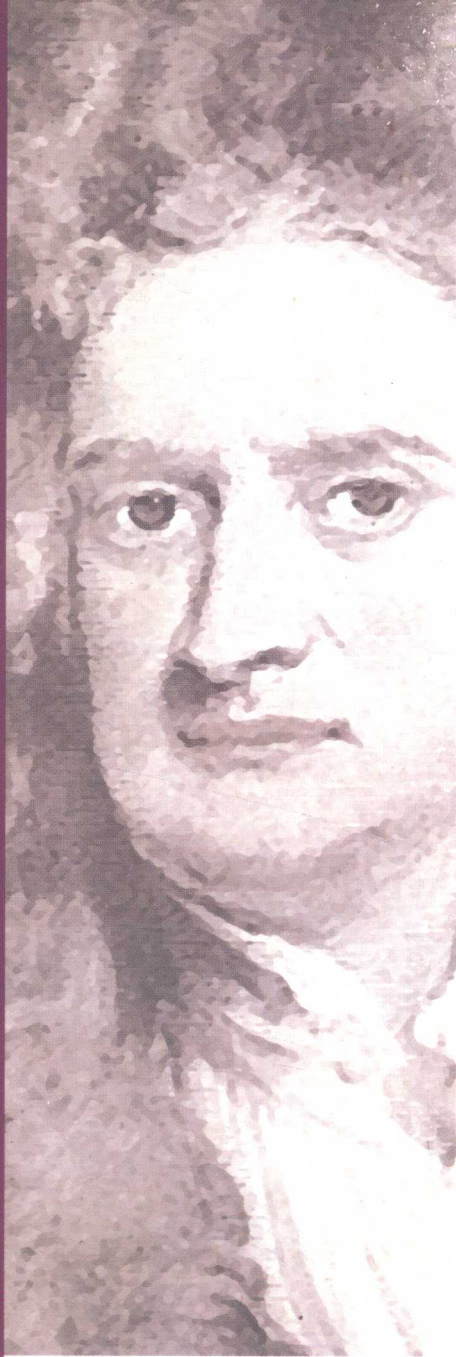


英文版
古今
数学思想

[美] 莫里斯·克莱因 著



第二册

上海科学技术出版社

古今数学思想

(英文版)

第二册

[美]莫里斯·克莱因 著



上海科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

古今数学思想. 第二册=Mathematical thought from ancient to modern times(volume 2):英文/(美)克莱因(Kline, M.)著. —上海:上海科学技术出版社,2014.1

ISBN 978-7-5478-2071-1

I. ①古... II. ①克... III. ①数学史—英文 IV. ①O11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 266999 号

THIS BOOK IS BASED ON MATHEMATICAL THOUGHT FROM ANCIENT TO MODERN TIMES.This SPECIAL CHINESE VERSION is published by arrangement with Oxford University Press for sale/distribution in The Mainland (part) of the People's Republic of China (excluding the territories of Hong Kong SAR,Macau SAR and Taiwan Province) only and not for export therefrom.

古今数学思想(英文版)第二册

[美]莫里斯·克莱因 著

上海世纪出版股份有限公司 出版
上海科学技术出版社
(上海钦州南路71号 邮政编码200235)

上海世纪出版股份有限公司发行中心发行
200001 上海福建中路193号 www.ewen.cc

苏州望电印刷有限公司印刷
开本:787×1092 1/16 印张29.75

字数:440千字

2014年1月第1版 2014年1月第1次印刷

ISBN 978-7-5478-2071-1/O·30

定价:78.00元

本书如有缺页、错装或坏损等严重质量问题,
请向承印厂联系调换

To my wife, Helen Mann Kline

《古今数学思想》三卷本平装版序

本书初版受到欢迎，让我心满意足。对于出现了一种未经授权的中文翻译版*，我感到荣幸，尽管一分钱都没拿到。更让我感到满意的是经授权的西班牙文翻译版即将面世。

这本著作是我长期致力于将数学学科人性化而获得的部分成果。在我职业生涯刚开始的时候，我就与几位同事联手编写了一种大学一年级教材，它与枯燥乏味的传统数学课本相去甚远。之后，抱着同样的宗旨，我又写了一本微积分教材。当我在指导一个电磁理论研究小组并做着自己的研究时，我仍然抽出时间来写《西方文化中的数学》(*Mathematics In Western Culture*)，这本书部分是在讲历史，部分则是在探寻数学对哲学、宗教、文学、艺术、音乐、经济理论和政治思想的影响。最近我以普通读者为对象，写了一本关于数学的哲学基础的书，和一本关于好多科学（尤其是天体演化学和物理学）的数学背景结构的书。

我希望学生、老师，还有普通读者，都能从这套在价格上比较容易承受而且在内容上比较容易接受的《古今数学思想》三卷本平装版中获益。在此感谢 Harold Edwards, Donald Gillis 和 Robert Schlapp 等人提供的对我有帮助的建议。特别要感谢的是 Fred Pohle，感谢他不惜花费时间，感谢他对本书钟爱有加，感谢他的慷慨大度。在多年以本书为基础进行授课之后，他看到了人们对多卷本平装版的需求，从而提供了催生这一版本的动力。除此之外，他还毫不吝啬地献出他的时间和知识，帮我纠正书中的差错。我感到欠他良多，同样，对于我的妻子 Helen，我也亏欠甚多，她为准备这个版本承担了大量工作。

* 写此序时为1990年，莫里斯·克莱因教授逝世于1992年6月10日，同年7月30日中国加入世界版权公约。——译者注

原出版者关于这套三卷本平装版的说明

《古今数学思想》初版由牛津大学出版社以一卷本布面精装版的形式出版。在出版这套三卷本平装版时，我们仍然采用布面精装版中的页码，以与姓名索引、主题索引以及注释中的页码保持一致。由于页码是一卷接一卷地连续标记的，故为方便读者起见，每一卷的最后部分都有姓名索引和主题索引。

| 序 |

如果我们想要预见数学的将来，适当的途径是研究这门科学的历史和现状。

庞加莱(Henri Poincaré)

本书论述从古代一直到20世纪头几十年中的重大数学创造和发展。目的是介绍中心思想，特别着重于那些在数学历史的主要时期中逐渐冒出来并成为最突出的，并且对于促进和形成尔后的数学活动有影响的主流工作。本书所极度关心的还有对数学本身的看法、不同时期中这种看法的改变，以及数学家对于他们自己的成就的理解。

必须把本书看作是历史的一个概述。当人们想到欧拉(Leonhard Euler)全集满满的约70卷、柯西(Augustin-Louis Cauchy)的26卷、高斯(Carl Friedrich Gauss)的12卷，人们就容易理解只凭本书一卷的篇幅不能给出一个详尽的叙述。本书的一些篇章只提出所涉及的领域中已经创造出来的数学的一些样本，可是我坚信这些样本最具有代表性。再者，为了把注意力始终集中于主要的思想，我引用定理或结果时，常常略去严格准确性所需要的次要条件。本书当然有它的局限性，但我相信它已给出整个历史的一种概貌。

本书的组织着重在居领导地位的数学课题，而不是数学家。数学的每一分支打上了它的奠基者的烙印，并且杰出的人物在确定数学的进程方面起决定性作用。但是，特意叙述的是他们的思想，传记完全是次要的。在这一点上，我遵循帕斯卡(Blaise Pascal)的意见：“当我们援引作者时，我们是援引他们的证明，不是援引他们的姓名。”

为使叙述连贯，特别是在1700年以后的时期，对于每一发展要等到它已经成熟，在数学中占重要地位并且产生影响的时候，我才进行论述。例如，我把非欧几里得几何放在19世纪的时期介绍，虽然企图寻找欧几里得平行公



理的替代物或证明早在欧几里得 (Euclid) 时代就开始了并且继续不断。当然, 有许多问题会在不同的时期反复提及。

为了不使资料漫无边际, 我忽略了几种文化, 例如中国的*、日本的和玛雅的文化, 因为他们的工作对于数学思想的主流没有重大的影响。还有一些数学中的发展, 例如概率论和差分演算, 它们今天变得重要, 但在所考虑的时期中并未起重要作用, 从而也只得得到很少的注意。这最后的几十年的大发展使我不得不在本书中只收入那些20世纪的, 并且在该时期变成有特殊意义的创造。我没有在20世纪时期继续讨论像常微分方程或变分法的扩展, 因为这将会需要很专门的资料, 而它们只对于这些领域的研究工作者有兴趣, 并且将会大大增加本书的篇幅。此外还考虑到, 对于许多较新的发展的重要性, 目前还不能做客观的估价。数学的历史告诉我们, 许多科目曾经激起过很大的热情, 并且得到最好的数学家的注意, 但终于湮没无闻。我们只需要回忆一下凯莱 (Arthur Cayley) 的名言“射影几何就是全部几何”, 以及西尔维斯特 (James Joseph Sylvester) 的断言“代数不变量的理论已经总结了数学中的全部精华”。确实, 历史给出答案的有趣问题之一便是数学中哪些东西还生存着而未被淘汰? 历史做出它自己的而且更可靠的评价。

通过几十项重要发展的即使是基础的叙述, 也不能指望读者知道所有这些发展的内容。因此, 我在本书中论述某科目的历史时, 除去一些极初等的领域外, 也说明科目的内容, 把科目的历史叙述和内容说明融合起来。对各种数学创造, 这些说明也许不能把它们完全讲清楚, 但应能使读者对它们的本质得到某些概念。从而在某种程度上, 本书也可作为一本从历史角度来讲解的数学入门书。这无疑是使读者能获得理解和鉴赏的最好的写法之一。

我希望本书对于专业的数学家和未来的数学家都有帮助。专业的数学家今天不得不把这么多的时间和精力倾注到他的专题上去, 使得他没有机会去熟悉他的学科的历史。而实际上, 这历史背景是重要的。现在的根深扎在过去, 而对于寻求理解“现在之所以成为现在这样子”的人们来说; 过去的每一事件都不是无关的。再者, 虽然数学大树已经伸张出成百的分支, 它毕竟是一个整体, 并且有它自己的重大问题和目标。如果一些分支专题对于数学的心脏无所贡献, 它们就不会开花结果。我们的被分裂的学科就面临着这种危险; 跟这种危险做斗争的最稳妥的办法, 也许就是要对于数学的过去成就、传统和目标得到一些知识, 使得能把研究工作导入有成果的渠道。如同

* 中国数学史的一个可喜的叙述, 已见于李约瑟 (Joseph Needham) 的 *Science and Civilization in China*, 剑桥大学出版社, 1959, 卷3, 第1~168页。

希尔伯特 (David Hilbert) 所说的: “数学是一个有机体, 它的生命力的一个必要条件是所有各部分的不可分离的结合。”

对于学数学的学生来说, 本书还会另有好处。通常一些课程所介绍的是一些似乎没有什么关系的数学片断。历史可以提供整个课程的概貌, 不仅使课程的内容互相联系, 而且使它们跟数学思想的主干也联系起来。

在一个基本方面, 通常的一些数学课程也使人产生一种幻觉。它们给出一个系统的逻辑叙述, 使人们有这种印象: 数学家们几乎理所当然地从定理到定理, 数学家能克服任何困难, 并且这些课程完全经过锤炼, 已成定局。学生被淹没在成串的定理中, 特别是当他正开始学习这些课程的时候。

历史却形成对比。它教导我们, 一个科目的发展是由汇集不同方面的成果点滴积累而成的。我们也知道, 常常需要几十年甚至几百年的努力才能迈出有意义的几步。不但这些科目并未锤炼成无缝的天衣, 就是那已经取得的成就, 也常常只是一个开始, 许多缺陷有待填补, 或者真正重要的扩展还有待创造。

课本中的斟字酌句的叙述, 未能表现出创造过程中的斗争、挫折, 以及在建立一个可观的结构之前, 数学家所经历的艰苦漫长的道路。学生一旦认识到这一点, 他将不仅获得真知灼见, 还将获得顽强地追求他所攻问题的勇气, 并且不会因为他自己的工作并非完美无缺而感到颓丧。实在说, 叙述数学家如何跌跤, 如何在迷雾中摸索前进, 并且如何零零碎碎地得到他们的成果, 应能使搞研究工作的任一新手鼓起勇气。

为了使本书能包罗所涉及这个大范围, 我曾经试着选择最可靠的原始资料。对于微积分以前的时期, 像希思(Thomas L.Heath)的《希腊数学史》(*A History of Greek Mathematics*)无可否认地是第二手的资料, 可是我并未只依靠这样的一个来源。对于以后时期中的数学发展, 通常都能直接查阅原论文; 这些都幸而可以从期刊或杰出的数学家的全集中找到。对研究工作的大量报道和概述也帮助了我, 其中一些实际上也就在全集里。对于所有的重要结果, 我都试着给出出处。但并没有对于所有的断言都这么做; 否则将会使引证泛滥, 浪费篇幅, 而这些篇幅还不如用来充实报道。

每章中的参考书目指出资料来源。如果读者有兴趣, 他能从这些来源得到比本书中所说的更多的报道。这些书目中还包括许多不应而且没有作为来源的文献。把它们列在书目中, 是因为它们供给额外的报道, 或者表达的水平可以对一些读者更有帮助, 或者它们比原始资料更易于找到。

在此, 我想对我的同事Martin Burrow, Bruce Chandler, Martin Davis, Donald



Ludwig, Wilhelm Magnus, Carlos Moreno, Harold N. Shapiro 和 Marvin Tretkoff 表示谢意, 感谢他们回答了大量的问题, 阅读了本书的许多章节, 提出了许多宝贵的批评意见。我特别感激我的妻子 Helen, 她以批评的眼光编辑我的手稿, 广泛地核对人名、日期和出处, 而且极仔细地阅读尚未分成页的校样并给它们编上页码。Eleanore M. Gross 夫人做了大量的打字工作, 对我是一个极大的帮助。我想对牛津大学出版社的编辑部表示感激, 感谢他们细心地印刷了本书。

莫里斯·克莱因(Morris Kline)

纽约1972年5月



目 录

第 18 章	17世纪的数学	391
	1. 数学的转变	391
	2. 数学和科学	394
	3. 数学家之间的交流	396
	4. 展望18世纪	398
第 19 章	18世纪的微积分	400
	1. 引言	400
	2. 函数概念	403
	3. 积分技术与复量	406
	4. 椭圆积分	411
	5. 进一步的特殊函数	422
	6. 多元函数微积分	425
	7. 在微积分中提供严密性的尝试	426
第 20 章	无穷级数	436
	1. 引言	436
	2. 无穷级数的早期工作	436
	3. 函数的展开	440
	4. 级数的妙用	442
	5. 三角级数	454
	6. 连分式	459
	7. 收敛与发散问题	460
第 21 章	18世纪的常微分方程	468
	1. 主题	468
	2. 一阶常微分方程	471
	3. 奇解	476
	4. 二阶方程与黎卡蒂方程	478



5. 高阶方程	484
6. 级数法	488
7. 微分方程组	490
8. 总结	499

第 22 章

18世纪的偏微分方程	502
1. 引言	502
2. 波动方程	503
3. 波动方程的推广	515
4. 位势理论	522
5. 一阶偏微分方程	531
6. 蒙日和特征理论	536
7. 蒙日和非线性二阶方程	538
8. 一阶偏微分方程组	540
9. 这一门数学学科的产生	542

第 23 章

18世纪的解析几何和微分几何	544
1. 引言	544
2. 基本解析几何	544
3. 高次平面曲线	547
4. 微分几何的开端	554
5. 平面曲线	555
6. 空间曲线	557
7. 曲面的理论	562
8. 映射问题	570

第 24 章

18世纪的变分法	573
1. 最初的问题	573
2. 欧拉的早期工作	577
3. 最小作用原理	579
4. 拉格朗日的方法论	582
5. 拉格朗日和最小作用	587
6. 二次变分	589

第 25 章

18世纪的代数	592
1. 数系的状况	592
2. 方程论	597
3. 行列式和消元法理论	606

4. 数论	608
-------	-----

第 26 章

18 世纪的数学	614
1. 分析的兴起	614
2. 18 世纪工作的推动力	616
3. 证明的问题	617
4. 形而上学的基础	619
5. 数学活动的扩张	621
6. 向前的一瞥	623

第 27 章

单复变函数	626
1. 引言	626
2. 复函数论的开始	626
3. 复数的几何表示	628
4. 复函数论的基础	632
5. 魏尔斯特拉斯探讨函数论的途径	642
6. 椭圆函数	644
7. 超椭圆积分与阿贝尔定理	651
8. 黎曼与多值函数	655
9. 阿贝尔积分与阿贝尔函数	663
10. 保形映射	666
11. 函数的表示与例外值	667

第 28 章

19 世纪的偏微分方程	671
1. 引言	671
2. 热方程与傅里叶级数	671
3. 封闭解; 傅里叶积分	679
4. 位势方程和格林定理	681
5. 曲线坐标	687
6. 波动方程和退化波动方程	690
7. 偏微分方程组	696
8. 存在性定理	699

第 29 章

19 世纪的常微分方程	709
1. 引言	709
2. 级数解和特殊函数	709
3. 斯图姆-刘维尔理论	715
4. 存在定理	717



5. 奇点理论	721
6. 自守函数	726
7. 希尔在线性方程周期解方面的工作	730
8. 非线性微分方程: 定性理论	732

第 30 章

19世纪的变分法	739
1. 引言	739
2. 数学物理和变分法	739
3. 变分法本身的数学扩充	745
4. 变分法中的有关问题	749

第 31 章

伽罗瓦理论	752
1. 引言	752
2. 二项方程	752
3. 阿贝尔关于用根式解方程的工作	754
4. 伽罗瓦的可解性理论	755
5. 几何作图问题	763
6. 置换群理论	764

第 32 章

四元数, 向量和线性结合代数	772
1. 关于型的永恒性的代数基础	772
2. 三维“复数”的寻找	776
3. 四元数的性质	779
4. 格拉斯曼的扩张的演算	782
5. 从四元数到向量	785
6. 线性结合代数	791

第 33 章

行列式和矩阵	795
1. 引言	795
2. 行列式的一些新应用	795
3. 行列式和二次型	799
4. 矩阵	804

杂志名称缩写一览表

人名索引

名词索引

18

Mathematics as of 1700

Those few things having been considered, the whole matter is reduced to pure geometry, which is the one aim of physics and mechanics.

G. W. LEIBNIZ

1. *The Transformation of Mathematics*

At the opening of the seventeenth century Galileo still found it necessary to argue with the past. By the end of the century, mathematics had undergone such extensive and radical changes that no one could fail to recognize the arrival of a new era.

The European mathematicians produced far more between about 1550 and 1700 than the Greeks had in roughly ten centuries. This is readily explained by the fact that, whereas mathematics in Greece was pursued by only a handful of men, in Europe the spread of education, though by no means universal, promoted the development of mathematicians in England, France, Germany, Holland, and Italy. The invention of printing gave wide access not only to the Greek works but to the results of the Europeans themselves, which, now readily available, served to stimulate new thoughts.

But the genius of the century is not evidenced solely by the expansion of activity. The variety of new fields opened up in this brief period is impressive. The rise of algebra as a science (because the use of literal coefficients permitted a measure of proof) as well as the vast expansion of its methods and theory, the beginnings of projective geometry and the theory of probability, analytic geometry, the function concept, and above all the calculus were major innovations, each destined to dwarf the one extensive accomplishment of the Greeks—Euclidean geometry.

Beyond the quantitative expansion and the new avenues of exploration was the complete reversal of the roles of algebra and geometry. The Greeks had favored geometry because it was the only way they could achieve rigor; and even in the seventeenth century, mathematicians felt obliged to justify algebraic methods with geometrical proofs. One could say that up to 1600 the body of mathematics was geometrical, with some algebraic and trigonometric appendages. After the work of Descartes, Fermat, and Wallis, algebra



became not only an effective methodology for its own ends but also the superior approach to the solution of geometric problems. The greater effectiveness of analytical methods in the calculus decided the competition, and algebra became the dominant substance of mathematics.

It was Wallis and Newton who saw clearly that algebra provided the superior methodology. Unlike Descartes, who regarded algebra as just technique, Wallis and Newton realized that it was vital subject matter. The work of Desargues, Pascal, and La Hire was depreciated and forgotten, and the geometric methods of Cavalieri, Gregory of Saint Vincent, Huygens, and Barrow were superseded. Pure geometry was eclipsed for about a hundred years, becoming at best an interpretation of algebra and a guide to algebraic thinking through coordinate geometry. It is true that excessive reverence for Newton's geometrical work in the *Principia*, reinforced by the enmity against the Continental mathematicians engendered by the dispute between Newton and Leibniz, caused the English mathematicians to persist in the geometrical development of the calculus. But their contributions were trivial compared to what the Continentals were able to achieve using the analytical approach. What was evident by 1700 was explicitly stated by no less an authority than Euler, who, in his *Introductio in Analysin Infinitorum* (1748), praises algebra as far superior to the synthetic methods of the Greeks.

It was with great reluctance that mathematicians abandoned the geometric approach. According to Henry Pemberton (1694–1771), who edited the third edition of Newton's *Principia*, Newton not only constantly expressed great admiration for the geometers of Greece but censured himself for not following them more closely than he did. In a letter to David Gregory (1661–1708), a nephew of James Gregory, Newton remarked that "algebra is the analysis of the bunglers in mathematics." But his own *Arithmetica Universalis* of 1707 did as much as any single work to establish the supremacy of algebra. Here he set up arithmetic and algebra as the basic science, allowing geometry only where it made demonstrations easier. Leibniz, too, noted the growing dominance of algebra and felt obliged to say, in an unpublished essay,¹ "Often the geometers could demonstrate in a few words what is very lengthy in the calculus . . . the view of algebra is assured, but it is not better."

Another, more subtle, change in the nature of mathematics had been unconsciously accepted by the masters. Up to 1550 the concepts of mathematics were immediate idealizations of or abstractions from experience. By that time negative and irrational numbers had made their appearance and were gradually gaining acceptance. When, in addition, complex numbers, an extensive algebra employing literal coefficients, and the notions of derivative and integral entered mathematics, the subject became dominated by

1. Couturat, L.: *Opuscules et fragments inédits de Leibniz*, 1903, reprinted by Georg Olms, 1961, p. 181.

concepts derived from the recesses of human minds. The notion of an instantaneous rate of change, in particular, though of course having some intuitive base in the physical phenomenon of velocity, is nevertheless far more of an intellectual construct and is also an entirely different contribution qualitatively than the mathematical triangle. Beyond these ideas, infinitely large quantities, which the Greeks had studiously avoided, and infinitely small ones, which the Greeks had skillfully circumvented, had to be contended with.

In other words, mathematicians were contributing concepts, rather than abstracting ideas from the real world. Nevertheless, these concepts were useful in physical investigations because (with the exception of complex numbers, which had yet to prove their worth) they had some ties to physical reality. Of course the Europeans were uneasy about the new types of numbers and the calculus notions without really discerning the cause of their concern. Yet as these concepts proved more and more useful in applications, they were at first grudgingly and later passively accepted. Familiarity bred not contempt but acceptability and even naturalness. After 1700, more and more notions, further removed from nature and springing full-blown from human minds, were to enter mathematics and be accepted with fewer qualms. For the genesis of its ideas mathematics gradually turned from the sensory to the intellectual faculties.

The incorporation of the calculus into the body of mathematics effected another change, in the very concept of mathematics, that subverted the ideal fashioned by the classical Greeks. We have already noted that the rise of algebra and the calculus introduced the problem of the logical foundations of these portions of mathematics and that this problem was not resolved. Throughout the century some mathematicians were upset by the abandonment of proof in the deductive sense, but their protests were drowned in the expanding content and use of algebra and the calculus; by the end of the century mathematicians had virtually dropped the requirement of clearly defined concepts and deductive proof. Rigorous axiomatic construction gave way to induction from particular examples, intuitive insights, loose geometrical evidence, and physical arguments. Since deductive proof had been the distinguishing feature of mathematics, the mathematicians were thus abandoning the hallmark of their subject.

In retrospect it is easy to see why they were forced into this position. As long as mathematicians derived their concepts from immediate experience, it was feasible to define the concepts and select the necessary axioms—though, at that, the logical basis for the theory of the integers that Euclid presented in Books VII to IX of the *Elements* was woefully deficient. But as they introduced concepts that no longer idealized immediate experiences, such as the irrational, negative, and complex numbers and the derivative and integral, they failed to recognize that these concepts were different in

