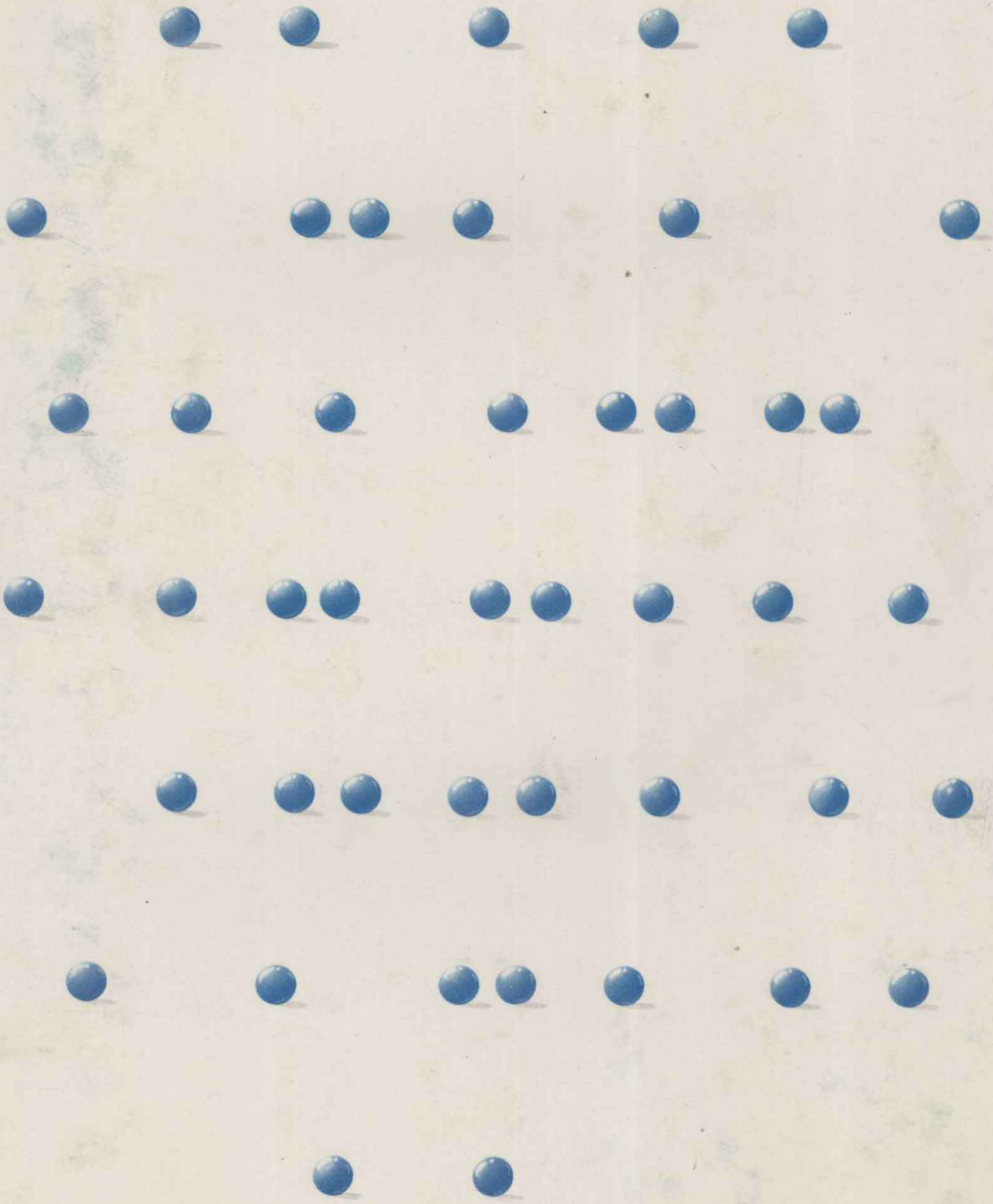
例解統計入門

統計数理研究所第三研究部第二研究室長 理学博士 鈴木義一郎 著



例解統計入門

統計数理研究所第三研究部第二研究室長
理学博士 鈴木義一

NDC 417

著者略歴

鈴木義一郎　昭和12年9月19日山形県に生まれる．昭和37年東北大学理学部数学科修士課程修了．現在統計数理研究所第三研究部第二研究室長．理学博士

実教理工学全書

例　解　統　計　入　門

1971年5月15日　第1刷発行
1976年2月25日　第6刷発行

著　者　鈴木義一郎
発行者　宇野豊蔵
発行所　実　教　出　版　株　式　会　社
東京都千代田区五番町5　〒102
電　話　東　京　(263)　0 1 1 1　(大代表)
振　替　東　京 1 8 3 2 6 0
印　刷
製　本　大日本法令印刷株式会社

定価はカバーに表示してあります．

3041 - 2102 - 3205

はじめに

この書を手にする読者の多くは，次のような問にてっとり早く答えてくれる本を捜しているのではないかと思う．**統計あるいは統計的方法とは何か．それはどんな場面で，どのようにして，どのくらい効果的に用いられるのか．**

この問に要領のよい解答を与えることは，それほど困難ではない．しかし，概念の定義めいた模範解を読者が記憶できたとしても，何の役にもたたないであろう．スキーで回転する物理を理解するのは容易であっても，スキーで自由自在に回転を行なう技術を身につけるのが困難なように，統計的方法を**マスター**する——マスターである読者が，統計的方法という奴隷を思いどおりに使えるようになる——ことは一朝一夕にできることではない．

筆者は，統計学の研究を始めて十年足らずの若輩ではあるが，本邦唯一の統計数理の研究機関に身を置く幸運に恵まれたために，一通りの正確な統計的知識を身につけることができたと自負している．“学問に王道なし”などと偉ぶっていると，統計を学びたいと願っている人達からゲバ棒で小突かれてあえない最期をとげかねない．そこで一念発起して，どこかの国の大臣なら通れるくらいの“道しるべ”でも書けたらと考えて企画したのが，この“例解統計入門”である．

この書の特徴は，従来の統計入門書のほとんどがとっている，概念の説明から始まり，定理・例題と配列されるスタイルを踏襲しなかったことにある．その理由は数学をあまり得意としない多くの読者に，このスタイルがあまり歓迎されていないという事情を見聞きするからである．そこで，この書では**基本例題 50 題**とその**解答**および各例題に対応する**類題 40 題**（略解を含めて），さらに簡単な**整理事項**によって構成し，例題 40 までで統計の初歩的な入門コースの諸概念を一望できるように配慮した．例題は簡単ではあるが基本的なものを精選し，各例題にできる限り詳しい解答をつけ，基本的な概

念も適宜解答欄で説明してある．読者は，例題の解答を読解できたことだけに満足することなく，自らがその例題に解答を与え得る能力を養い，さらに対応する類題をも独力で解くことにより，類似の解法が適用できる例題のパターンを把握できる段階まで精進していただきたい．

統計のいろいろな概念や方法を学ぶことよりも，問題解決の際に **統計的な考え方** がどのような役割を果たしているかを見極めることの方がはるかに重要である．この書は，問題を解くプロセスを示しながら，読者に**統計的なものの考え方**を身につけてもらえるよう意図しており，そのために必要な最少限の概念しか導入されていない（特に確率に関する叙述の部分が，他の入門書に比較して少ない）．このような著者の意図に沿って読み進まれた読者ならば，最初に掲げた問に対して，読者自らが明解に答え得るものと信ずる．

目　　次

統計的方法のアウトライン

統計的方法とは

読者の多くは“統計をとる”とか“統計的に比較して……”といった表現を見聞きしたことがあるだろう．その際“統計をとる”の統計と“統計的に比較する”場合の統計とがいくらか異なった意味で使われていることに気づかれているだろうか．前者の意味で使われる統計とは数量的なデータを収集し要約したりする部門のことを意味するものであり，国勢を表現したり社会情勢をいい表わしたりする数値を求めるために使われるもので，いわゆる **記述統計** と呼ばれるものである．これに対して，後者の意味で使われる場合の統計は，データそのものに関する叙述が直接目的なのではなく，そのデータの源泉と考えられる集団に関しての結論を引き出すことを目的とする部門のことを指している．この意味の統計を記述統計と区別する意味で **推測統計** と呼ぶことがある．このように“統計”ということばが二様の意味で用いられることがある点に留意してほしい．本書で扱う統計が，もちろん，後者の意味であることも．

観測データの源泉である集団に関する結論を得る目的で，そこからとられたデータの集まりのことを **標本（サンプル）** という．さらにそのような観測データの源泉である集団は **母集団** と呼ばれる．したがって，多少あらっぽい表現をすれば，“標本によって母集団に関する結論を引きだす方法が統計的方法である”ということができる．

統計的に観る

記述統計にしても推測統計にしても，それを適用するためには，結論の対象物である集団を明確に定めなければならない．つまり，そのような集団に共通の性質（C）を指定する必要がある．このようにして定められた集団の

各個体は必ず性質 (C) をもち，その集団に属さないいかなる個体も性質 (C) をもち得ない．たとえば，昭和45年5月1日現在の世田谷区立深沢小学校6年生児童について考えてみると，昭和45年5月1日深沢小学校の6年生であるという性質が (C) に相当するので，昭和45年4月に他から転校して深沢小学校の6年生になっている生徒も，その集合の中に入れて考えるといったぐあいである．

しかし，調査対象の集団の共通の性質だけに注目していたのでは調査の意義がなくなる．共通の性質 (C) とは異なった別の観点 (X) から観察すれば，その集団の各個体はいろいろと変動しているはずである．たとえば，昭和45年5月1日現在深沢小学校の6年生であるという共通の性質 (C) をもつ集団でも，身長・体重といった身体的特性 (X) については各生徒ごとに種々の変動がみられるであろう．

もともと統計とは，共通の性質 (C) をもつ集団の観点 (X) からの変動の様子を観察する目的で使われるものである．どのような観点 (X) からの変動を観察するかは目的により種々異なるが，共通の条件 (C) のもとで観点 (X) からの変動の様子を観察することにより性質 (C) と観点 (X) との間の関連がある程度はっきりするように設定されなければならない．条件 (C) と観点 (X) との間の関連性を探究する目的で，条件 (C) のもとで観点 (X) からの変動の様子を観察することを **統計的観察を行なう** という．

統計のために確率がある

多くの統計の入門書の初めには，サイコロを投げて1の目の出る **確率** (可能性) がどのくらいかといったような問題を例示して，確率に関する議論がなされている．賭博師になるわけでもないのに，サイコロの目の出方を調べてどんな御利益があるのだろうか．確率に関する議論と統計とはどんな関係にあるのだろうか．このような問に自信をもって答えられないままに統計を勉強しようとすると，目的意識が薄弱なまま統計とは無味乾燥なものといった印象をいだいてしまう．前に，(推測) 統計とは，観測データ (標本) の源

泉である集団（母集団）に関する結論を得る目的で用いられると述べた．つまり，統計が使われる場面では，標本という一部分に関する情報により母集団という全体に関する結論が帰納されるのである．統計のこのような性格から確率に関する議論が必要になってくる．

たとえば，ある10人の男性の平均的異性観を調べる目的で，その中から2人を選んで意見を聞くものとする．かりに，10人中 H という男性だけが“美人は絶対きらいだ”といい，残りの9人は“美人大歓迎”という意見をもっているとしよう．すると調査対象の標本の中に H が含まれるか否かによって，そのグループの平均的な意見として“美人を好む男性と毛ぎらいする男性とが半々くらいである”か“すべての男性が美人を好む”かの結論に分かれることになるであろう．後者の結論ならともかく，前者の結論はやや見当はずれの結論といえよう．このように，当たるときもあればはずれるときもあるで済ませてしまうなら，大道易者の八卦見と何ら変わるところはない．そこで，10人の中から2人の標本をとり出すのに，次のような方策をとる．

まず，あらかじめ母集団の構成員である各男性に，0から9までの番号を対応させておく．次に，1枚の貨幣とサイコロを1つ用意し，それを投げて貨幣については表が出たか裏が出たかを，サイコロについては上向きになった面の目の数を観察する．6の目が出たときには，さらにサイコロを振り，6の目以外の面が上向きになったところで止める．貨幣の表が出たときには，サイコロの目の数の番号に対応する男性を選ぶ．貨幣が裏のときは，サイコロの目の数に5を加えた数字（目の数が5のときには0）の番号の男性を選ぶ．このようにして，標本の方の構成員である男性が1人選定できたが，次にもう一度貨幣とサイコロを投げる実験を行ない，再びある番号に対応する男性を選ぶ．もし2度目に指定した数字が，前に選ばれた男性に対応する番号と一致した場合には，このような実験を改めて行ない，異なる2人の男性が選ばれるようにする．

このような選び方をすると，10人の中のどの男性も標本の構成員になる

可能性が等しい——確率の議論では これを **同程度に確からしい** と表現する——と考えられる（もちろん，実験に用いた貨幣の表・裏の出る可能性が等しく，サイコロのどの面の出る可能性も相等しいものと考えて）．このように，母集団のどの構成要素も標本の構成要素となるチャンスが等しくなるようにして得られた標本のことを **ランダムサンプル——任意標本** とか **無作為標本** とか呼ばれることもある——という．ランダムサンプルを得るためには，必ずしも貨幣やサイコロを用いる必要はなく，他の実験用具を用いたり既製の **乱数表** を用いたりすることもできる．

このようにして得られた標本（ランダムサンプル）の情報を用いて帰納される母集団に関する結論については，その正当性に関する評価を与えることができる．

上述の例で考えてみよう．10人の中から2人を選ぶ選び方は全部で45通りある．その中でHが標本の構成員となる場合は9通りしかない．したがって，ランダムサンプルによって得られる結論で，見当はずれのものを得る可能性は45通り中の9通り，すなわち，$\frac{9}{45}=0.2$ しかない．残りの80%は，“すべての男性が美人を好む”という，ほぼ満足すべき結論を得ることができる．標本をとる際にいつもランダムネスの条件を課すとは限らないが，一般に，何らかの基準のもとで標本を選出するように心がけなければならない．そうしないと，標本から得られる母集団に関する結論の正当性に保証を与えることができなくなる．

ランダムネスその他のある基準のもとで得た標本に基づいて，母集団に関する推論——**統計的推論**——を行なう限り，確率の議論が得られた結論の正当性の保証を与えてくれるはずである．（ただし，今日の確率論の知識では解決できないような基準でとられた標本の場合については保証できない．）

統計的に考える

統計を用いて問題を解決しようとする場合には，結論の対象物である集団つまり母集団を明確に定めること，それには母集団に共通の性質（C）を見

定めること，さらに，そのような母集団における変動を観ようとする観点（X）に標的をしぼり，条件（C）と観点（X）との間の関連性を探究する目的で統計的観察を行なえと前に述べた．しかし，母集団全体について観点（X）からの変動の様子を探るという場合よりも，母集団の一部分である標本に関する情報を基にして，母集団全体についての結論を推論するという場合の方がはるかに多いし重要であるからこそ，確率の議論が有用になることも述べた．

したがって，このような手段で得た結論には，絶対に真であるとの保証を与えることは不可能であるし，100% 正しい結論を得ようとすることは，実際的見地からは割に合わない．

統計的方法を適用することの是非や，どの程度の精度にすべきかを決める問題は，母集団に関する情報の多少や，そこで用いることのできる統計手法の性格，または実際面の諸条件などによって変わってくる．一般に，いかに強力な統計理論が用意されていても，母集団に関する情報が何もないまま標本を用いて母集団に関する推論を行なおうとしても無理である．何にでも効く万能薬が特効薬とはなり得ないように，適用範囲の広いといわれている統計的方法も，それだけに頼っていたのでは，あまり役に立つものではない．

統計的方法を有効に用いるためには，まず，できる限り母集団の構造をはっきりさせること——これはむしろ統計以前の問題なのだが——，次に統計的方法によりさらにはっきりさせる範囲がどの部分であるか，を認識することがたいせつである．それには，確率の考えに基礎をおいた各種統計手法の性格や限界を，事前に理解しておかなければならない．統計的な観察を通して種々の現象を客観的に把握し，いろいろな統計的方法を有効に駆使して的確な判断をくだせるよう論理的に思考することが**統計的なものの考え方**であるといえる．

出版されている多くの統計関係の書をみると，いろいろな種類の方法が難解そうに記述されているが，最も有用で基本的な手法の多くは単純明解で，しかもほとんどすべての応用分野に関して共通のものであることをも認識し

ていただきたい．本書で扱っている内容のほとんどが，このような普遍的な方法であり，統計的に考える力を養っていただくことを眼目においている．

統計的推論の形式

統計的方法を有効に用いるためには，母集団の構造をできるだけはっきりさせる，つまり，統計を用いる以前の問題を解決しておくことがたいせつであることを前に述べた．それではどのような方向に母集団構造を定めれば，うまく統計を用いることができるだろうか．

統計的推論が行なわれる——統計の理論に基づいて標本からその源泉である母集団に関しての結論が帰納される——際の基本的なパターンとしては，母集団の観点（X）からの変動の様子に関してある種の特性——**パラメタ**と呼ばれる——だけがわかれば，当面の問題は解決されるという形式にもちこむことである．通常パラメタとしてとりあげられるものに，変動の様子を一言で表現できる**平均**であるとか，変動の程度を示す**分散**といったものが考えられる．たとえば，ある母集団の観点（X）からの変動の様子を考えるとき，測定値全体は正規分布に従うという事実が，観測値を得る以前にわかっているとしよう．しかし，平均とか分散を示すパラメタの値については（またはいずれか一方のパラメタについては）わからないとする．この母集団からある種の基準により標本という一部分を選びだし，それに関する観測値（$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$）を得る．このようなとき，“観測値（$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$）は平均，分散未知の（またはいずれか一方が未知の）正規母集団からの標本である” といった表現をする．与えられた問題がこのような形式に記述されて初めて，統計的方法が有力な道具として活用されるようになる．このように，母集団のあるパラメタにだけ標的をしぼって，標本から母集団に関する結論を推論する形式のものを**パラメトリックな推論**と呼ぶ．今日までに開拓されている統計手法を利用して，ある程度積極的な結論を得ようとするならば，問題をこのようなパラメトリックな形式にもちこめるようにすることが得策であろう．

パラメトリックな推論には，大きく分けて2つのタイプが考えられる．その1つは，母集団に関するパラメタを**推定**する問題で，もう1つは，母集団のあるパラメタに関する仮説を**検定**する問題である．たとえば，“正規分布をするとみなされる母集団の平均を示すパラメタがどの範囲にあると考えられるか”は最初の推定の問題であり，“2グループに対応する測定値の分布には，いずれも正規分布をあてはめてよいことがわかっているが，2グループから標本を選んで調べた結果では，平均の間に若干の差異を生じた．これは母集団の間に関してもそのまま帰納して結論できるだろうか”は検定の問題になる．

いずれのタイプの問題にせよ，同じコストを投じて問題を解決しようとする限り，精度をよくしようとすると結論があまくなるし，よりはっきりした結論を出そうとすると精度が悪くなる．（推定問題の場合で表現してみると，的中率をよくしたければ推定幅を大きくとらなければならないし，推定幅を狭くとれば，的中率が悪くなるということである．）

統計的方法の本質

以上の説明で，統計的方法というものの概略が理解いただけたと思うが，最後に，統計的方法の性格と応用の際の限界といったものについて，簡単に触れておこう．

われわれがたまに芝居をみたりするとき，主役の言動にだけ関心が集中し，脇役の活躍をつい忘れ勝ちになるのではないだろうか．脇役の主な任務が主役の引き立て役だったり，芝居全体を通じての調節役だったりというぐあいに，その活躍の仕方が地味なためもあろう．しかし，だれでも芝居の中での脇役の重要性を認めないわけにはいかないだろう．統計的方法とは，このような脇役的性格のものであることを銘記しなければならない．もちろん，統計を使おうと考えている各分野での独自の理論が主役であることも．

ところが最近，“統計的方法によりかく結論した”といったような議論をあちこちで見聞きするようになった．統計がこのようにはでに喧伝され，—

躍スター的地位にのし上がったために，統計を主役のように勘違いする人が多くなったのではないだろうか．統計という脇役的性格のものを主役のように演出したら，せっかくの芝居もだいなしになってしまうであろう．

“どうもよくわからないから，統計を使えばうまく説明ができるのでは……”といった期待をもっている人に出あうことがある．このような期待は，統計的方法の限界をよく理解していない人のものであり，直感で感じとれない程度の変異に関しては，統計的方法もやはり敏感になり得ないのである．一般に，統計的方法が主として関与して得られる結論の部分に，それほど大きな飛躍を期待してもむりなのである——脇役の活躍だけで芝居の進行が大きく変動することがないように．

最後に，統計というものに対するイメージをとり違えている典型的な3つのタイプを紹介し，本書の読者がいずれのタイプにもならないよう念ずる次第である．

(1)　統計を使えば何でも結論づけられると信じているタイプ．

(2)　データを集めてしまってから統計を用いて結論しようと統計の本を開いたり専門家のところに伺候するタイプ．

(3)　統計など数学を知っていればすぐ理解できると信じ，統計家の養成など不要であると決めつけるタイプ．

1

データの見方・まとめ方

■ 情報化時代といわれている今日，**データ**（資料）は非常に価値のあるものである．ただし，そのもつ意味を正しく認識できて初めてその価値が評価される．

例題 1 棒グラフ

次の表は，貨幣を 10 回続けて投げるという実験を 100 組行なった結果を

○○××○ ○○○×× 6	×○○×○ ××××○ 4	○○××○ ○○○×○ 7	○×○×○ ○○○○○ 8
○○○×○ ××○○○ 7	×○○×× ××○○× 4	○○×○× ○×○×× 5	×○×○○ ○○××○ 6
×○○×× ×○×○○ 5	○×××○ ○××○○ 5	○○××× ×××○× 3	○○××○ ×○○×× 5
○×○○× ×○×○× 5	×○×○× ○×××○ 4	××××○ ○○××× 3	○○○○○ ×○××× 6
○×○×× ×○○×○ 5	○×○○○ ××○×× 5	○×○○○ ×○××○ 6	○○××○ ××○×× 4
××○×○ ○×○×× 4	○×○○× ○×○○○ 7	××××○ ×○××× 2	○×○○○ ×○○×○ 7
○○×○× ○○○○○ 8	×○×○○ ○×○○○ 7	×××○○ ○○○×○ 6	×○×○× ○○×○○ 6
××××○ ×○○○× 4	○××○○ ×○××× 4	××○○○ ○××○× 5	○○○○○ ○○○○× 9
○×○○× ○×××× 4	○○×○× ○××○× 5	○×○○○ ○○○○× 8	○○×○○ ××○○× 6
××××○ ○○○○× 5	○×○×× ○×××× 3	○○○×× ○○×○○ 7	×○○○○ ×××○× 5
○○××○ ××××× 3	×○○○○ ×○××× 5	○×○×○ ○○○×× 6	○○××× ××○○× 4
○○××○ ○○○×○ 7	×○×○× ×××○× 3	○×○○○ ××××○ 5	○○×○× ×○○×× 5
××××× ○○×○× 3	××○○○ ○×××○ 5	○○××○ ×○○○○ 7	××○×× ×××○○ 3
○×××○ ×○○×× 4	○××○× ○××○× 4	○○○×× ○×○○○ 7	○○○×× ○○××○ 6
×○○○○ ××××× 4	××××× ○○○×○ 4	○○○×× ×○×○× 5	○××○× ○○×○× 5
○××○○ ×○○×○ 6	×○×○○ ○×○○○ 7	○○××○ ××○×× 4	××○○× ○○○×○ 6
××○○○ ×○×○× 5	××○×× ×○○×○ 4	×○××× ○×○○○ 5	×○××× ××○○× 3
×○××× ○×××○ 3	○○○○× ×○○×○ 7	××○○× ○○○○× 6	○××○× ○×○×× 4
○×××× ○○××× 3	××○×× ○×○×○ 4	×○○○× ×○○×○ 6	×○××× ××××○ 2
××○×× ×○○×× 3	×○××○ ×○○○× 5	×○○○× ×○××× 4	○×××○ ○×○○× 5
○○××○ ○×○○× 6	○××○○ ○×○○○ 7	×××○× ○○○×× 4	×○×○○ ○○××○ 6
×○××× ○○×○○ 5	××○○× ×○○×○ 5	×○○×○ ×○×○○ 6	×○○○○ ×○××× 5
××○○○ ×○××× 4	○××○○ ×○○×○ 6	××○×× ○○×○× 4	××○○○ ○○×○○ 7
○○○×× ××○×× 4	××○×○ ×○×○○ 5	××○×× ○○×○○ 5	○○○×○ ×○××○ 6
○×○○× ×○○○× 6	×○×○× ○×○○○ 6	○××○× ○××○× 4	×××○× ○○××× 3