Б. Л. ван дер Варден

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Б. Л. Ван дер Варден
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Редактор *В. И. Битюцков*
Художник *И. В. Богдашевский*
Художественный редактор *А. В. Вилленева*
Технический редактор *А. Г. Резоухова*
А. П. Иванова

Сдано в производство 11/II 1959 г.
Подписано к печати 11/II 1960 г.
Бумага 60 × 92 $^1/_{16}$ = 13,6 бум. л.
27,2 печ. л.
Уч.-изд. л. 25,3. Изд. №1/4463
Цена 19 р. 20 к. Зак. 1062

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва, Ново-Алексеевская, 52.

Едьетеми Нйомда, Будапешт.

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Готовятся к печати следующие книги

Файнстейн А., **Основы теории информации,** Нью-Йорк, 1958, перевод с английского, 10 изд. л.

Теория информации — молодая математическая дисциплина — с каждым годом привлекает к себе все большее внимание. Она возникла из некоторых задач теории связи, а затем нашла применение в самых разнообразных отраслях техники.

Интуитивно найденные глубокие результаты теории информации сравнительно долгое время оставались без строгого математического обоснования. Работа по обоснованию и дальнейшему развитию теорию информации велась и ведется как в Советском Союзе, так и за рубежом. Книга представляет собой первую монографию по теории информации, в которой в отличие от имеющихся монографий, более технических по своему содержанию, дается математически строгое изложение предмета. Автор является одним из ведущих зарубежных специалистов в этой области, ему принадлежит ряд оригинальных результатов.

Книга интересна для математиков — специалистов по теории вероятностей, а также для всех лиц, желающих ознакомиться с математическим изложением теории информации.

Лоэв М., **Теория вероятностей,** Нью-Йорк—Торонто—Лондон, 1955, перевод с английского, 28 изд. л.

Книга представляет собой обширный курс современной теории вероятностей, написанный не высоком теоретическом уровне. На базе теории меры автор развертывает картину теории вероятностей: изучает случайные события, случайные величины и их последовательности, функции распределения и характеристические функции, предельные теоремы теории вероятностей и многое другое. Даются приложения к физике (статистики Бозе—Эйнштейна и Ферми—Дирака). Изложение сопровождается большим количеством задач разной степени трудности. В русском издании будут учтены исправления и дополнения, внесенные автором в подготовляемое им второе английское издание.

Книга рассчитана на студентов и аспирантов математиков, изучающих теорию вероятностей. Может быть полезна физикам-теоретикам, желающим совершенствовать свои знания по теории вероятностей.

И * Л

Издательство

иностранной

литературы

*

MATHEMATISCHE STATISTIK

von

Dr. B. L. VAN DER WAERDEN
Professor der Mathematik an der Universität
Zürich

SPRINGER — VERLAG
BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Б. Л. ван дер Варден

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Перевод с немецкого
Л. Н. БОЛЬШЕВА

Под редакцией
Н. В. СМИРНОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва, 1960

АННОТАЦИЯ

Эта книга знакомит читателя с основами математической статистики. Ее автору, известному ученому ван дер Вардену, удалось, не поступаясь математической строгостью, построить свое изложение таким образом, что для чтения книги не требуется знакомства ни с какими специальными разделами математики. Многочисленные примеры, иллюстрирующие применение математической статистики к разного рода научным и практическим задачам, представляют значительный интерес.

Книга принесет большую пользу как специалистам-прикладникам, использующим в своей работе методы математической статистики, так и научным работникам, аспирантам и студентам, специализирующимся в этой области.

Редакция литературы по математическим наукам

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ПЕРЕВОДУ

По мере того как из года в год расширяется область приложения математической статистики, заметно возрастает спрос на различного типа руководства по этой дисциплине. Большинство из руководств ориентируется в первую очередь на потребности имеющихся тех или иных специалистов-прикладников (экономистов, агрономов, биологов, медиков, физиков, инженеров-производственников и т. д.). В книгах такого типа статистические методы применяются в тех или иных конкретных случаях, а задача математического обоснования этих методов остается в стороне. Эта последняя задача рассматривается в сравнительно небольшом числе книг, рассчитанных главным образом на лиц, специализирующихся в области теории вероятностей и математической статистики (научных работников, студентов и аспирантов математических факультетов и т. п.).

Эти книги по своему объему, по детальности изложения и по уровню применяемого математического аппарата трудно доступны научным работникам и инженерам, занимающимся приложениями статистики. Между тем широкое проникновение математической статистики в различные науки и отрасли техники требует руководства особого типа, в котором рассматривались бы *общие постановки задач статистики* в форме, доступной для неспециалистов.

К такого рода книгам относится и выпускаемая в русском переводе «Математическая статистика» известного ученого Б. Л. ван дер Вардена (автора курса «Современная алгебра», получившего мировую известность).

Рассматривая свою книгу лишь как введение в современные статистические теории, автор ограничивает свою задачу изложением вполне сложившихся отделов математической статистики, оставляя в стороне менее разработанные, но, пожалуй, наиболее характерные для современного этапа развития науки проблемы последовательного анализа, теории решающих функций и статистику случайных процессов. В сжатом, но мастерском изложении автор наряду с теоретико-вероятностными основами статистики знакомит читателя с теорией статистической оценки параметров и проверки гипотез, простейшими схемами дисперсионного анализа и теории корреляции. В трактовке этих классических задач и методов автору удалось найти во многих случаях новый нетрадиционный подход, значительно облегчающий их понимание и усвоение. Как интересные новинки следует отметить теорию несмещенных оценок (гл. VIII), развитую у нас в работах А. Н. Колмогорова и примененную им к некоторым практически важным задачам приемочного контроля; теорию некоторых новых непараметрических тестов (критерий Вилкоксона, X-тест и др.) (гл. XII), сопровождаемую поучительным исследованием их мощности, и, наконец, теорию ранговых коэффициентов корреляции (гл. XIII).

В книгу вошло много примеров из практики, частью составлявших предмет консультаций, которые давались автором специалистам-прикладникам, частью заимствованных из специальных работ, главным образом по генетике, агрономии, медицине. Бегло и несколько поверхностно рассмотрены простейшие приложения математической статистики к изучению экономических явлений.

Переводчиком Л. Н. Большевым устранены некоторые неточности немецкого текста и в ряде случаев введены пояснения к примерам, слишком лаконично сформулированным автором.

Н. В. Смирнов

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга является результатом многолетней деятельности по практическому применению статистики. Со студенческих лет мне постоянно приходится иметь дело с экономистами, медиками, философами, биологами и инженерами, обращающимися ко мне со статистическими вопросами. Изучая литературу и размышляя, я знакомился все с лучшими и лучшими методами. Данная книга посвящается обоснованию этих методов и их применению к возможно наиболее поучительным примерам из области естествознания и социологии. Это позволит, как я надеюсь, уберечь читателя от тех или иных ложных путей, которыми я сам шел вначале. Примеры не являются искусственной конструкцией над теорией, а заимствованы из практики, поэтому некоторым примерам необходимо было предпослать обстоятельное объяснение.

Основные математические понятия я излагаю по возможности кратко и, смею надеяться, понятно. В некоторых случаях оказываются необходимыми длинные теоретические выводы, однако там, где это представляется возможным, более трудные доказательства будут заменяться ссылками на существующие хорошие учебники. Не имеет смысла вновь развивать математические теории, обстоятельно и ясно изложенные Колмогоровым, Каратеодори и Крамером.

Предполагается, что читателю известны элементы теории функций и теории интеграла Лебега. Это, конечно, не означает, что без такой подготовки читатель не сможет понять эту книгу: он должен будет лишь некоторые теоремы принять без доказательства или ограничиться изучением тех более элементарных разделов, в которых предполагаются известными только дифференциальное и интегральное исчисления и аналитическая геометрия (гл. I—IV и X—XII).

Эту книгу следует рассматривать лишь как введение в математическую статистику, не претендующее на полноту изложения. Многие важные разделы теории, такие, как последовательный анализ, теория решающих функций и вероятностные процессы, автор вынужден был целиком опустить. Этим теориям посвящены специальные труды выдающихся специалистов, например

Wald A., Sequential analysis (Wiley), New York, 1947;

Wald A., Statistical decision functions (Wiley), New York, 1950;
Doob J. L., Stochastic processes (Wiley), New York, 1953[1].

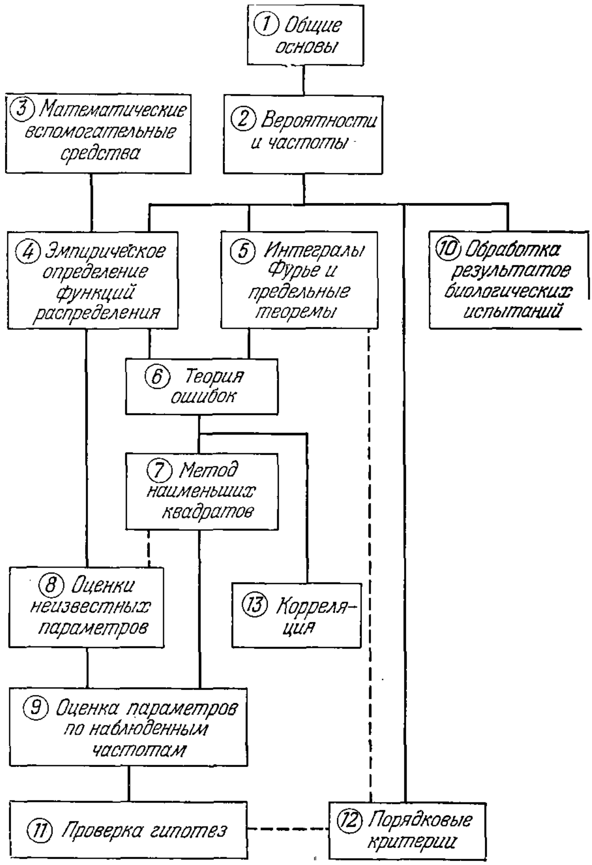
Дальнейшая литература указана во многих местах книги, причем ссылки делаются там, где это представляется удобным или полезным — непосредственно в тексте или в подстрочном примечании. Новая мода на литературные ссылки в конце главы или даже в конце книги неизбежно влечет за собой пугающую необходимость постоянного перелистывания страниц. Я не стремился к единообразию литературных ссылок и избегал чрезмерных сокращений.

Первая редакция этой книги возникла в 1945 г. Она служила пособием для курса теории ошибок и статистики в лаборатории нефтяной компании «Роял дач Шелл» в Амстердаме. Последующая редакция была критически прочитана доктором Е. Бачелетом (Базель). Ему, а также профессору Е. Л. Леману (Беркли) я очень благодарен за чрезвычайно ценные замечания. Я благодарен также г-ну Х. Р. Фишеру и г-ну Е. Нивергельту (Цюрих) за выполнение рисунков и участие в правке корректур.

Сентябрь 1956. *Б. Л. ван дер Варден*

---

[1] Имеется русский перевод: Дуб Дж. Л., Вероятностные процессы, ИЛ, М., 1956. — *Прим. перев.*



Логическая структура книги.

Штриховые линии указывают, что для понимания соответствующих глав изучение предшествующих глав полезно, но не является необходимым.

ВВЕДЕНИЕ

В старых трудах о количественных закономерностях в массовых совокупностях понятия частоты, среднего значения, дисперсии и т. д. развивались лишь для конечной совокупности. О понятии бесконечной совокупности не возникало и мысли. Английские и американские статистики, напротив, каждую статистическую совокупность воспринимают принципиально как случайную выборку из неограниченной совокупности возможностей. Частота события в этом понимании является лишь оценкой для *вероятности* события, а эмпирическое среднее (выборочное среднее) — оценкой для идеального *среднего значения*, или *математического ожидания*. С этой точки зрения узловым вопросом математической статистики является вопрос: *как далеко могут отклоняться величины, вычисленные по выборке, от соответствующих идеальных значений*?

Так сложилось к настоящему времени убеждение в необходимости построения математической статистики на основе теории вероятностей.

Теория вероятностей как точная математическая теория в надлежащем объеме впервые была построена А.Н. Колмогоровым. В дальнейшем мы будем опираться на аксиоматику Колмогорова, не заботясь о происхождении понятия вероятности. Эта теория, построенная чисто математически, оправдывается в приложениях так же хорошо, как Эвклидова геометрия или Ньютонова механика; этого вполне достаточно. Философское объяснение понятия вероятности, несомненно, интересно и важно, однако оно едва ли уместно в таком учебнике, как этот.

Логическая структура этой книги изображена в приведенной выше схеме.

Главы I—VI посвящены аксиоматике теории вероятностей по Колмогорову и ее различным статистическим приложениям, в том числе теории доверительных границ для неизвестной вероятности и доверительной зоны для неизвестной функции распределения, различным простым вариантам критерия χ^2, гауссовой теории ошибок и критерию Стьюдента. В главах I, III и V излагаются вспомогательные математические средства; гл. II, IV и VI посвящены статистическим приложениям.

Центральную часть книги образуют два больших, взаимно связанных раздела: Теория оценок (гл. VII—IX) и Теория проверки гипотез (гл. XI, XII).

Отправным пунктом теории оценок является способ наименьших квадратов, развитый Гауссом. Гаусс указал два обоснования этого способа. Первое из них формулируется так: наивероятнейшим значением неизвестного параметра является такое значение, для которого вероятность наблюденного события будет наибольшей. Второе обоснование, которому сам Гаусс отдавал предпочтение, исходит из того требования, что оценки должны иметь возможно меньшие средние ошибки.

Р. А. Фишер распространил оба этих обоснования на значительно более общие проблемы отыскания оценок. Требование наибольшей вероятности наблюденных значений приводит к оценкам наибольшего правдоподобия, а требование наименьшей средней ошибки — к понятию эффективных оценок. В широком классе случаев принцип максимального правдоподобия приводит действительно к эффективным оценкам. Уточнение этого понятия и точные доказательства по Фреше, Рао, Леману и Шеффе будут даны в гл. VIII, а применения к наблюденным частотам — в гл. IX.

Современная теория проверки гипотез берет свое начало от критерия χ^2 Пирсона и критерия t Стьюдента. Р. А. Фишер расширил область применения этих методов. Он ввел понятие «степеней свободы» и вскрыл взаимосвязь с теорией оценок, указав на то, что в критерии χ^2 следует пользоваться только эффективными оценками. Точные доказательства его утверждений даны Нейманом и Е. Пирсоном. Ими сформулированы также общие принципы, лежащие в основе современной теории критериев. Все это будет изложено и пояснено на примерах в гл. XI.

В теории ранговых критериев (гл. XII) также выявляется ценность этих принципов. Однако математические вспомогательные средства, необходимые для понимания этой главы, здесь много скромнее: они главным образом ограничиваются материалом гл. I и II и предельной теоремой из гл. V.

Обработке результатов биологических испытаний посвящена гл. X. И хотя здесь речь идет о задаче теории оценок в смысле гл. VIII, подготовительный материал также исчерпывается содержанием гл. I и II.

Заключительная гл. XIII посвящена коэффициентам корреляции и ранговой корреляции. Как видно из схемы логической структуры книги, здесь предполагается известным лишь содержание гл. I—VI.

ГЛАВА I

ОБЩИЕ ОСНОВЫ

Изучение этой главы безусловно необходимо.

§ 1. Основные понятия теории вероятностей

А. ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЕ РАЗЪЯСНЕНИЕ И ПРИМЕРЫ

В теории вероятностей рассматриваются *события,* наступление которых зависит от случая и *вероятности,* которые могут быть выражены числами.

Понятие вероятности является *статистическим* понятием. Для выяснения статистического смысла этого понятия следует многократно реализовать те условия, при которых может осуществляться определенное событие, и установить, с какой *частотой* это событие осуществляется. Если вероятность осуществления события равна p, то это означает, что в ряду из n таких повторений событие наступает в среднем np раз. Конечно, число наступлений события совершает колебания около среднего значения np, которые мы позже оценим точнее.

События обозначаются большими буквами $A, B, \ldots$. Введем следующие обозначения.

AB (читается: A и B) — событие, которое осуществляется тогда и только тогда, когда A и B осуществляются одновременно.

$\bar{A}$ (читается: отрицание A) — событие, которое осуществляется тогда и только тогда, когда не происходит событие A.

E — событие, которое осуществляется всегда.

$A \dotplus B$ (читается: A или B) — событие, которое осуществляется тогда и только тогда, когда осуществляется либо A, либо B, либо оба эти события одновременно.

Если A и B несовместны, т. е. не могут осуществляться одновременно, то вместо $A \dotplus B$ пишут $A + B$ (читается опять: A или B). Аналогично в случае любого конечного, а также и бесконечного числа попарно несовместных событий

$$\sum_1^n A_i = A_1 + \cdots + A_n,$$

$$\sum_1^\infty A_i = A_1 + A_2 + \cdots .$$

Вероятность события A обозначается $\mathsf{P}(A)$. Следующие примеры поясняют употребление этих понятий.

Пример 1. Игральная кость бросается три раза. Событиями являются все мыслимые результаты таких бросаний, как, например, (6, 1, 1), или все комбинации таких результатов, связанные словом «или»: например, «(6, 1, 1) или (4, 5, 6)» является событием, а именно суммой событий (6, 1, 1) и (4, 5, 6). Вероятность выпадения 6 очков при первом бросании не обязательно равна $^1/_6$: кость может оказаться фальшивой и иметь случайные неправильности. Если она приближенно симметрична и однородна, то разумно предположить, что вероятность близка к $^1/_6$. В противном случае эту вероятность можно приближенно определить лишь с помощью большого числа бросаний кости, установив, сколь часто при этом выпадают 6 очков.

Пример 2. Производится стрельба по мишени. Идеализируя действительность, предположим, что пробоина в мишени является точкой и что мишень всегда поражается. Событием является попадание в какую-нибудь ограниченную часть мишени. *Каждой частичной области мишени соответствует, таким образом, событие, в частности, всей мишени — событие E.* Вероятность любого такого события тем больше, чем больше площадь соответствующей области, а также чем ближе к середине лежит эта область: целятся ведь в середину мишени. Попадание в отдельную точку также является событием, но вероятность этого события равна нулю, так как точка не имеет площади. Если события A и B соответствуют определенным областям мишени, то сумма $A \dotplus B$ соответствует объединению обеих областей, а произведение AB — их пересечению.

Б. СОБЫТИЯ

Если желательно математически уточнить употребление формальных операций AB, $\bar{A}$, $A \dotplus B$ и $A + B$, то имеются два пути: поле событий можно рассматривать либо как булевскую *алгебру*, либо как *тело множеств*.

В первом понимании «события» являются неопределяемыми объектами, и указанные операции должны лишь удовлетворять определенным аксиомам (см. C. Carathéodory, Maß und Integral, Basel, 1956).

Во втором понимании «события» являются подмножествами множества E, причем AB является пересечением, $\bar{A}$ — дополнением, $A \dotplus B$ — объединением.

Оба подхода эквивалентны, так как по известной теореме Стоуна[1] каждая булевская алгебра изоморфна некоторому телу множеств. Первый подход, может быть, естественнее (см. Kappos D. A., Zur mathematischen Begründung der Wahrscheinlichkeitstheorie, Sitzungsber. Bayer. Akad. München, 1948), но второй математически проще. Поэтому, следуя Колмогорову[2], мы будем все «события» трактовать как множества «элементарных событий».

---

[1] См. Stone M. H., Trans. Amer. math. Soc., 40 (1936), 37, или Hermes H., Einführung in die Verbandstheorie, Springer-Verlag, 1955, § 20.

[2] См. Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, ОНТИ, М., 1936, а также Reichenbach H., Wahrscheinlichkeitslehre.