. 1.8. Показательная функция

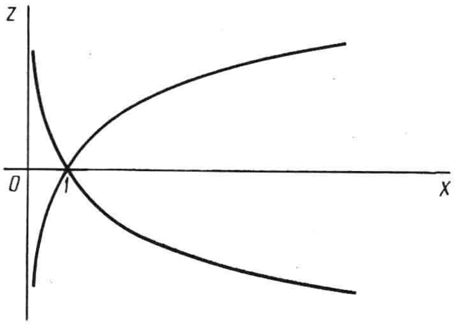


Рис. 1.9. Логарифмическая функция

каждому набору значений переменных величин $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, взятому из своей области определения, соответствует определенное значение переменной z, то переменная величина z называется функцией от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, т. е.

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

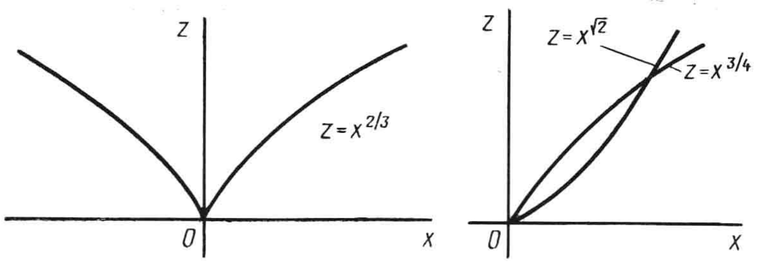
Например, функция от двух переменных (x_1, x_2)

$$z = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$$

по смыслу имеет область определения $1 - x_1^2 - x_2^2 \geqslant 0$, или $x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1$.

Наглядно можно изобразить функцию только от одной и двух переменных. Начиная с функций от трех переменных, этого сделать уже нельзя, так как здесь недостаточно трехмерного пространства.

Допустим, что функция $z = f(x)$ задана в некотором промежутке (области) определения и точка $x = a$ — внутренняя точка



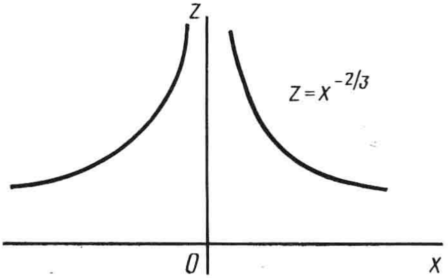


Рис. 1.10. Степенная функция

этого промежутка. *Максимум* функции $z=f(x)$ будет в точке $x=a$ в том случае, если для любого значения x из окрестности точки a имеет место соотношение

$$f(a) \geqslant f(x).$$

Минимум функции $z=f(x)$ будет в точке a в том случае, если для любого значения x из окрестности точки a справедливо соотношение

$$f(a) \leqslant f(x).$$

Общим наименованием, объединяющим максимум и минимум, служит название *экстремум.* Понятия максимума и минимума имеют *локальный* характер. Поэтому функции могут иметь несколько экстремальных точек (т. е. несколько максимумов или минимумов, рис. 1.11).

Наибольший максимум среди всех максимумов (или же наименьший минимум среди всех минимумов) называется *глобальным*, или *абсолютным*, остальные же называются *локальными*, или относительными. На рис. 1.12 показан пример функции от двух переменных $z=f(x_1, x_2)$, имеющей два максимума и одну так называемую *седловую точку*, которую нельзя считать ни максимумом, ни минимумом.

Когда возникает вопрос о том, имеет или не имеет функция несколько экстремумов, полезным является представление о *вогнутости* и *выпуклости* функций. На рис. 1.13 представлены примеры выпуклых и вогнутых функций. В случае выпуклости функции ее значения, лежащие между двумя точками, соединенными отрезком прямой, не могут быть больше значений ординат точек, принадлежащих этому отрезку. Значения вогнутой функции, лежащие между двумя точками, соединенными отрезком прямой, будут больше значений ординат точек, принадлежащих этому отрезку.

Понятия максимума и минимума не следует смешивать с понятиями *наибольшего* и *наименьшего* значений функции. В отличие от экстремумов, имеющих место только во внутренних точках области определения функции, ее наибольшие или наименьшие значения могут быть и на границе области определения (см. рис. 1.11). Общим наименованием, употребляемым вместо названия «наибольшее (наименьшее) значение функции», является *оптимум.* Таким образом, оптимальные значения функции находятся среди экстремальных точек или же на границе области определения функции.

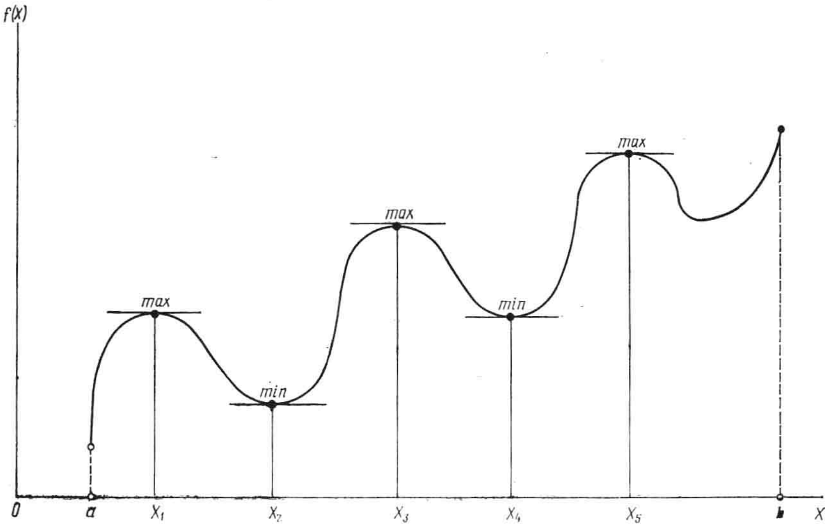


Рис. 1.11. Функция с несколькими экстремумами

Для нахождения экстремумов применяются методы дифференциального исчисления, которые в отличие от современных методов оптимизации иногда называют классическими. Признаком максимума (или минимума) функции в какой-либо точке является равенство нулю ее производной в этой точке. *Производной* называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда оно стремится к нулю. Если обозначить производную как z', приращение функции — Δz, приращение аргумента — Δx, то по определению

$$z' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x}.$$

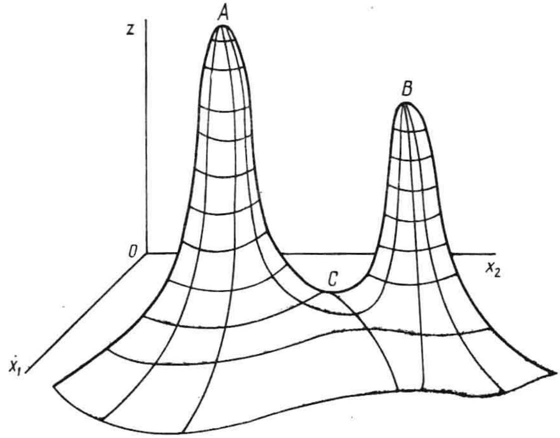


Рис. 1.12. «Седло»

Для обозначения производной употребляются такие символы

$$\frac{dz}{dx}, \quad f'(x), \quad \frac{df(x)}{dx}.$$

Если производная берется в точке a, то применяют запись

$$f'(a), \quad \frac{df(a)}{dx}.$$

Ниже приводятся основные формулы для определения производных:

$$z = c \quad \text{(c — постоянная величина)} \quad z' = 0; \tag{1.1}$$

$$z = x \quad \text{(x — независимая переменная)} \quad z' = 1; \tag{1.2}$$

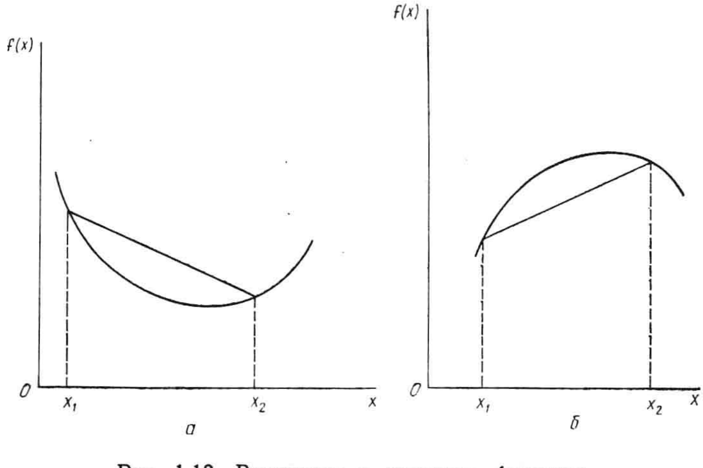


Рис. 1.13. Выпуклые и вогнутые функции

$$z = cu \qquad z' = cu'; \tag{1.3}$$

$$z = u \pm v \qquad z' = u' \pm v'; \tag{1.4}$$

$$z = uv \qquad z' = u'v + uv'; \tag{1.5}$$

$$z = \frac{u}{v} \qquad z' = \frac{u'v - uv'}{v^2}; \tag{1.6}$$

$$z = \frac{1}{v} \qquad z' = -\frac{v'}{v^2}; \tag{1.7}$$

$$z = u^n \quad (n\text{ — постоянная величина}) \qquad z' = nu^{n-1} \cdot u'. \tag{1.8}$$

$$z = \sqrt{u} \qquad z' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}; \tag{1.9}$$

$$z = a^u \quad (a\text{ — постоянная величина}) \qquad z' = a^u \ln a \cdot u'; \tag{1.10}$$

$$z = e^u \qquad z' = e^u \cdot u'; \tag{1.11}$$

$$z = \lg_a u \qquad z' = \frac{u'}{u \ln a}; \tag{1.12}$$

$$z = \ln u \qquad z' = \frac{u'}{u}; \tag{1.13}$$

$$z = \sin u \qquad z' = \cos u \cdot u'; \tag{1.14}$$

$$z = \cos u \qquad z' = -\sin u \cdot u'; \tag{1.15}$$

$$z = \operatorname{tg} u \qquad z' = \frac{u'}{\cos^2 u}; \tag{1.16}$$

$$z = \operatorname{ctg} u \qquad z' = -\frac{u'}{\sin^2 u}. \tag{1.17}$$

С геометрической точки зрения производная функции $f(x)$ в какой-то точке — это тангенс угла наклона касательной, проведенной к кривой $z = f(x)$ в этой точке (рис. 1.14):

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(x) = \frac{df(x)}{dx}.$$

Таким образом, если в точке экстремума можно провести касательную, то она должна быть параллельна оси OX.

Пусть экстремум найден в точке a. Определить, является ли найденный экстремум максимумом или минимумом, можно, исследовав изменение знака производной в окрестности экстремума. Если при переходе через точку экстремума (когда вначале $x < a$, а затем $x > a$) производная из положительной становится отрицательной, имеет место максимум, а если наоборот, то минимум. Данное правило непосредственно вытекает из геометрического смысла производной. Способ определения экстремума с помощью производных распространяется на функции нескольких переменных: здесь отыскиваются производные по каждой из переменных, входящих в функцию (*частные производные*); затем частные производные приравниваются нулю, и из этих уравнений определяются соответствующие значения точек экстремума. Частные производные обозначаются как $\frac{\partial z}{\partial x}$.

В качестве примера определим экстремум функции

$$z = x_1^3 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_3.$$

Найдем частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = 3x_1^2; \quad \frac{\partial z}{\partial x_2} = 2x_2; \quad \frac{\partial z}{\partial x_3} = 2x_3 - 2.$$

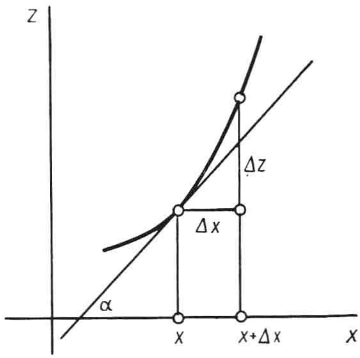


Рис. 1.14. Производная функции

Приравняв производные нулю

$$3x_1^2 = 0; \quad 2x_2 = 0; \quad 2x_3 - 2 = 0,$$

находим точку экстремума $x_1=0$; $x_2=0$; $x_3=1$.

Исследование поведения функции в окрестностях точки экстремума показывает, что в точке с координатами $x_1=0$; $x_2=0$; $x_3=1$ имеет место минимум.

Классические методы нахождения экстремумов с помощью производных не являются *итерационными*[1] и построены на определении условий, необходимых для существования экстремума.

Несмотря на то что эти методы являются точными, ими не всегда пользуются на практике из-за сложности решения для функций с несколькими переменными. В этом случае применяются так называемые *градиентные методы*, которые имеют много различных модификаций.

Градиентные методы можно представить себе следующим образом. Возьмем для примера функцию двух переменных $z = f(x_1, x_2)$. Руководствуясь какими-то соображениями, выбирают исходные значения переменных и определяют значение

[1] *Итерацией* называется отдельный шаг решения, отыскиваемого путем последовательных приближений.

функции в этой точке. Пусть исходные значения переменных будут $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, а значение функции $f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$. Если $z^{(0)} = f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ не является экстремумом, то определяют такие новые значения переменных $x_1^{(1)} = x_1^{(0)} + d_1$ и $x_2^{(1)} = x_2^{(0)} + d_2$, чтобы следующее значение функции $f(x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$ оказалось ближе к оптимуму, чем предыдущее.

Каким же образом определяется величина приращений d_1 и d_2? Для этого в точках $x_1^{(0)}$ и $x_2^{(0)}$ определяется направление изменения функции в сторону экстремума. Делается это с помощью градиента. *Градиент* — это вектор, координатами которого служат частные производные. Чем больше значение частной производной, тем быстрее происходит изменение функции в сторону экстремума. Поэтому приращения d_1 и d_2 выбирают пропорциональными значению частных производных $\frac{\partial z}{\partial x_1}$ и $\frac{\partial z}{\partial x_2}$ в точках $x_1 = x_1^{(0)}$ и $x_2 = x_2^{(0)}$.

Таким образом,

$$d_1 = t\frac{\partial z}{\partial x_1}; \qquad d_2 = t\frac{\partial z}{\partial x_2},$$

где t — величина, называемая шагом, которая устанавливает масштаб изменений d_1 и d_2.

Рассмотрим пример максимизации функции

$$z = -(x_1 - 3)^2 - 4(x_2 - 2)^2.$$

Частными производными будут

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = -2(x_1 - 3); \qquad \frac{\partial z}{\partial x_2} = -8(x_2 - 2).$$

В точке $x_1^{(0)} = 0$, $x_2^{(0)} = 0$ при $t=0,1$ имеем

$$d_1^{(0)} = t\frac{\partial z}{\partial x_1} = 0,1\cdot[-2(0-3)] = 0,6; \qquad d_2^{(0)} = t\frac{\partial z}{\partial x_2} =$$

$$= 0,1\cdot[-8(0-2)] = 1,6,$$

откуда

$$x_1^{(1)} = x_1^{(0)} + d_1^{(0)} = 0 + 0,6 = 0,6;$$

$$x_2^{(1)} = x_2^{(0)} + d_2^{(0)} = 0 + 1,6 = 1,6;$$

$$z^{(1)} = -(0,6-3)^2 - 4(1,6-2)^2 = -6,4.$$

Продолжим расчеты еще для одной итерации.

В точке $x_1^{(1)} = 0,6$, $x_2^{(1)} = 1,6$ при $t=0,1$ имеем

$$d_1^{(1)} = t\frac{\partial z}{\partial x_1} = 0,1\cdot[-2(0,6-3)] = 0,48;$$

$$d_2^{(1)} = t\frac{\partial z}{\partial x_2} = 0,1\cdot[-8(1,6-2)] = 0,32,$$

откуда

$$x_1^{(2)} = x_1^{(1)} + d_1^{(1)} = 0,6 + 0,48 = 1,08;$$

$$x_2^{(2)} = x_2^{(1)} + d_2^{(1)} = 1,6 + 0,32 = 1,92;$$

$$z^{(2)} = -(1,08 - 3)^2 - 4(1,92 - 2)^2 = -3,712.$$

На рис. 1.15 показано движение по градиенту, которое было проделано в данном примере.

Заметим, что отношение $\frac{d_2}{d_1}$ указывает направление изменения функции в сторону максимума. Если градиент взять со знаком минус, то будем двигаться в сторону минимума.

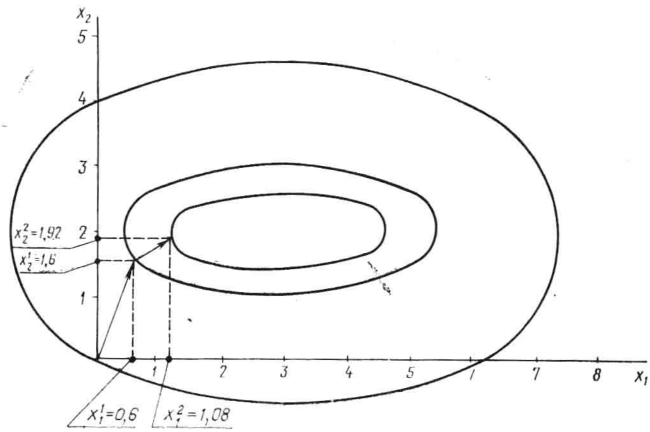


Рис. 1.15. Пример применения градиента

Специфической проблемой градиентных методов является выбор величины шага t. Если задаться малым шагом, то оптимум будем искать очень долго. Если выбрать его значение слишком большим, то оптимум можно «проскочить». Поэтому возникает промежуточная задача выбора оптимальной величины шага, для решения которой имеются соответствующие способы. Точно попасть в точку оптимума с помощью градиента все же не удается, так как шаг t определяется приближенно: поэтому, как правило, попадают не в оптимум, а в его зону. Градиентные методы обеспечивают определение локальных оптимумов. При отыскании глобального оптимума с помощью градиента нередко бывает сомнение в том, что найденный оптимум является локальным.

В рассмотренных методах поиска экстремумов не предполагается, что на независимые величины могут быть наложены какие-либо дополнительные ограничения (за исключением условия, что значения этих переменных принадлежат области определения функции). Поэтому экстремумы этого типа называют *безусловными*. Однако нередко встречаются задачи, в которых при поиске экстремума независимые переменные должны соответствовать дополнительным условиям, выраженным алгебраическими зависимостями. В общем виде задачи этого типа можно записать следующим образом (случай функции от нескольких переменных):

требуется найти экстремум функции

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

при условиях, выраженных уравнениями

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_1;$$

$$\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_2;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_m,$$

которые учитывают какие-либо дополнительные связи между переменными.

Экстремумы, удовлетворяющие дополнительным условиям, называются *условными*. Условные экстремумы в задачах с дополнительными условиями в виде уравнений также можно определять с помощью методов дифференциального исчисления.

Рассмотрим следующий пример. Пусть требуется найти минимум функции двух переменных

$$z = x_1^2 + x_2^2 \to \min$$

при условии

$$x_1 + x_2 = 1.$$

Последнее уравнение дает возможность выразить одну переменную через другую и исключить ее из данной функции. В результате будем иметь функцию от одной переменной

$$z = x_1^2 + (1 - x_1)^2.$$

Найдем экстремум этой функции

$$\frac{dz}{dx_1} = 2x_1 - 2 + 2x_1 = 0.$$

Откуда $x_1 = \frac{1}{2}$, а после подстановки получим $x_2 = \frac{1}{2}$. Таким образом, условный экстремум будет в точке с координатами $\left(x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{2}\right)$, а ее минимальное значение будет равно $z = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

В задачах с функциями многих переменных использовать такие подстановки бывает очень трудно. Более эффективным способом является *метод множителей Лагранжа*, сущность которого покажем на примере функции двух переменных.

Если требуется найти условный экстремум функции $z = f(x_1, x_2)$ при условии $\varphi(x_1, x_2) = b$, то составляется *функция*