ОУ

И.Д. МОЗОРОВ

МАТРИЧНЫЕ РАСЧЕТЫ В СТАТИСТИКЕ

ФИНАНСЫ И СТАТИСТИКА

МАТРИЧНЫЕ РАСЧЕТЫ В СТАТИСТИКЕ

МОСКВА
"ФИНАНСЫ И СТАТИСТИКА"
1983

ББК 65.051
М74

РЕЦЕНЗЕНТЫ

Г. Л. ГРОМЫКО, Л. А. КАРАСЕВА, Н. К. ДРУЖИНИН

Мозоров И. Д.

М74 Матричные расчеты в статистике. — М.: Финансы и статистика, 1983. — 216 с.

В пер. 2 р. 60 к.

В матричной форме изложены правила и приемы основных методов статистического анализа, а статистические показатели (средние величины, вариация и др.) представлены в виде структурных матриц. Внедрение в практику матричных расчетов создает условия для эффективного использования ЭВМ при обработке статистических данных.

Для статистиков, экономистов и специалистов, применяющих в работе методы статистического анализа.

$М\ \frac{1702060000-135}{10(01)-83}$ 16—83

ББК 65.051
31

Иван Дмитриевич Мозоров

МАТРИЧНЫЕ РАСЧЕТЫ В СТАТИСТИКЕ

Науч. редактор **Ю. И. Аболенцев**

Зав. редакцией **Р. А. Казьмина** Редактор **Л. Н. Вылегжанина**

Мл. редакторы **А. В. Щурова, В. Л. Долгова, О. А. Микешина, Е. М. Курносова**

Техн. редакторы **Г. А. Полякова** и **И. В. Завгородняя**

Корректоры **Т. М. Колпакова, Л. Г. Захарко**

Худож. редактор **М. К. Гуров** Переплет художника **Л. Н. Наумова**

ИБ № 1311

Сдано в набор 29.03.83. Подписано в печать 20.10.83. А07131. Формат 60×90 1/16. Бум. тип. № 1 Гарнитура «Литературная». Печать высокая. Усл. п. л. 13,5 Усл. кр.-отт. 13,5 Уч.-изд. л. 14,91 Тираж 3400 экз. Зак. 1488. Цена 2 р. 60 к.
Издательство «Финансы и статистика», 101000, Москва, ул. Чернышевского, 7

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома
при Государственном комитете СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
129041, Москва, Б. Переяславская ул., д. 46

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Матричную алгебру справедливо считают арифметикой высшей математики. Матрицы — прежде всего аппарат создания удобных и легко воспринимаемых обозначений. Кроме того, матричная алгебра является своеобразной теорией и методом исследования.

Оставив задачу рассмотрения теории матриц для специалистов-математиков, обратим внимание читателя на приложения ее результатов в статистике.

Известно, что статистические задачи в наиболее интересных для теории и важных для практики постановках сопряжены с необходимостью описания взаимодействия сложных экономических структур, их состояния и динамики. При этом чаще всего задачи описания имеют своим продолжением установление взаимосвязи между анализируемыми явлениями, что влечет за собой использование в анализе множества факторов. Любое исследование такого рода предполагает количественный анализ с применением математических методов. Здесь и возникает одна из центральных проблем исследования — проблема удачной формулировки задачи, от которой нередко само решение становится очевидным.

Удачная математическая формулировка экономико-статистической задачи с большим массивом исходных данных и наличием нескольких предпосылок невозможна без их соответствующего преобразования с помощью принятой в математике символики. Поскольку же статистическое исследование в основе своей позволяет оперировать линейными преобразованиями, то наиболее подходящим инструментом таких преобразований служат матрицы.

Отметим достоинства линейных преобразований словами авторов популярного руководства по матричной алгебре в экономике С. Сирла и У. Госмана: «Операции с матрицами не слишком громоздки и не требуют чрезмерно кропотливой работы; напротив, матричную алгебру во многих случаях ценят именно за краткость, простоту и ясность. Кроме того, особенно привлекателен почти универсальный характер матричных выражений ... с помощью матричной алгебры можно выразить в математической форме многие задачи, как большие, так и малые, независимо от их размерности» [69, с. 8]. Таким образом — компактность, простота и ясность формулировки задачи независимо от ее размерности, т. е. достижение того, что было обозначено выше в качестве одной из центральных проблем статистического исследования. Если к этому еще добавить, что число исходных данных никоим образом не отражается на формализации метода анализа данных, то становится очевидной перспективность применения матричной алгебры в условиях функционирования быстродействующих электронно-вычислительных машин.

Все сказанное выше о достоинствах применения матричной алгебры в статистике относится только к одной, хотя и безусловно важной, стороне анализа — его технике. Замечательным свойством применения матричного исчисления в статистике является более четкое представление содержательной стороны выполняемого анализа, возможность дальнейшего развития теоретических представлений о сущности известных статистических характеристик (средняя, дисперсия, коэффициент корреляции и т. п.). Покажем это на примере средних.

Известно, что средняя арифметическая представляет собой сумму последовательности чисел анализируемого ряда, деленную на количество этих чисел. Если отдельные числа повторяются, то исходный ряд может быть преобразован в частотный и среднюю удобно исчислить как среднюю арифметическую взвешенную. Результат от этого не изменится. Рассмотренное положение на языке матричной алгебры запишется так:

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \sum\limits_{i=1}^{n} p_i - n \sum\limits_{i=1}^{n} a_i p_i}{n \sum\limits_{i=1}^{n} p_i} = 0 \begin{cases} \text{при } p_i = 1 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} p_i = n \end{cases},$$

где a_i — вектор-строка значений признака; p_i — вектор-столбец частоты повторяемости отдельных значений признака a ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Известное неравенство между средней арифметической и средней геометрической

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} f_i} \geqslant \sqrt[\sum\limits_{i=1}^{n} f_i]{\prod_{i=1}^{n} x_i^{f_i}},$$

впервые доказанное Коши, становится почти очевидным, если учесть, что x_i преобразуется в вектор-строку a_i, а частота f_i — в вектор-столбец частости b_i, и тогда

$$\bar{a}_{\text{ар}} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i; \ \lg \bar{a}_{\text{геом}} = \sum_{i=1}^{n} \lg a_i b_i.$$

Более подробное изложение подобного рода вопросов читатель найдет, ознакомившись с настоящей книгой. Эта книга — путеводитель исследователя социально-экономических явлений, желающего познать первоосновы применения матричного исчисления в статистике. Именно поэтому ее автор каждое рассматриваемое теоретическое положение сопровождает расчетным примером, близким практике анализа социально-экономических явлений. Вместе с тем в книге содержится материал исследовательского характера, усвоение которого потребует от читателя дополнительного обращения к литературным источникам по теории статистики и матричной алгебе.

Кроме приведенных в библиографии автора литературных источников по матричной алгебре, можно рекомендовать следующие работы: Р. Беллман «Введение в теорию матриц» (М., Наука, 1976), И. Гелфанд «Лекции по линейной алгебре» (М., Наука, 1972), А. Г. Курош «Курс высшей алгебры» (М., Наука, 1971), Д. К. Фаддеев и В. Н. Фаддеева «Вычислительные методы линейной алгебры» (М., Физматгиз, 1960). Читателю, заинтересующемуся более углубленной проработкой вопросов применения матричной алгебры в регрессионном и дисперсионном анализе (гл. 5 и 6 настоящей книги), целесообразно ознакомиться с содержанием достаточно доступной широкому кругу читателей книги Н. Дрейпера и Г. Смита «Прикладной регрессионный анализ» (М., Статистика, 1973) и гл. X—XII уже упоминавшейся работы С. Сирла и У. Госмана. После этого можно приступить к чтению литературы, освещающей вопросы регрессии на более строгом уровне.

Достоинством настоящей книги является то, что ее автор не пошел по пути изложения собственно теории матриц или теории статистики с добавлением к одной из них элементов другой. Он выбрал путь целенаправленного изложения самого существа метода, последовательно демонстрируя инструментарий матричного преобразования, а затем и матричного исчисления в статистике.

Не все главы книги равноценны. Например, гл. 5, посвященная регрессионному анализу, не содержит очень важных для регрессий приложений теории матриц (анализ собственных значений, характеристические уравнения, устойчивость параметров регрессии). Встречаются в работе и спорные утверждения.

В целом книга И. Д. Мозорова представляет собой оригинальный труд, включающий в себя ценные для теории и практики статистического анализа результаты, изложенные на доступном широкому кругу исследователей уровне, и вызовет большой интерес у читателей.

Ю. И. Аболенцев

Глава 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СОДЕРЖАЩИХ СТАТИСТИЧЕСКУЮ ИНФОРМАЦИЮ МАТРИЦ

1.1 ОСОБЕННОСТИ МАТРИЦ

Матрица представляет собой прямоугольный (в частных случаях квадратный) массив чисел, образующих строки и столбцы, которые соответственно имеют одинаковые размеры. Строки и столбцы матрицы нумеруются порядковыми числами и обычно обозначаются: строки символом $i = 1, 2, 3, ..., n$ (n — число строк в матрице), столбцы символом $j = 1, 2, 3, ..., m$ (m — число столбцов в матрице). Каждое число массива называется *элементом* матрицы и обозначается определенным символом с двумя подстрочными индексами, например a_{ij}, где первый подстрочный индекс обозначает номер строки, а второй — номер столбца. Эти индексы облегчают нахождение числа в массиве. Для указания того, что данный массив чисел — матрица, его заключают в круглые или квадратные скобки или справа и слева очерчивают двумя линиями. В случаях, когда матрицу достаточно записать не развернуто, а компактно, ее обозначают прописной полужирной буквой. Типовой элемент матрицы обозначают строчной буквой с подстрочными индексами, выраженными символами, заключенной в фигурные или круглые скобки или между двойными линиями. Количеством строк и столбцов определяется размер матрицы, который при равном количестве строк и столбцов называется *порядком* матрицы.

Каждая строка и каждый столбец записанных в виде матрицы данных в экономике имеет определенный смысл. Пусть мы имеем следующие данные (табл. 1.1) о затратах на эксплуатацию одного экземпляра машин и механизмов за средний срок их службы (тыс. руб).

Таблица 1.1

Виды эксплуатационных работ	Виды машин и механизмов			
	эо-3334	эо-6115	КС-5363	КС-6362
Техническое обслуживание	3,5	8,7	10,7	13,0
Капитальные ремонты	18,0	70,2	21,0	19,0
Текущие ремонты	10,6	33,7	75,9	92,1

Этот массив чисел можно записать в виде матрицы

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3{,}5 & 8{,}7 & 10{,}7 & 13{,}0 \\ 18{,}0 & 70{,}2 & 21{,}0 & 19{,}0 \\ 10{,}6 & 33{,}7 & 75{,}9 & 92{,}1 \end{pmatrix}.$$

В данном примере мы имеем матрицу **A**, состоящую из трех строк и четырех столбцов, т. е. матрицу размером 3×4. Ее символическая развернутая запись приведена выше, а компактная запись такова: $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$, или $\mathbf{A} = (a_{ij})$, или $\mathbf{A} = \|a_{ij}\|$. Каждый столбец этой матрицы характеризует состав эксплуатационных затрат на средний срок службы одного экземпляра определенного вида машин, а каждая ее строка — затраты на один экземпляр рассматриваемой совокупности машин по одному из видов эксплуатационных работ. Каждый элемент этой матрицы есть сумма затрат на i-й вид эксплуатационных работ, выполняемых за средний срок службы j-го вида машин. Сумма всех элементов матрицы есть общая сумма затрат на эксплуатацию одного экземпляра каждого вида машин. Такая интерпретация матриц и их элементов, а также сумм элементов по строкам и столбцам в статистике имеет очень важное значение. В связи с этим *содержащими статистическую информацию матрицами* будем называть не любой массив чисел, а *массив объединенных однородным смысловым значением чисел, характеризующих массовые явления.*

В случаях, когда число строк и столбцов матрицы одинаково, матрицу называют *квадратной*, а ее размер — *порядком*. Порядок квадратной матрицы обычно обозначают одним числом. Так, если в предыдущем примере вычеркнуть один из столбцов, то получим квадратную матрицу **A** порядка 3.

В квадратной матрице диагональ, идущую сверху вниз направо, называют *главной диагональю*, а идущую снизу вверх направо — *вспомогательной*. Располагающиеся на главной диагонали элементы называют *диагональными*, а их сумму — *следом матрицы*, который обычно обозначают через (tr):

$$\mathrm{tr}=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \text{ при } i=j.$$

Если все недиагональные элементы матрицы равны нулю, а все или некоторые диагональные элементы не равны нулю, то такую матрицу называют *диагональной*. Если все элементы диагональной матрицы единицы, то такая матрица называется *единичной* и обозначается **1**.

Если все элементы квадратной матрицы, расположенные выше (ниже) главной диагонали, равны нулю, а остальные элементы не равны нулю, то такую матрицу называют нижней (верхней) *треугольной* матрицей.

Если матрица состоит из одной строки (одного столбца), то ее называют *однострочной* (*одностолбцовой*) матрицей. Такие матрицы чаще всего называют *вектор-строкой* (*вектор-столбцом*). Матрицу первого порядка, состоящую из одного элемента, называют *скаляром*.

Если все элементы матрицы нули, то такая матрица называется *нулевой*.

Обычно две матрицы считаются равными тогда, когда они одного порядка и каждый элемент одной матрицы равен соответствующему элементу другой матрицы, например, $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ тогда, когда все $a_{ij} = b_{ij}$. Однако для содержащих статистическую информацию матриц таких условий равенства недостаточно, так как существенную роль играет содержательный смысл их элементов. В дополнение к общепринятому понятию равенства матриц следует добавить, что *содержащие статистическую информацию матрицы равны между собой тогда и только тогда, когда сравниваемые массивы чисел одинаковы по смыслу*, т. е. по смыслу их элементов, расположенных на одинаковых местах.

Транспонированной считается матрица, в которой строки исходной матрицы превращены в столбцы, т. е. исходная матрица перемещена так, что ее строки стали столбцами, а ее *ведущий элемент* (элемент первой строки и первого столбца исходной матрицы) остался на месте. Например,

$$\text{исходная матрица } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \quad \text{транспонированная матрица } \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

Сокращенно транспонированная матрица выражается тем же символом что и исходная, но с апострофом справа вверху символа, а общий ее элемент — с перемещением мест подстрочных индексов. Например, исходная матрица $\mathbf{A} = (a_{ij})$, а транспонированная $\mathbf{A}' = (a_{ji})$. Очевидно, что транспонирование транспонированной матрицы приводит к исходной матрице. При матричных расчетах в статистике при транспонировании матрицы следует учитывать смысл ее элементов и необходимость сохранения смысла результатов тех или иных действий с матрицами.

В связи с потребностями статистики введем процедуру смещения или полутранспонирования матриц. Под *смещенной* (*полутранспонированной*) матрицей будем понимать такую матрицу, в которой строки исходной матрицы стали диагоналями смещенной (полутранспонированной) матрицы, причем первая строка исходной матрицы становится первой диагональю, идущей сверху вниз направо. Число таких диагоналей полутранспонированной матрицы равно числу строк исходной матрицы. Например, матрица $\mathbf{A}$:

$$\text{исходная матрица } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}, \quad \text{смещенная матрица } \mathbf{A}^{\text{п}} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{13} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{14} \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \end{pmatrix}.$$

Смещенную матрицу будем обозначать тем же символом, что и исходную, но с буквой п справа вверху. Размер смещенной матрицы возрастает на $m - 1$, ибо в результате превращения строк в диагонали на $m - 1$ возрастает число строк.

Симметрическими считаются такие квадратные матрицы, в которых элементы, симметрично размещенные относительно главной диагона-

ли, равны между собой. Симметрическая транспонированная матрица равна исходной матрице, что является основной отличительной особенностью симметричности.

1.2 СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ МАТРИЦ

Сложение матриц есть такое действие с прямоугольными массивами чисел, когда к каждому элементу одной матрицы-слагаемого прибавляются соответствующие элементы (элементы, стоящие на пересечении столбцов и строк с теми же порядковыми номерами) других матриц-слагаемых с учетом знака элемента каждого слагаемого. В теории матриц считается общепризнанным, что сложение матриц возможно лишь тогда, когда все матрицы-слагаемые одинакового размера. Для сложения матриц разного размера их предварительно следует согласовать, т. е. привести к наибольшему размеру одной из матриц-слагаемых путем добавления недостающего количества строк и столбцов, состоящих из нулей.

Сложение содержащих статистическую информацию матриц возможно лишь тогда, когда складываемые элементы матриц-слагаемых имеют одну и ту же размерность и одинаковый смысл (качественную характеристику). При согласовании таких матриц для сложения необходимо не только дополнить матрицы-слагаемые нулевыми строками и столбцами с целью приведения их к одинаковым размерам, но и разместить строки и столбцы так, чтобы во всех матрицах-слагаемых на соответствующих местах были бы одинаковые по смыслу и размерности элементы. Проиллюстрируем это на числовом примере. Пусть три предприятия (табл. 1.2) выпускают однородную продукцию в тыс. единиц (i — номера продукции, j — номера кварталов года).

Таблица 1.2

Номер продукции	Объем выпускаемой продукции за квартал											
	первым предприятием				вторым предприятием				третьим предприятием			
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	28	24	28	32	42	44	46	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	24	25	25	0	42	44	46	48
3	42	36	38	40	0	0	0	0	28	26	24	22
4	30	40	54	58	14	11	9	0	0	0	0	0

Необходимо установить ассортимент выпускаемой всеми тремя предприятиями продукции. Для этого мы имеем три матрицы разного размера:

$$\mathbf{A}_1=\begin{pmatrix}28 & 24 & 28 & 32\\ 42 & 36 & 38 & 40\\ 30 & 40 & 54 & 58\end{pmatrix};\quad \mathbf{A}_2=\begin{pmatrix}42 & 44 & 46\\ 24 & 25 & 25\\ 14 & 11 & 9\end{pmatrix};\quad \mathbf{A}_3=\begin{pmatrix}42 & 44 & 46 & 48\\ 28 & 26 & 24 & 22\end{pmatrix}.$$

Формально придерживаясь правил сложения матриц (приводят их к удобному для сложения виду), дополним матрицу $\mathbf{A}_2$ нулевым столбцом, а матрицу $\mathbf{A}_3$ — нулевой строкой. Такое дополнение матриц усложняет их качественную характеристику. Дополнив же эти матрицы нулевыми строками и столбцами с учетом наименований и размерности показателей, получим три матрицы одинакового размера:

$$\mathbf{A}_1=\begin{pmatrix}28 & 24 & 28 & 32\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 42 & 36 & 38 & 40\\ 30 & 40 & 54 & 58\end{pmatrix};\quad \mathbf{A}_2=\begin{pmatrix}42 & 44 & 46 & 0\\ 24 & 25 & 25 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 14 & 11 & 9 & 0\end{pmatrix};\quad \mathbf{A}_3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 42 & 44 & 46 & 48\\ 28 & 26 & 24 & 22\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Сложив их, получим искомую матрицу-сумму, характеризующую ассортимент продукции, выпускаемой всеми предприятиями:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}70 & 68 & 74 & 32\\ 66 & 69 & 71 & 48\\ 70 & 62 & 62 & 62\\ 44 & 51 & 63 & 58\end{pmatrix}.$$

Число строк этой матрицы равно числу наименований продукции, а число столбцов — количеству кварталов.

Вычитание матриц есть действие, посредством которого из всех элементов матрицы-уменьшаемого последовательно вычитаются соответствующие элементы матриц-вычитаемых. Очевидно, что вычитание матриц возможно тогда, когда они согласованы для сложения не только по формальным признакам (по размерам матриц уменьшаемого и вычитаемых), но и по качественным характеристикам и размерности элементов. Вычитание матриц можно рассматривать как их сложение при условии, что элементы матриц-вычитаемых берутся с обратным знаком.

Из определения сложения матриц следует, что оно обладает переместительным $(\mathbf{A}+\mathbf{B})=(\mathbf{B}+\mathbf{A})$ и сочетательным $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$ свойствами.

1.3 УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ

1.3.1. **Скалярное произведение.** Следует различать три вида умножения матриц, приводящие к различным результатам, имеющим разные структурные и качественные характеристики: скалярное, почленное и аналитическое (антискалярное).

Общепризнано, что основным произведением матриц является скалярное (внутреннее) произведение, которое представляет собой сумму произведений элементов вектор-строки (строки матрицы) одного сомножителя на вектор-столбец (столбец матрицы) другого сомножителя. Смысл скалярного произведения легче всего уяснить на результате умножения вектор-строки на вектор-столбец.

Пусть нам необходимо подсчитать сумму выручки от реализации четырех продуктов производства. Ассортимент реализуемых продуктов представим в виде вектор-столбца $\mathbf{q}' = (25\ 50\ 85\ 40)'$ тыс. единиц, а цены их реализации — в виде вектор-строки $\mathbf{p} = (30\ 50\ 40\ 20)$ руб. Их скалярное произведение

$$\Sigma \mathbf{q}_i \mathbf{p}_j = (30\ \ 50\ \ 40\ \ 20)\begin{pmatrix}25\\50\\85\\40\end{pmatrix} = (30 \cdot 25 + 50 \cdot 50 + 40 \cdot 85 + 20 \cdot 40) = 7450 \text{ тыс. руб.}$$

Нетрудно заметить, что скалярное произведение вектор-строки на вектор-столбец есть число (скаляр), а процесс его получения есть агрегирование данных в виде суммы произведений, что размеры перемножаемых векторов должны быть равны, а перемножаемые элементы должны быть согласованы по их качественным характеристикам (в данном примере по принадлежности к одному и тому же продукту), т. е. должны быть размещены в порядке их принадлежности к одному объекту анализа.

Скалярное произведение вектор-строки на матрицу есть вектор-строка. Допустим, что реализуют продукты производства не одно, а три предприятия. Тогда произведение вектор-строки цен $\mathbf{p}$ на матрицу физических объемов реализации $\mathbf{Q}$

$$\mathbf{pQ} = (30\ \ 50\ \ 40\ \ 20)\begin{pmatrix}25 & 10 & 0\\50 & 40 & 60\\85 & 0 & 95\\40 & 60 & 100\end{pmatrix} = (7450\ \ 3500\ \ 8800) \text{ тыс. руб.}$$

есть объемы реализации продукции в стоимостном выражении, получаемые каждым предприятием. Число элементов вектор-строки-произведения равно числу столбцов матрицы-сомножителя $\mathbf{Q}$, а сумма элементов вектор-строки-произведения равна объему реализации продукции всеми рассматриваемыми предприятиями.

Скалярное произведение матрицы на вектор-столбец есть вектор-столбец. Например, продукция, реализуемая первым предприятием, имеет поясные цены. Пусть в каждом из двух поясов предприятие реализует одинаковое количество продукции каждого наименования. Тогда совокупность поясных цен можно представить в виде матрицы $\mathbf{P}$, а совокупность физических объемов реализуемой продукции — в виде вектор-столбца $\mathbf{q}$. Их произведение

$$\begin{pmatrix}30 & 50 & 40 & 20\\27 & 48 & 36 & 18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}25\\50\\85\\40\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7450\\6855\end{pmatrix} \text{ тыс. руб.}$$

есть вектор-столбец. Каждый элемент этого вектор-столбца — показатель объема реализации продукции в данной поясной зоне, а их сумма — общий объем реализации. Таким образом, скалярное произведение матрицы на вектор-столбец есть вектор-столбец-произведение, число элементов которого равно числу строк матрицы-сомножителя. Это тоже прием агрегирования данных, который очень часто используется в экономических расчетах. Обозначив вектор-столбец-произведение через **y**, матрицу-сомножитель через **A** и вектор-столбец-сомножитель через **x**, можем записать: $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Из самого понятия «скалярное произведение» следует, что i-й элемент вектор-столбца-произведения $y_i = \Sigma a_{ij}x_j$ равен сумме элементов вектор-столбца-сомножителя **x**, взвешенных по величинам i-й строки матрицы **A**. Другими словами, каждый элемент вектор-столбца-произведения есть линейная комбинация элементов вектор-столбца-сомножителя. При таком рассмотрении матрицу **A** считают оператором линейного преобразования вектор-столбца **x** в вектор-столбец **y**. Процедура умножения матрицы на вектор-столбец лежит в основе метода межотраслевого баланса производства и распределения продукции.

Скалярное произведение вектор-строки на матрицу можно заменить скалярным произведением матрицы на вектор-столбец, если предварительно выполнить транспонирование сомножителей и поменять их местами. Так, в предыдущем числовом примере после транспонирования матрицы **Q** и вектор-строки **p** и перемещения их получим вектор-столбец-произведение

$$\mathbf{Qp} = \begin{pmatrix} 25 & 50 & 85 & 40 \\ 10 & 40 & 0 & 60 \\ 0 & 60 & 95 & 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \\ 40 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7450 \\ 3500 \\ 8800 \end{pmatrix} \text{ тыс. руб.}$$

Наоборот, скалярное произведение матрицы на вектор-столбец можно заменить скалярным произведением вектор-строки на матрицу путем транспонирования сомножителей и перемещения их местами.

Скалярное произведение матрицы на матрицу есть матрица, элементами которой будут суммы произведений элементов i-й строки матрицы первого сомножителя на j-й столбец матрицы второго сомножителя. Допустим, например, что на реализуемые продукты производства (см. матрицу **Q** в предыдущем числовом примере) устанавливаются сезонные цены, а физические объемы реализации во всех поясных зонах постоянны. Тогда произведение матрицы физических объемов реализации **Q** на матрицу цен **P**

$$\begin{pmatrix} 25 & 50 & 85 & 40 \\ 10 & 40 & 0 & 60 \\ 0 & 60 & 95 & 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 & 20 & 10 & 25 \\ 50 & 30 & 15 & 40 \\ 40 & 20 & 10 & 30 \\ 20 & 10 & 5 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7450 & 4100 & 1300 & 5775 \\ 3500 & 2000 & 1000 & 2750 \\ 8800 & 4700 & 2350 & 6750 \end{pmatrix}$$

есть матрица объемов реализации, в которой по столбцам характеризуются объемы реализации продукции всех предприятий в одной отдельно взятой поясной зоне, а по строкам — объемы реализации каждого из предприятий во всех поясных зонах.

Если транспонировать матрицы-сомножители и поменять их местами, то в произведении получим транспонированную матрицу. В числовом примере

$$\begin{pmatrix} 30 & 50 & 40 & 20 \\ 20 & 30 & 20 & 10 \\ 10 & 15 & 10 & 5 \\ 25 & 40 & 30 & 15 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} 25 & 10 & 0 \\ 50 & 40 & 60 \\ 85 & 0 & 95 \\ 40 & 60 & 100 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 7450 & 3500 & 8800 \\ 4100 & 2000 & 4700 \\ 1300 & 1000 & 2350 \\ 5775 & 2750 & 6750 \end{pmatrix}'.$$

Скалярное умножение матриц возможно только тогда, когда число столбцов матрицы первого сомножителя равно числу строк матрицы второго сомножителя. Размер матрицы-произведения обозначается числом строк матрицы первого сомножителя и числом столбцов матрицы второго сомножителя.

Если $\mathbf{AB} = \mathbf{C} = \mathbf{BA}$, то такие матрицы называются *перестановочными* или *коммутирующими* между собой.

Во всех случаях возможно сочетание перемножаемых содержащих статистическую информацию матриц, т. е. $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$, и справедливо распределительное свойство умножения матриц относительно сложения, т. е.

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC} \text{ или } \mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC},$$

если сложение скалярных произведений (сложение сумм произведений) логично и возможно.

Скалярное произведение матрицы самой на себя (скалярный квадрат матрицы) возможно только для квадратных матриц.

Скалярное произведение матрицы на диагональную матрицу есть такая матрица, в которой элементы столбцов матрицы первого сомножителя умножены на соответствующий по номеру столбца элемент матрицы второго сомножителя. Скалярное произведение диагональной матрицы на прямоугольную (квадратную) матрицу есть прямоугольная (квадратная) матрица, в которой каждая из строк матрицы второго сомножителя умножена на соответствующий по номеру строки элемент диагональной матрицы.

Скалярное произведение диагональных матриц есть диагональная матрица, элементы которой равны произведениям соответствующих элементов матриц-сомножителей.

1.3.2. **Почленное умножение.** В теории матриц почленное умножение и его результат (назовем его *статическим произведением*) почти не упоминаются, однако в экономических расчетах практическая необходимость в таком результате очевидна во всех случаях, когда суммирование произведений соответствующих элементов векторов-сомножителей нежелательно. Заметим, что скалярное произведение есть результат почленного умножения с последующим сложением полученных произведений, а скалярное произведение диагональных матриц по сути дела есть обычное статическое произведение, так как оно не требует суммирования произведений соответствующих элементов и не приводит к агрегированию результата.

Статическое произведение двух вектор-строк есть вектор-строка, каждый элемент которой равен произведению соответствующих элементов векторов-сомножителей. Статическое произведение двух вектор-столбцов есть вектор-столбец, элементами которого являются произведения соответствующих элементов векторов-сомножителей.

Статическое произведение двух матриц есть матрица, элементами которой являются произведения соответствующих элементов матриц-сомножителей. Например, наличие товаров (их физические объемы) в различных поясных зонах страны можно представить в виде матрицы: в строках — по видам, в столбцах — по поясным зонам. Цены на эти товары можно свести в аналогичную матрицу. Для того чтобы увидеть в одном массиве чисел запасы товаров в стоимостной форме по их видам и по зонам, достаточно почленно умножить матрицу физических объемов товаров на матрицу цен на эти товары.

Статическое произведение матриц есть результат почленного умножения матриц, который обеспечивает оценку показателей полученного произведения без агрегирования и дезагрегирования их.

1.3.3. **Аналитическое (антискалярное) произведение.** В теории матриц аналитическое, или антискалярное, произведение не выделяется в особое. Однако выделять его необходимо, ибо оно — результат дезагрегирования показателей, выполненного по правилам действия с прямоугольными массивами чисел. В экономических расчетах вообще и статистических расчетах в частности аналитическое произведение не менее важно, чем скалярное. Если для скалярного произведения типичным является умножение вектор-строки на вектор-столбец, то для аналитического произведения типично умножение вектор-столбца на вектор-строку. Эта процедура приводит не к агрегированию, а к дезагрегированию результата.

Произведение вектор-столбца на вектор-строку есть матрица произведения сумм двух совокупностей, т. е. все слагаемые этого произведения представлены в виде систематизированного массива чисел. Размер этой матрицы определяется числом элементов вектор-столбца (число строк матрицы) и числом элементов вектор-строки (число столбцов матрицы).

Допустим, четыре предприятия реализуют один и тот же продукт производства с одинаковым объемом $q = (25\ 50\ 85\ 40)$ единиц в трех зонах, где цены на него равны $p = (36\ 42\ 50)$ руб. Нам необходимо знать суммы выручки от реализации каждого предприятия в каждой зоне. Для этого представим объемы продукта в виде вектор-столбца, а зональные цены — в виде вектор-строки, а умножив их, получим:

$$qp = \begin{pmatrix} 25 \\ 50 \\ 85 \\ 40 \end{pmatrix} (36 \quad 42 \quad 50) = \begin{pmatrix} 900 & 1050 & 1250 \\ 1800 & 2100 & 2500 \\ 3060 & 3570 & 4250 \\ 1440 & 1680 & 2000 \end{pmatrix}.$$

Следом полученной матрицы является скалярное произведение участвующих в ее образовании вектор-строки и вектор-столбца. В ее столбцах — суммы выручки от реализации каждого из предприятий в соответствующей зоне, а в строках — суммы выручки данного предприятия во всех зонах.

Аналитическое произведение вектор-столбца размером n на матрицу размером $k \times m$ есть сумма k матриц, образованных умножением этого вектор-столбца на каждую из строк матрицы — второго сомножителя[1].

Пусть в выше рассмотренном примере цены реализации данного продукта в каждой зоне непропорционально изменялись дважды и нам необходимо знать возможные приросты суммы выручки каждого предприятия от реализации всего объема его продукции в каждой зоне при каждом приросте цен. Для этого абсолютные приросты цен при каждом их увеличении представим в виде вектор-строк и получим матрицу, состоящую из двух строк и трех столбцов, например,

$$\Delta P = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 7 \\ 8 & 9 & 15 \end{pmatrix}.$$

Умножив вектор-столбец объемов реализации на эту матрицу, получим сумму двух матриц, элементами которых являются суммы возможных приростов выручки от реализации данного продукта каждым предприятием (строки матриц) в каждой зоне (столбцы матриц), причем каждая матрица-слагаемое содержит в себе элементы, относящиеся только к одному увеличению цен. В числовом примере

$$q \cdot \Delta P = \begin{pmatrix} 25 \\ 50 \\ 85 \\ 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 4 & 7 \\ 8 & 9 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 & 100 & 175 \\ 300 & 200 & 350 \\ 510 & 340 & 595 \\ 240 & 160 & 280 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 200 & 225 & 375 \\ 400 & 450 & 750 \\ 680 & 765 & 1275 \\ 320 & 360 & 600 \end{pmatrix}.$$

Аналитическое произведение матрицы на матрицу есть сумма $m \times k$ прямоугольных матриц размером $n \times l$, образованных умножением каждого j-го столбца матрицы — первого сомножителя размером $n \times m$ на каждую i-ю строку матрицы — второго сомножителя размером $k \times l$. Такое произведение очень важно в экономическом анализе, так как оно позволяет глубже вникнуть в результаты воздействия различных факторов на процессы.

1.4 БИЛИНЕЙНАЯ И КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМЫ

Сумму произведений, в которой каждое произведение-слагаемое состоит из двух сомножителей, относящихся к двум совокупностям (причем каждый сомножитель в первой степени имеется во всех сочетаниях элементов совокупностей), называют *билинейной формой*. Билинейная форма — это произведение вектор-строки на вектор-столбец, полученное посредством матрицы, элементами которой являются

[1] В общем случае, который здесь рассматривается, $k \neq n$. Если $k = n$, то можно говорить о сумме n матриц. — Примеч. науч. ред.

попарные произведения коэффициентов при переменных в каждой совокупности.

Пусть мы имеем совокупности $X = (2x_1\ x_2\ 3x_3\ 0{,}5x_4)$, $Y = (y_1\ 2y_2\ 0{,}2y_3\ 0{,}6y_4)$. Их произведение $2x_1y_1 + 4x_1y_2 + 0{,}4x_1y_3 + 1{,}2x_1y_4 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + 0{,}2x_2y_3 + 0{,}6x_2y_4 + 3x_3y_1 + 6x_3y_2 + 0{,}6x_3y_3 + 1{,}8x_3y_4 + 0{,}5x_4y_1 + x_4y_2 + 0{,}1x_4y_3 + 0{,}3x_4y_4$ и называют билинейной формой. Если из коэффициентов этого многочлена составим матрицу, соблюдая последовательность подстрочных индексов элементов, их образовавших, а совокупности без коэффициентов при их элементах представим: X — в виде вектор-строки **x**, а Y — в виде вектор-столбца **y**, то получим матричную запись билинейной формы

$$(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0{,}4 & 1{,}2 \\ 1 & 2 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 3 & 6 & 0{,}6 & 1{,}8 \\ 0{,}5 & 1 & 0{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix},$$

которую компактно обычно записывают так: **xAy**.

Приведенный выше многочлен образован как произведение сумм (многочленов), а поэтому выполнив аналитическое умножение, т. е. умножение вектор-столбца **y** на вектор-строку **x**, получим матрицу произведения сумм

$$\begin{pmatrix} 1y_1 \\ 2y_2 \\ 0{,}2y_3 \\ 0{,}6y_4 \end{pmatrix}(2x_1\ 1x_2\ 3x_3\ 0{,}5x_4) = \begin{pmatrix} 2x_1y_1 & 4x_1y_2 & 0{,}4x_1y_3 & 1{,}2x_1y_4 \\ 1x_2y_1 & 2x_2y_2 & 0{,}2x_2y_3 & 0{,}6x_2y_4 \\ 3x_3y_1 & 6x_3y_2 & 0{,}6x_3y_3 & 1{,}8x_3y_4 \\ 0{,}5x_4y_1 & 1x_4y_2 & 0{,}1x_4y_3 & 0{,}3x_4y_4 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно увидеть, что коэффициенты при попарных произведениях переменных в этой матрице равны элементам линейного оператора билинейной формы, записанной в матричной форме, а сами попарные произведения есть аналитическое (антискалярное) произведение рассматриваемых совокупностей без коэффициентов при их элементах. Таким образом, аналитическое произведение рассматриваемых совокупностей равно почленному произведению матриц, являющихся аналитическими произведениями отдельно коэффициентов при переменных и самих переменных обеих совокупностей. Именно в этом и состоит характерная особенность билинейной формы, которая очень важна как средство анализа и форма отображения статистических данных.

Частными случаями билинейной формы являются:

1) скалярное произведение вектор-строки на вектор-столбец. В этом случае в роли линейного оператора выступает единичная матрица. В общем виде скалярное произведение векторов можно записать так:

$$\mathbf{xAy} = (x_1\ x_2\ x_3 \dots\ x_m)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \cdot\cdot \\ y_n \end{pmatrix} = \Sigma x_j y_i;$$