

新訂 数学

小平邦彦 編

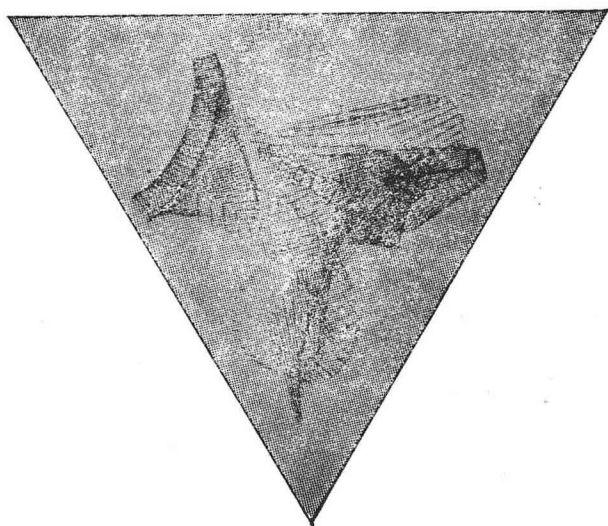
ⅡB

昭和48年4月10日文部省検定済
昭和51年4月10日改訂検定済
高等学校数学科用

新訂 数学

II B

小平邦彦 編



東京書籍株式会社

別記著作者

東京大学名誉教授
学習院大学教授

東京大学教授

一橋大学教授

東京教育大学教授

東京大学教授

成蹊大学教授

宮城教育大学教授

杏林大学教授

都立田無工業高校教諭

都立田園調布高校教諭

都立戸山高校教諭

都立西高校教諭

都立小石川工業高校教諭

お茶の水女子大学付属高校教諭

小平邦彦

岩堀長慶

松坂和夫

前原昭二

藤田 宏

志村利雄

鶴丸孝司

伊藤豊吉

番場参策

山崎和郎

三瀬茂利

渋谷幸敏

八木恒雄

石田光子

東京書籍株式会社編集部

表紙 勝井三雄

カット
日科技研 電子計算機センター

新訂 数学IIB

数 II 436

昭和52年 1月20日印刷

昭和52年 2月10日発行

昭和48年 4月10日 文部省検定済

昭和51年 4月10日 改訂検定済

著作者 小平邦彦

ほか13名(別記)

発行者 東京書籍株式会社

代表者 鈴木和夫

東京都台東区台東 1丁目 5番18号

印刷者 東京書籍印刷株式会社

代表者 奥賀田辰雄

東京都北区堀船 1丁目23番31号

発行所 東京書籍株式会社

東京都台東区台東 1丁目 5番18号

電話 東京(03)835局6111(代表)

郵便番号 110

定価 文部大臣が認可し官報で告示した定価
(上記の定価は、各教科書取次供給所に表示します。)

は じ め に

本書は高等学校数学Ⅰの学習を終わった諸君のため、それに続く数学の教科書として編集したものである。

数学Ⅰのはじめに述べたように、数学者はおよそ考えることが可能なものをすべて自由に考えるものであって、数学は人間精神の自由な創造物であるといわれる。一方、数学はいろいろな学問の分野に広く応用されて、実に不思議なほど役に立つのであって、数学は森ら万象の根底をなしているのではないかと思われるのである。

本書の第Ⅰ章では、空間における座標とベクトルについて学ぶ。空間における座標は、数学Ⅰで学んだ平面上の点の座標の考えを、空間の場合に拡張したものである。同様に、空間におけるベクトルは、平面上のベクトルの空間の場合への拡張である。

数学者は、本能的にこのような拡張あるいは一般化を好むのであって、“一般化”が数学の発展の一つの原動力をなしているのである。

第Ⅱ章では、行列について学ぶ。行列は数字または文字を長方形または正方形に並べたものにすぎないが、これを行列とよぶとき、行列は一つの量を表していると考えるのであって、行列の加法、減法、乗法などの演算が定義される。

行列は数学だけでなく、物理学においても基本的に重要な役割を演じる。現代の物理学では、いろいろな量が原理的には、数でなく行列によって表されると考えるのである。ここに、数学が森ら万象の根底をなすということの一端が現れているといえよう。

次の第Ⅲ章で、数列と数学的帰納法について学ぶ。数学的帰納法は、数学において最も基本的な論証の方法であって、現代数学の大部分は、数学的帰納法なしには成立しないのである。

第Ⅳ章では、微分法について、第Ⅴ章では、積分法について学ぶ。一つの関数から、その変化の割合を表す関数を求めることが微分法であり、逆に変化の割合を表す関数から、もとの関数を求めるのが積分法である。

17世紀の後半に、ニュートンやライブニッツによってはじめられた微積分法の応用によって、18世紀以降に科学技術が、驚異的進歩を遂げたのである。

一般に、いくつかの自明な基本法則から出発して、論証によって学問の体系を構成することを公理的構成という。このとき、自明な基本法則を公理とよぶのである。

今世紀にはいってから、すべての数学が公理的に構成されるようになったが、その典型となったのはユークリッド幾何学である。第Ⅵ章で、ユークリッド平面幾何学の公理的構成について学ぶ。

数学を学ぶには、本を読んで覚えるだけでは不十分であって、自分でよく考え、計算をしたり問題を解いたりしてみることがたいせつである。たとえば、水泳を習得するには、泳ぎ方の本を読んだだけではだめで、自分で水にはいって泳いでみなければならない。同様に、数学を習得するには、自分で数学を考えてみなければならないのである。

凡例

〔例〕 本文の理解を助けるために具体例を示したものです。

例題 内容を理解するための代表的な問題を、例題としてあげました。わく囲みの〔解〕や〔証明〕は、模範解を示したものです。

〔注意〕、*) 注意や欄外の脚注で、理解を助ける説明を補いました。

問 学習した内容をすぐ身につけるための設問と、導入のための設問を本文中で問にしました。

問題 各節末に、その節で学んだことがらを練習するための問題を設けました。

練習問題 各章末に、その章全体の復習と応用の問題を掲げました。Aは基本的なものを主とし、Bはやや程度の高い問題となっています。

付録 巻末の補充問題は、さらに学習内容の進んだ箇所です。

表紙と各扉のカットについて

表紙や各扉のカットは、電子計算機(コンピューター)による自動製図プログラムシステムにより制作したものです。

たとえば、III章のカットは、円周上の1点が固定された円の上をころがってできる軌跡の上を、長方形が移動したものです。また、VI章のカットは、2つの四辺形の対応点を結んだ図形を数回、回転させたものです。

目次

I 章 空間における座標とベクトル

1 節 空間の座標	2	問題	27
1 空間の座標	2		
2 2点間の距離, 球の方程式	6	3 節 空間における平面	
問題	10	• 直線の方程式	28
2 節 空間のベクトル	11	1 位置ベクトル	28
1 空間のベクトル	11	2 平面の方程式	32
2 ベクトルの演算	12	3 空間における直線の方程式	36
3 ベクトルの成分	14	問題	40
4 ベクトルの内積	20	練習問題 A, B	41, 42

II 章 行列

1 節 行列	44	問題	70
1 行列の意味	44		
2 行列の加減と実数倍	49	3 節 1次変換	71
3 行列の乗法	54	1 1次変換の意味	71
4 乗法の性質	58	2 1次変換の性質	74
問題	63	3 1次変換の合成と逆変換	80
2 節 逆行列と連立1次方程式	64	4 行列の演算と群	86
1 逆行列	64	問題	90
2 連立1次方程式	67	練習問題 A, B	92, 93
		研究 掃き出し法	94

Ⅲ章 数列

1 節 有限数列	98	2 節 数学的帰納法・二項定理	114
1 数列	98	1 数学的帰納法	114
2 等差数列	99	2 漸化式	118
3 等比数列	103	3 二項定理	122
4 いろいろな数列	106	問題	127
問題	113	練習問題 A, B	128, 129
		研究 アルゴリズム	130

Ⅳ章 微分とその応用

1 節 微分法	134	2 節 微分法の応用	147
1 極限值	134	1 接線	147
2 微分係数	137	2 関数の増減と極大・極小	150
3 導関数	140	3 速度	160
問題	145	問題	163
		練習問題 A, B	165, 166

Ⅴ章 積分とその応用

1 節 積分法	168	2 節 定積分の応用	181
1 不定積分	168	1 面積	181
2 定積分	172	2 体積	186
問題	179	3 直線上の運動	191
		問題	194
		練習問題 A, B	195, 196

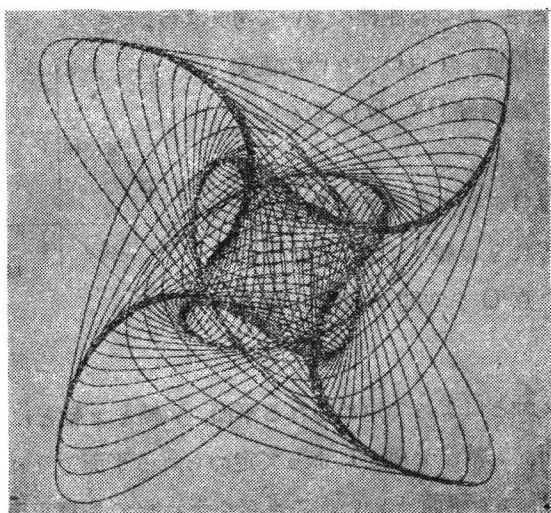
VI章 平面幾何の公理的構成

1 節 平面幾何の公理	198	4 図形の合同	210
1 公理的構成の意味	198	5 三角形の合同	212
2 結合と計量の公理	200	6 平行線の公理	217
3 運動の公理	206	問題	222

付録

補充問題	224	数表 平方・平方根・逆数表	233
解答	229	ギリシア文字とその読み方	234
索引	231		

I・空間における座標とベクトル



1 節 空間の座標

2 節 空間のベクトル

3 節 空間における平面

・直線の方程式

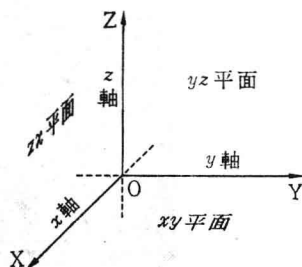
1 節 空間の座標

1 空間の座標

直線上の点や平面上の点を座標を用いて表すことはすでに学んだ。
ここでは空間における座標について考えよう。

空間の座標は、1点 O で互いに直交する3本の座標軸 OX , OY , OZ によって定められる。

これらは O を原点とする数直線であり、それぞれを x 軸, y 軸, z 軸という。また、点 O を空間の座標の原点という。



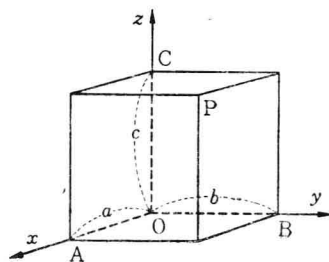
x 軸と y 軸とによって定められる平面, y 軸と z 軸とによって定められる平面, z 軸と x 軸とによって定められる平面をそれぞれ xy 平面, yz 平面, zx 平面といい、これらを合わせて座標平面という。

問1 x 軸に垂直な座標平面は何か。また, zx 平面に直交する座標軸は何か。

P を与えられた任意の点とする。

この点 P を通り yz 平面, zx 平面, xy 平面に平行な平面が、それぞれ x 軸, y 軸, z 軸と交わる点を A , B , C とする。

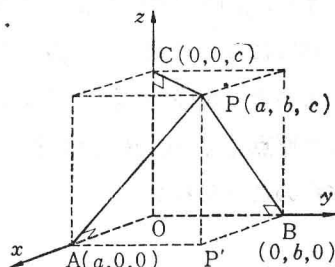
点 A , B , C の各座標軸上での座標がそれぞれ a , b , c であるとき、



この3つの数の組 (a, b, c) を点 P の **空間座標** または単に **座標** とい
い、点 P の座標が (a, b, c) であるとき $P(a, b, c)$ と表す。

また、 a, b, c をそれぞれ点 P の
 x 座標, y 座標, z 座標 という。

なお、上の点 A, B, C はそれぞれ
点 P から x 軸, y 軸, z 軸に下ろし
た垂線の足となっている。



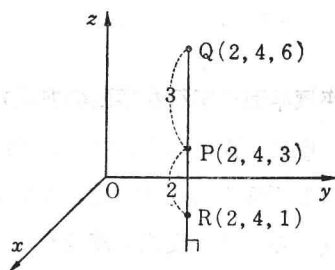
問2 点 $P(5, 4, 2)$ から xy 平面に下

ろした垂線の足 P' の座標をいえ。また、他の座標平面に下ろした垂線
の足の座標をいえ。

問3 点 $P(3, 7, -4)$ の xy 平面に関する対称点 Q の座標、および原点
 O に関する対称点 R の座標を求めよ。

平行移動と座標

点 $P(2, 4, 3)$ を z 軸に平行に
3 だけ移動した点を Q とすれば、
点 Q の座標は明らかに $(2, 4, 6)$
となる。また、点 P を z 軸に平
行に -2 だけ移動した点 R の座
標は $(2, 4, 1)$ となる。



問4 点 $P(2, 7, 3)$ を x 軸に平行に 4 だけ移動した点の座標をいえ。また、
点 P を y 軸に平行に -5 だけ移動した点の座標をいえ。

一般に、点 $P(x, y, z)$ を x 軸に平行に α だけ移動した点の座標は $(x + \alpha, y, z)$ となる。

また、 y 軸に平行に β だけ移動した点の座標は $(x, y + \beta, z)$ 、 z 軸に平行に γ だけ移動した点の座標は $(x, y, z + \gamma)$ となる。

このような移動を続けて行くと、それも1つの平行移動である。これを原点を点 (α, β, γ) に移す平行移動とよぶ。この平行移動について次のことがわかる。

原点 $O(0, 0, 0)$ を点 (α, β, γ) に移す平行移動によって、任意の点 (x, y, z) は、点 $(x + \alpha, y + \beta, z + \gamma)$ に移される。

—— 平行移動と座標 ——

問5 原点を点 $(1, -1, 2)$ に移す平行移動によって、次の各点はどのような点に移されるか。

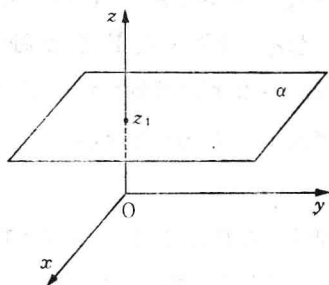
$(2, 3, 4), \quad (-1, -3, -5), \quad (-1, 1, -2)$

問6 ある平行移動によって点 $(4, 2, -3)$ が点 $(-1, 6, 8)$ に移ったとすれば、点 $(1, 1, 1)$ はどのような点に移されるか。

座標平面に平行な平面の方程式

座標平面、たとえば xy 平面に平行な平面を α とすると、 α は z 軸と交わる。その交点の座標を z_1 とすれば、平面 α 上の任意の点の z 座標はつねに z_1 である。

逆に、 z 座標が z_1 である点は平面 α の上にある。



すなわち、この平面は、集合 $\{(x, y, z) | z = z_1\}$ にほかならない。

この $z = z_1$ が xy 平面に平行な平面 α の方程式である。

問7 $x = 0$ はどのような平面を表すか。

問8 点 (x_1, y_1, z_1) を通り yz 平面に平行な平面の方程式を求めよ。また、 zx 平面に平行な平面の方程式を求めよ。

内分点, 外分点

例題 2点 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ を結ぶ線分 AB を $m:n$ に内分する点 C の座標は、次のように表されることを証明せよ。

$$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}, \frac{mz_2 + nz_1}{m+n} \right)$$

〔証明〕 点 C の座標を (x, y, z) とする。

点 A, B, C から xy 平面に下ろした垂線の足をそれぞれ A', B', C' とすれば、それらの点の座標はそれぞれ

$$(x_1, y_1, 0), (x_2, y_2, 0), (x, y, 0)$$

となり、さらに次の関係が成り立つ。

$$AC:CB = A'C':C'B' = m:n$$

平面上の内分点の公式から、

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$$

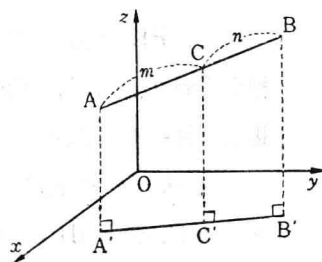
$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}$$

同様に、点 A, B, C から yz

平面に垂線を下ろして考えれば、

$$z = \frac{mz_2 + nz_1}{m+n}$$

が得られる。



問9 (1) 前ページの例題で、線分 AB を $m:n$ に外分する点 D の座標は、

$$\left(\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \frac{my_2 - ny_1}{m-n}, \frac{mz_2 - nz_1}{m-n} \right)$$

となることを証明せよ。(ただし、 $m \neq n$, $m > 0$, $n > 0$)

(2) 線分 AB の中点の座標を求めよ。

問10 A(2, 1, -3), B(-4, 5, -1) のとき、線分 AB を 3:1 に内分する点 C, および 5:3 に外分する点 D の座標を求めよ。

2 2点間の距離、球の方程式

空間における2点間の距離も、平面の場合と同様に座標を用いて表すことができる。

例題1 原点 O と点 P(x, y, z) との距離 OP は、

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

と表されることを証明せよ。

〔証明〕 点 P から xy 平面に下ろした垂線の足を H とすれば、

点 H の座標は (x, y, 0)

また、 $PH = |z|$ である。

線分 OH の長さは、平面の場合の距離の公式から

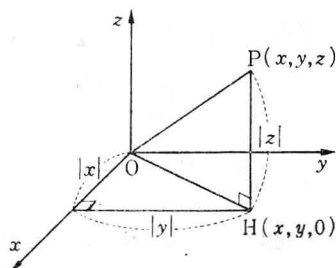
$$OH = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ところが、 $\triangle POH$ は $\angle H$

を直角とする直角三角形であるから、

$$OP^2 = OH^2 + PH^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\therefore OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



問1 次の3点のうち、原点から最も遠くにあるものはどれか。

$$A(2, 3, 5), \quad B(4, -4, 2), \quad C(5, 0, 4)$$

次に、任意の2点 $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ の距離を求めよう。

原点 O を点 P に移す平行移動によって、ある点 $R(x, y, z)$ が点 Q に移されるとすれば、

$$x + x_1 = x_2, \quad y + y_1 = y_2, \quad z + z_1 = z_2$$

なる関係が成り立つ。

したがって、点 R の座標は

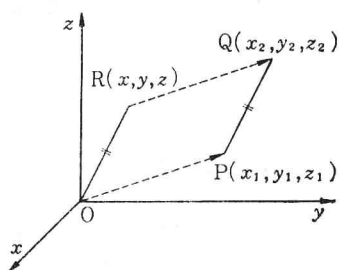
$$(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

となる。

一方、平行移動によって線分の長さは変わらないから、

$$PQ = OR$$

これと例題1の結果とから、次のことがわかる。



2点 (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) 間の距離を d とすれば

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

2点間の距離

問2 次の2点 A , B 間の距離を求めよ。

(1) $A(-2, 3, -1)$, $B(4, 0, -3)$

(2) $A(1, 0, 3)$, $B(0, 1, 2)$

例題2 2点 $A(4, -1, 2)$, $B(1, 1, 3)$ がある。 xy 平面上に点 C をとり $\triangle ABC$ が正三角形となるようにせよ。