

Г. П. КЛИМОВ

**Теория
вероятностей
и математическая
статистика**

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА
1983

Климов Г. П. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. — 328 с.

В основу книги положен трехсеместровый курс лекций, читавшихся автором в течение ряда лет на факультете вычислительной математики и кибернетики. Книга состоит из трех частей: вероятность, процессы, статистика. В тексте содержится около 200 задач и поясняющих примеров.

Для студентов университетов и институтов, а также лиц, изучающих или использующих теорию вероятностей.
Ил. 18.

Рецензенты:

академик АН УССР *Б. В. Гнеденко*,
доцент *В. Ф. Матвеев*

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Московского университета

ГЕННАДИЙ ПАВЛОВИЧ КЛИМОВ

**ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА**

Заведующий редакцией *С. И. Зеленский*. Редактор *А. А. Локишин*.
Мл. редактор *О. Е. Силантьева*. Художник *Н. Н. Сенько*. Художественный редактор *М. Ф. Евстафьева*. Технический редактор *З. С. Кондрашова*. Корректоры *М. И. Эльмус*, *С. Ф. Будаева*, *Л. С. Клочкова*.

Тематический план 1983 г. № 71. ИБ № 1482. Сдано в набор 13.04.83. Подписано к печати 05.10.83. Л-96303. Формат 60×90^{1/16}. Вумага тип. № 3. Гарнитура Литературная. Высокая печать. Усл. печ. л. 20,50. Уч.-изд. л. 19,94. Зак. 82. Тираж 13070 экз. Цена 1 р. 20 к. Изд. № 2329. Ордена «Знак Почета» издательство Московского университета. 103009, Москва, ул. Герцена, 5/7. Типография ордена «Знак Почета» изд-ва МГУ. Москва, Ленинские горы.

1702060000 — 157
К 077(02) — 83 71—83

© Издательство Московского университета, 1983 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
Часть 1. ВЕРОЯТНОСТЬ	9
Введение	9
Глава 1. ДИСКРЕТНОЕ ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРОСТРАНСТВО	9
§ 1. Событие и вероятность	9
§ 2. Вероятностное пространство	11
§ 3. Независимость событий	12
§ 4. Условная вероятность	13
§ 5. Вероятность объединения событий	14
§ 6. Формула полной вероятности	15
§ 7. Формула Байеса	15
§ 8. Примеры распределений	16
§ 9. Случайная величина. Математическое ожидание	18
§ 10. Независимость случайных величин	19
§ 11. Аддитивное и мультипликативное свойство математического ожидания (м. о.)	21
§ 12. Моменты	22
§ 13. Аддитивность дисперсии для независимых д. с. в.	22
§ 14. Производящая функция	22
§ 15. Биномиальное распределение	23
§ 16. Распределение Пуассона	24
§ 17. Отрицательно-биномиальное распределение	24
§ 18. Приближение биномиального распределения пуассоновским	26
§ 19. Индикатор события	28
§ 20. Неравенство Маркова	28
§ 21. Закон больших чисел	29
§ 22. Центральная предельная теорема	33
Глава 2. ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРОСТРАНСТВО	35
§ 1. Определение вероятностного пространства	35
§ 2. Построение вероятностного пространства	36
§ 3. Полное вероятностное пространство	39
§ 4. Непрерывное вероятностное пространство	40
§ 5. Определение случайной величины	42
§ 6. Операции над случайными величинами	44
§ 7. Эквивалентность и сходимость почти наверное сл. в.	45
§ 8. Независимость	46
§ 9. Математическое ожидание; функция распределения; плотность распределения	49
§ 10. Характеристические функции	52
§ 11. Одномерное нормальное распределение	56
§ 12. Гамма-распределение	58
§ 13. Бета-распределение и другие распределения	59
§ 14. Равномерное распределение	62
§ 15. Характеристическая функция векторной сл. в.	65

§ 16. Многомерное нормальное распределение	66
§ 17. Неравенство Маркова	70
§ 18. Неравенство Иенсена	70
§ 19. Неравенство Колмогорова	71
§ 20. Неравенства для моментов	73
§ 21. Условное математическое ожидание	74
§ 22. Условная вероятность	78
Дополнение. СУБЪЕКТИВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ	84
Задачи	89

Часть 2. ПРОЦЕССЫ

Введение: Определение случайного процесса, теорема Колмогорова о построении процесса по частным распределениям	103
--	-----

Глава 3. ЦЕПИ МАРКОВА (С ДИСКРЕТНЫМ И НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ)	109
---	-----

§ 1. Определение цепи Маркова с дискретным и непрерывным временем	109
§ 2. Примеры однородных цепей Маркова	112
§ 3. Предельное распределение цепи Маркова	117
§ 4. Доказательства	119
§ 5. Закон больших чисел для цепей Маркова	123
§ 6. Строение однородного марковского процесса с непрерывным временем и конечным множеством состояний	125
§ 7. Строение однородного марковского процесса с непрерывным временем и счетным множеством состояний	136

Глава 4. ПРОЦЕССЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ	139
----------------------------------	-----

§ 1. Определение процесса восстановления	139
§ 2. Элементарная теорема восстановления	140
§ 3. Теорема Блекуэлла	142
§ 4. Узловая теорема восстановления	143

Глава 5. РЕГЕНЕРИРУЮЩИЕ ПРОЦЕССЫ	147
----------------------------------	-----

§ 1. Определение регенерирующего процесса	147
§ 2. Предельная теорема для регенерирующего процесса	148
§ 3. Закон больших чисел для регенерирующих процессов	152

Глава 6. ЭЛЕМЕНТЫ СЛУЧАЙНОГО АНАЛИЗА	157
--------------------------------------	-----

§ 1. Виды сходимости сл. в.	157
§ 2. Эквивалентные определения сходимости сл. в. и основные свойства	159
§ 3. Теорема Прохорова и ее применения	160
§ 4. Стохастическая непрерывность	163
§ 5. Стохастический интеграл от неслучайной функции	165
§ 6. Ортогональная мера и интеграл со значениями в гильбертовом пространстве	169
§ 7. Дифференцирование и интегрирование математического ожидания процесса	178

Глава 7. ГАУССОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ	179
-------------------------------	-----

§ 1. Определение гауссовского процесса	179
§ 2. Винеровский процесс	180
§ 3. Неоднородный винеровский процесс	182

Глава 8. СТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ	185
§ 1. Определение стационарного (в широком смысле) процесса; примеры	185
§ 2. Представление стационарного процесса через процесс с некоррелированными приращениями	187
§ 3. Дифференцирование стационарных процессов	190
§ 4. Интегрирование стационарных процессов	194
Дополнение. РЕГЕНЕРИРУЮЩИЕ ПРОЦЕССЫ С ЗАВИСИМЫМИ ЦИКЛАМИ РЕГЕНЕРАЦИИ МАРКОВСКОГО ТИПА	201
§ 1. Полумарковский процесс восстановления (ПМПВ)	201
§ 2. Достаточное условие существования моментов ПМПВ	202
§ 3. Элементарная теорема восстановления для ПМПВ	203
§ 4. Теорема Блекуэлла для ПМПВ	206
§ 5. Узловая теорема теории восстановления для ПМПВ	208
§ 6. Предельная теорема для регенерирующих процессов с зависимыми циклами регенерации марковского типа	208
§ 7. Пример применения регенерирующих процессов с зависимыми циклами регенерации марковского типа	213
Задачи	215

Часть 3. СТАТИСТИКА

Введение	229
§ 1. Постановка статистической задачи	229
§ 2. Функция риска	231
§ 3. Упорядочение стратегий	232
Глава 9. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ	234
§ 1. Статистическая структура	234
§ 2. Статистика	235
§ 3. Достаточная статистика	235
§ 4. Полная статистика	237
§ 5. Свободная статистика	238
§ 6. Достаточное условие существования решающего правила с равномерно наименьшим риском	239
Глава 10. ТОЧЕЧНЫЕ ОЦЕНКИ: ТЕОРИЯ КРАМЕРА — РАО	243
§ 1. Несмещенная оценка с минимальной дисперсией (н. о. м. д.)	243
§ 2. Единственность н. о. м. д.	245
§ 3. Неравенство Крамера—Рао	245
§ 4. Эффективные оценки	247
§ 5. Улучшение неравенства Крамера — Рао. Неравенство Баттачария	250
§ 6. Многомерный аналог неравенства Крамера—Рао	252
§ 7. Многомерный аналог неравенства Баттачария	255
§ 8. Выражение н. о. м. д. через достаточную статистику	257
Глава 11. ТОЧЕЧНЫЕ ОЦЕНКИ: МЕТОД МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ	258
§ 1. Оценки максимального правдоподобия (о. м. п.)	258
§ 2. Состоятельные оценки	262
§ 3. Состоятельность о. м. п.	262
§ 4. Асимптотическая нормальность о. м. п.	266
Глава 12. ТОЧЕЧНЫЕ ОЦЕНКИ: МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ	271
§ 1. Примеры	271

§ 2. Нормальное уравнение	271
§ 3. Теорема Гаусса—Маркова	273
§ 4. Линейная модель регрессии	274
§ 5. Нормальное распределение ошибок	277
Глава 13. ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ	280
§ 1. Определение	280
§ 2. Интервальная оценка максимального правдоподобия	282
§ 3. Принцип отношения правдоподобия	282
§ 4. Асимптотическое свойство принципа отношения правдоподобия	283
§ 5. Обобщенный принцип отношения правдоподобия	283
§ 6. Техника использования принципа отношения правдоподобия	287
Глава 14. МНОГОМЕРНЫЙ АНАЛИЗ. ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ	289
§ 1. Введение	289
§ 2. Предположения о пространстве параметров $\theta = (\mu, a)$	290
§ 3. Свойство оценки максимального правдоподобия	291
§ 4. Оценивающая функция	292
§ 5. Интервальная оценка максимального правдоподобия для $\theta = (\mu, a)$	293
§ 6. Независимость $\hat{\mu}$ и $\hat{a}$	294
§ 7. Оценивание μ и a в отдельности	297
Глава 15. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ	299
§ 1. Гипотеза и критерий	299
§ 2. Функция мощности. Упорядочение критериев	300
§ 3. Фундаментальная лемма Неймана—Пирсона	301
Глава 16. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ	302
§ 1. Постановка задачи	302
§ 2. Последовательный критерий отношения вероятностей для s гипотез	304
§ 3. Конечность среднего объема выборки при использовании последовательного критерия отношения вероятностей	308
Задачи	310

ПРЕДИСЛОВИЕ

Содержание книги составляют лекции по теории вероятностей и математической статистике для студентов факультета вычислительной математики и кибернетики Московского университета. Теории вероятностей и математической статистике отводится три семестра (5-й, 6-й, 7-й) по одной лекции в неделю и в эти же три семестра проводятся семинарские занятия (в 5-м семестре одно занятие в неделю, в 6 и 7 семестрах — через неделю).

По числу семестров лекции разбиты на три части: вероятность, процессы, статистика. 200 предлагаемых на семинарских занятиях задач распределены в книге следующим образом: 100 задач приведено в 1-й части, по 50 задач — во 2-й и 3-й частях (пропорционально частоте занятий в семестрах).

В 1-й части «Вероятность» акцент делается на следующем.

1. В каждом примере и каждой задаче прежде всего предлагается выбрать вероятностное пространство. В некоторых случаях для одной и той же задачи предлагается несколько вероятностных пространств. Обращается внимание на то, что теория вероятностей начинается лишь после выбора вероятностного пространства, что вероятностное пространство есть предмет теории вероятностей.

2. На начальном этапе изучения теории вероятностей комбинаторные задачи не культивируются. Культ таких задач выбивает у изучающих почву, на которой строится теория вероятностей, и, кроме того, создает впечатление примитивности и искусственности.

3. Исследуется дискретное вероятностное пространство, для которого приводятся многие утверждения, часто излагаемые лишь для общего вероятностного пространства, но с доказательствами, не изменяющимися в общем случае (например, закон больших чисел Хинчина).

Во второй части «Процессы» выбор материала нетрадиционный: подробно излагаются марковские процессы с непрерывным временем и счетным множеством состояний, процессы восстановления, регенерирующие процессы. Такой выбор материала связан с тем, что большая часть лиц, изучающих случайные процессы, впоследствии сталкивается с применениями именно этих процессов. Отметим еще, что формулировки и доказательства эргодических теорем для марковских цепей не зависят от времени (дискретного или непрерывного). Мало уделяется внимания центральным предельным теоремам теории вероятностей (простейшая центральная предельная теорема приводится как пример лишь в связи с применениями теоремы Прохорова).

В третьей части «Статистика» вначале излагаются основные понятия математической статистики (статистическая структура, пренебрежимость, достаточная статистика, полная статистика, свободная статистика). Далее подробно излагается лишь теория точечных оценок (эффективные оценки, о.м.п., МНК-оценки) и интервальных оценок (максимального правдоподобия на основе принципа отношения правдоподобий). Совсем кратко излагается теория проверки гипотез (этот пробел восполняется у студентов, специализирующихся по математической статистике).

Некоторые доказательства и освещение материала могут показаться непривычными для специалиста, но новичками часто воспринимаются проще.

ЧАСТЬ I

ВЕРОЯТНОСТЬ

ВВЕДЕНИЕ

Теория вероятностей есть математический анализ понятия случайного эксперимента. Событие и вероятность являются основными понятиями этой теории. При формализации этих понятий исходят из теоретико-множественной модели теории вероятностей, предложенной А. Н. Колмогоровым в 1929 г.

Предполагается, что результат или исход случайного эксперимента не может быть определен. Пусть $\Omega = \{\omega\}$ есть множество всех исходов и A есть некоторое событие, связанное с рассматриваемым экспериментом. Естественно считать, что по исходу эксперимента можно сказать осуществилось ли событие A или нет. Поэтому событие A можно отождествить с некоторой совокупностью исходов, т. е. считать, что событие есть подмножество элементов из Ω . Сами же элементы $\omega \in \Omega$ можно тогда называть элементарными событиями. В этом случае объединение, пересечение и дополнение событий совпадают с соответствующими теоретико-множественными операциями, а класс событий, включающий интересующие нас события, должен быть замкнут относительно этих операций, т. е. объединение, пересечение и дополнение событий являются событиями.

Вероятность же есть числовая характеристика (функция) класса событий, свойства которой должны быть аналогичны свойствам частоты осуществления события.

Прежде чем перейти к формализации и исследованию этих понятий при общих предположениях, в первой главе мы рассматриваем частный, но довольно распространенный случай, когда множество элементарных событий не более чем счетно.

ГЛАВА I

ДИСКРЕТНОЕ ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРОСТРАНСТВО

§ 1

СОБЫТИЕ И ВЕРОЯТНОСТЬ

Пусть $\Omega = \{\omega\}$ — конечное или счетное множество. Элементы множества Ω будем называть элементарными событиями, а само множество Ω — пространством элементарных событий.

Любое подмножество A множества Ω назовем событием. Обозначим через S класс подмножеств множества Ω , иначе S — класс событий.

Пусть, далее, каждому $\omega \in \Omega$ сопоставлено число $P(\omega)$ такое, что

$$P(\omega) \geq 0, \quad \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$$

Число $P(\omega)$ называется вероятностью элементарного события ω . Под вероятностью события A понимается число

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega).$$

Пример 1. Пусть

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}, \quad P(\omega_k) = 1/N \quad \forall k,$$

тогда

$$P(A) = \frac{r}{N} = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

где $r = |A|$ — число элементарных событий, содержащихся в событии A . Это есть классическая модель теории вероятностей.

Пример 2. При двукратном бросании правильной монеты можно считать, что пространство элементарных событий есть

$$\Omega = \{\Gamma\Gamma, \Gamma P, P\Gamma, PP\},$$

где Γ = «герб», P = «решка». При n -кратном бросании монеты можно считать, что пространство Ω элементарных событий состоит из элементарных событий вида

$$\omega = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n),$$

где $\varepsilon_i = \Gamma$ или P для $\forall i$. В этом случае, см. пример 1, $N = 2^n$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\varepsilon_i = 0$ или 1 для $\forall i$. Рассмотрим событие

$$A = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) : \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n = k\}$$

для некоторого $k = 0, 1, \dots, n$. Тогда

$$|A| = C_n^k \quad \text{и} \quad P(A) = C_n^k / 2^n.$$

Отметим, что событие A состоит в выпадении k раз решки при n -кратном бросании монеты.

Пример 3 (показывающий, что пространство элементарных событий не всегда можно считать конечным). Два лица I и II, начиная с первого, поочередно бросают монету до тех пор, пока не выпадет герб. Выигрывает тот, кто сделает последний ход. Возможные состояния игры есть

$$\omega_1 = \Gamma,$$

$$\omega_2 = \text{PГ},$$

$$\omega_3 = \text{РРГ},$$

...

Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$, $P(\omega_k) = 2^{-k}$; ясно, что $P(\Omega) = 1$. $A = \{\omega_{2k+1} : k \geq 0\}$ — событие, заключающееся в том, что выигрывает лицо I. Тогда вероятность того, что выигрывает лицо I, есть

$$P(A) = \sum_{k \geq 0} P(\omega_{2k+1}) = \sum_{k \geq 0} 2^{-(2k+1)} = 2/3.$$

§ 2

ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРОСТРАНСТВО

В предыдущем параграфе были введены три объекта:

Ω — конечное или счетное множество (пространство элементарных событий);

S — класс всех (!) подмножеств множества Ω (класс событий);

P — числовая функция, определенная на S (при этом $P(A)$ есть вероятность события $A \in S$).

Отметим, что выполнены следующие свойства:

A1. Класс S является σ -алгеброй, т. е.

1) $A \in S$ влечет $A^c = \Omega \setminus A \in S$,

2) $A_i \in S$ для $i = 1, 2, \dots$ влечет $\bigcup A_i \in S$, $\bigcap A_i \in S$.

A2. Числовая функция P , определенная на S ,

1) нормирована, т. е. $P(\Omega) = 1$,

2) неотрицательна, т. е. $P(A) \geq 0$ для всех $A \in S$,

3) σ -аддитивна, т. е. $P(\sum A_i) = \sum P(A_i)$.

Здесь $\sum A_i = \bigcup A_i$, когда $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$. События A и B такие, что $A \cap B = \emptyset$, называются несовместимыми.

Тройка объектов (Ω, S, P) называется **вероятностным пространством**. Отметим, что основной предмет исследования в теории вероятностей есть вероятностное пространство. Это пространство мы определили для случая, когда Ω — не более чем счетное множество.

Для задания вероятностного пространства (в дискретном случае) достаточно задать множество $\Omega = \{\omega_k\}$ и отображение $\omega_k \rightarrow p_k = P(\omega_k)$ такое, что $p_k \geq 0$ и $\sum p_k = 1$. Часто это удобно делать в форме таблицы распределения вероятностей:

Ω	ω_1	ω_2	$\dots$	ω_N
P	p_1	p_2	$\dots$	p_N

Из приведенных свойств A1 и A2 следует (показать!), в частности, что

1) $\emptyset \in S$ и $P(\emptyset) = 0$,

2) для событий A и B включение $A \subset B$ влечет $P(A) \leq P(B)$,

3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$,

4) $P(\bigcap A_k) \leq \sum P(A_k)$,

5) если $A_n \uparrow A$, то $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$,

6) если $A_n \downarrow A$, то $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$.

Здесь $A_n \uparrow A$ означает

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots \text{ и } A = \bigcup A_n,$$

а $A_n \downarrow A$ означает

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots \text{ и } A = \bigcap A_n.$$

Отметим еще, что иногда событие Ω называют **достоверным**, а событие $\emptyset$ — **невозможным**.

§ 3 НЕЗАВИСИМОСТЬ СОБЫТИЙ

События A и B независимы, если $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Пример 1. Рассмотрим следующую таблицу распределения вероятностей, возникающую при двухкратном бросании монеты:

Ω	ГГ	ГР	РГ	РР
P	1/4	1/4	1/4	1/4

Пусть $A = \{\text{ГГ}, \text{ГР}\}$ — событие, заключающееся в выпадении герба при первом бросании; $B = \{\text{ГР}, \text{РР}\}$ — событие, заключающееся в выпадении решки при втором бросании монеты. В этом случае события A и B независимы, так как

$$AB = \{\text{ГР}\}, \quad P(AB) = 1/4,$$

$$P(A) = P(\text{ГГ}) + P(\text{ГР}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

$$P(B) = P(\text{ГР}) + P(\text{РР}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

поэтому $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Пусть $\{A_i : i \in I\}$ — семейство событий. Говорят, что события этого семейства **взаимно независимы**, или **независимы в совокупности**, если

$$P\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} P(A_i)$$

для всякого конечного набора J индексов из I .

Пример 2 (когда события попарно независимы, но зависимы в совокупности). Пусть $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ и $P(\omega_k) = 1/4$ для $k=0, 1, 2, 3$. Рассмотрим события $A_i = \{\omega_0, \omega_i\}$, $i=1, 2, 3$; см. рис. 1. Оказывается, что события A_1, A_2, A_3 попарно независимы, но зависимы в совокупности. Действительно,

$$P(A_i) = P(\omega_0) + P(\omega_i) = \frac{1}{4} +$$

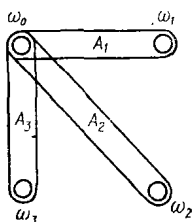


Рис. 1

$$+ \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{для } i =$$

$$P(A_i A_j) = P(\omega_0) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A_i) \cdot P(A_j) \quad \text{для } i \neq j,$$

т. е. события A_1, A_2, A_3 попарно независимы. Но

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(\omega_0) = \frac{1}{4} \neq P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = \frac{1}{8},$$

т. е. события A_1, A_2, A_3 зависимы в совокупности.

§ 4 УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

Рассмотрим сначала классическую модель теории вероятностей, см. пример 1 § 1, когда

$$|\Omega| = N \text{ и } P(\omega) = 1/N \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Пусть A и B — два события. Предположим, что осуществилось событие A . Тогда число элементарных событий уменьшилось с N до $n = |A|$. При этом условии обозначим через $P_A(B)$ вероятность события B . Из оставшихся n элементарных событий в событии B содержится $k = |AB|$ элементарных событий. Поэтому естественно определить

$$P_A(B) = \frac{k}{n} = \frac{k/N}{n/N} = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Это позволяет дать следующее определение условной вероятности.

Пусть A и B — события. Число $P(AB)/P(A)$, если только $P(A) \neq 0$, называется условной вероятностью события B относительно A (иногда говорят: при условии, что совершилось событие A) и обозначается $P_A(B)$ или $P(B/A)$ или $P(B:A)$. Число $P_A(B)$ не определено, если $P(A) = 0$. Таким образом,

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B).$$

Отметим, что если $P(A) = 0$, то события A и B независимы (показать!). Если же $P(A) > 0$, то события A и B независимы, если и только если $P_A(B) = P(B)$.

Если (Ω, S, P) — вероятностное пространство, $A \in S$ и $P(A) > 0$, то тройка (Ω_A, S_A, P_A) есть вероятностное пространство. Здесь

$$\Omega_A = A\Omega = A, \quad S_A = \{AC : C \in S\},$$

$P_A(B) = P(AB)/P(A) = P(B)/P(A)$ для всякого $B \in S_A$. Вероятностное пространство (Ω_A, S_A, P_A) называется условным вероятностным пространством относительно события A .

$$P\left(\bigcup_1^n A_i\right) = P(A_1) + \dots + P(A_n) -$$

$$(1) \quad - P(A_1 A_2) - P(A_1 A_3) - \dots - P(A_{n-1} A_n) + P(A_1 A_2 A_3) + \\ + P(A_1 A_2 A_4) + \dots + P(A_{n-2} A_{n-1} A_n) + (-1)^{n+1} P(A_1 \dots A_n).$$

При $n=2$ формула указана в § 2. Для любого целого $n \geq 1$ формула проверяется по индукции (по числу n с использованием лишь свойств $A1 - A2$ § 2) на основании формулы

$$P\left(\bigcup_1^{n+1} A_i\right) = P\left(\bigcup_1^n A_i \cup A_{n+1}\right) = P\left(\bigcup_1^n A_i\right) + P(A_{n+1}) - P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i A_{n+1}\right).$$

Справедлива аналогичная формула, если операции «объединения» и «пересечения» поменять местами. Такая формула для вычисления вероятности пересечения событий (через вероятности объединения их) может быть получена из предыдущей, используя соотношение

$$\bigcap_1^n A_i = \left(\bigcup_1^n A_i^c\right)^c,$$

но проще доказать ее опять по индукции (по числу n). Формула (1) носит еще название формулы Буля.

Пример (задача о совпадениях). Рассмотрим n элементов, расположенных в некотором порядке. Случайным образом они переставляются. Это означает, что все $n!$ перестановок равновероятны. Какова вероятность того, что хотя бы один элемент окажется на своем месте?

Пусть A_i — событие, состоящее в том, что i -й элемент окажется на своем месте. Всего элементарных событий (перестановок) $n!$. Событие A_i содержит $(n-1)!$ элементарных событий (перестановок). Следовательно,

$$P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!}.$$

Событие $A_i A_j$ при $i \neq j$ означает, что i -й и j -й элементы остаются на своих местах; поэтому

$$P(A_i A_j) = \frac{(n-2)!}{n!}, \dots, P(A_1 \dots A_n) = \frac{1}{n!}.$$

Событие $\bigcup_1^n A_i$ означает, что хотя бы один элемент окажется на своем месте. Вероятность такого события и требуется определить. Так как в формуле (1) слагаемые в каждой строке одинаковые

и количество их равно $C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^n$ соответственно, то

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_1^n A_i\right) &= C_n^1 \frac{(n-1)!}{n!} - C_n^2 \frac{(n-2)!}{n!} + C_n^3 \frac{(n-3)!}{n!} - \dots + \\ &+ (-1)^{n+1} C_n^n \frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!} = \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right). \end{aligned}$$

Выражение в скобках есть сумма первых $(n+1)$ членов разложения в ряд e^{-x} по степеням x при $x=1$. Отметим, что

$$P\left(\bigcup_1^n A_i\right) \rightarrow 1 - e^{-1} \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

§ 6

ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

Пусть $\Omega = \sum_k E_k$ и $P(E_k) > 0$. Тогда

$$\boxed{P(A) = \sum_k P(E_k) \cdot P_{E_k}(A)}.$$

Это следует из равенства $A = A\Omega = \sum A E_k$, σ -аддитивности вероятности P и определения условной вероятности.

Пример. Среди N билетов находится n «счастливых». A_k — событие, заключающееся в том, что k -й вытянутый билет является счастливым. Если билеты возвращаются обратно (и тщательно перемешиваются), то $P(A_k) = n/N$. Найдем $P(A_2)$ в предположении, что извлеченные билеты не возвращаются и что неизвестно, какой предыдущий билет. По формуле полной вероятности имеем ($\Omega = A_1 + A_1^c = E_1 + E_2$):

$$\begin{aligned} P(A_2) &= P(A_1)P(A_2|A_1) + P(A_1^c)P(A_2|A_1^c) = \\ &= \frac{n}{N} \cdot \frac{n-1}{N-1} + \frac{N-n}{N} \cdot \frac{n}{N-1} = \frac{n}{N}. \end{aligned}$$

Оказывается, что $P(A_k) = n/N$ при $1 \leq k \leq N$, и тем самым вероятность $P(A_k)$ вытянуть счастливый билет не зависит от того, возвращается ли предыдущий билет или нет. Применительно к студентам, стремящимся попасть на экзамен последними, этот пример показывает, что их надежды на то, что до них «вытащат» все несчастливые билеты, тщетны.

§ 7

ФОРМУЛА БАЙЕСА

Пусть опять $\Omega = \sum E_k$ и известно распределение событий E_k , т. е. известны все $P(E_k)$. Пусть произошло событие A . Каково новое распределение событий E_k при поступлении этой новой ин-

формации? Более точно это означает, найти $P_A(E_k)$ через $P(E_i)$ и $P_{E_i}(A) \forall i$.

Ответ дается формулой Байеса

$$P_A(E_k) = \frac{P(E_k) P_{E_k}(A)}{\sum_i P(E_i) P_{E_i}(A)},$$

которая следует из формулы

$$P_A(E_k) = \frac{P(AE_k)}{P(A)},$$

определения условной вероятности и формулы полной вероятности. Предполагается, что

$$P(A) > 0 \text{ и } P(E_i) > 0 \forall i.$$

Отметим, что часто набор $\{P(E_i)\}$ называют априорным распределением, а набор $\{P_A(E_i)\}$ — апостериорным распределением относительно события A (при условии, что произошло событие A).

§ 8

ПРИМЕРЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Многие классические модели теории вероятностей сводятся к следующим примерам.

Пример 1. Ящик содержит m шаров. Среди них m_1 белых и m_2 черных шаров, $m_1 + m_2 = m$. Шары тщательно перемешиваются. Извлекается один шар, запоминается его цвет, и шар возвращается обратно. Производится n таких извлечений шаров. После каждого возвращения шары тщательно перемешиваются. Пусть A_k — событие, состоящее в том, что k извлеченных шаров были белые (а $n-k$ — черные). Найдем вероятность этого события.

Если все шары занумеровать числами $1, 2, \dots, m$, то результат n извлечений можно представить в виде

$$\omega = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n),$$

где ε_i означает номер шара после i -го извлечения, тем самым каждое ε_i принимает m значений $1, 2, \dots, m$. За пространство элементарных событий примем $\Omega = \{\omega\}$ и положим $P(\omega) = 1/|\Omega|$. Множество Ω состоит из $|\Omega| = m^n$ элементарных событий. Множество же A_k состоит из

$$|A_k| = C_n^k m_1^k m_2^{n-k}$$

элементарных событий. Следовательно,

$$p_k = P(A_k) = \frac{|A_k|}{|\Omega|} = C_n^k \left(\frac{m_1}{m}\right)^k \left(\frac{m_2}{m}\right)^{n-k},$$