Н. М. МАТВЕЕВ

СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ ПО ОБЫКНОВЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1960

Матвеев Николай Михайлович

Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям

Редактор *М. Е. Ильина*

Техн. редактор *С. Д. Водолагина*
Корректоры *В. Измайлович*
и *И. Т. Земскова*

Сдано в набор 13 VII 1960 г. М-45613.
Подписано к печати 1 X 1960 г.
Уч.-изд. л. 16,2. Печ. л. 18. Бум. л. 9.
Формат бум. $60 \times 92^{1}/_{16}$.
Тираж 12 500 экз. Заказ 656.
Цена 6 р. 30 к.,
с 1/I-1961 г. цена 63 коп.

Типография ЛОЛГУ. Ленинград.
Университетская наб., 7/9.

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени А. А. ЖДАНОВА

Н. М. МАТВЕЕВ

СБОРНИК
ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИИ
ПО ОБЫКНОВЕННЫМ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ
УРАВНЕНИЯМ

Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования РСФСР
в качестве учебного пособия для университетов

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1960

Печатается по постановлению Редакционно-издательского совета Ленинградского университета

В сборник входит более тысячи задач и упражнений по всем отделам университетского курса обыкновенных дифференциальных уравнений с кратким изложением методов интегрирования, решениями типовых примеров, ответами и указаниями для решения наиболее трудных задач.

Сборник рассчитан на студентов университетов. Может быть использован также студентами педагогических институтов и вузов с расширенной программой по математике.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий „Сборник“ содержит задачи по университетскому курсу дифференциальных уравнений в объеме программы, утвержденной Министерством высшего образования СССР. Значительная часть этого „Сборника“ может быть использована в педагогических институтах и в технических высших учебных заведениях. Он может быть также использован студентами-заочниками и лицами, самостоятельно изучающими теорию обыкновенных дифференциальных уравнений.

„Сборник“ состоит из семи отделов. Каждый отдел (кроме последнего) начинается вводным параграфом, в котором кратко излагаются основные понятия и определения, а также общие вопросы, относящиеся к задачам этого отдела. Затем идут параграфы, в которых содержатся уравнения определенного типа. Каждый из этих параграфов состоит из краткого изложения методов интегрирования уравнений рассматриваемого вида, решенных примеров и задач для самостоятельного решения. В конце отдела приводятся вопросы и задачи для повторения. Все определяемые понятия и формулировки теорем выделены курсивом. Для логического ударения используется разрядка.

Этот „Сборник“ составлен на основании опыта проведения практических занятий по курсу обыкновенных дифференциальных уравнений на математико-механическом факультете Ленинградского Государственного университета.

С целью облегчения использования „Сборника“ студентами-заочниками и лицами, самостоятельно изучающими теорию обыкновенных дифференциальных уравнений, я включил в „Сборник“ краткое изложение основных теоретических сведений, знание которых необходимо для сознательного решения примеров и задач.

С этой же целью, наряду с кратким изложением методов интегрирования, я рассматриваю большое количество подробно решенных примеров, иллюстрирующих эти методы и выявляющих свойства решений.

Вопросы и задачи для повторения, включенные в „Сборник“, содержат минимальный объем требований, предъявляемых обычно на зачете по обыкновенным дифференциальным уравнениям и могут быть использованы для самоконтроля.

Задачи, помещенные в последнем отделе „Сборника“, либо являются дополнительными к соответствующим задачам предыдущих отделов, либо выходят за рамки этих отделов. В последнем случае даны указания для их решения.

При составлении „Сборника“ использована следующая литература:

Н. М. Гютнер и Р. О. Кузьмин. Сборник задач по высшей математике, том II. Л.—М., Физматгиз, 1958.

Л. И. Креер. Сборник упражнений по дифференциальным уравнениям. М., Гостехиздат, 1940.

Н. М. Матвеев. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд. ЛГУ, 1955.

И. Г. Петровский. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Гостехиздат, 1952.

В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. II, М., Гостехиздат, 1957.

В. В. Степанов. Курс дифференциальных уравнений. М., Физматгиз, 1958.

Л. Э. Эльсгольц. Дифференциальные уравнения. М., Гостехиздат, 1957.

Убедительно прошу всех читателей сообщить в адрес Издательства о всех замеченных недостатках „Сборника“

Н. М. Матвеев

ОТДЕЛ I

УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, РАЗРЕШЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

1°. Понятие об обыкновенном дифференциальном уравнении первого порядка, разрешенном относительно производной, и его решении. *Обыкновенным дифференциальным уравнением* называется равенство, содержащее независимую переменную x, неизвестную функцию y и ее производные $y', y'', \ldots, y^{(n)}$:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{1}$$

Функцию F, как и вообще все рассматриваемые в этом задачнике функции, всюду, где не оговорено противное, мы предполагаем вещественной функцией от своих аргументов, которые тоже предполагаются вещественными.

Порядок старшей производной, входящей в состав уравнения (1), называется *порядком* этого уравнения.

Если уравнение (1) может быть приведено к такому виду, в котором левая часть есть целая рациональная функция (полином) относительно всех входящих в него производных, то наивысшая степень старшей производной называется *степенью* уравнения.

Решением уравнения (1) называется функция $y = \varphi(x)$, обращающая это уравнение в тождество.

График решения на плоскости (x, y) называется *интегральной кривой*.

Процесс нахождения решений называется *интегрированием дифференциального уравнения*. Задача интегрирования дифференциального уравнения состоит в нахождении всех решений этого уравнения и изучении их свойств.

Уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной (уравнение первого порядка и первой степени), имеет вид:

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y). \tag{2}$$

Относительно правой части этого уравнения мы будем всегда предполагать, что она однозначна и непрерывна. Наряду с ним рассматривают так называемое *перевернутое* уравнение:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f(x,y)}, \tag{2'}$$

используя его в окрестности тех точек, в которых $f(x, y)$ обращается в бесконечность.

Отметим другие записи уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной.

Уравнения (2) и (2') можно заменить равносильным им уравнением

$$dy-f(x, y)\,dx=0. \tag{3}$$

К уравнениям вида (2) и (2') приводятся также уравнение

$$M(x, y)\,dx+N(x, y)\,dy=0 \tag{4}$$

и так называемое *уравнение в симметрической форме:*

$$\frac{dx}{X(x,y)}=\frac{dy}{Y(x, y)}. \tag{5}$$

Решением дифференциального уравнения (2) на некотором интервале (a, b)* изменения независимой переменной x называется функция $y=\varphi(x)$, определенная и непрерывно дифференцируемая (т. е. имеющая непрерывную производную) на этом интервале и обращающая уравнение (2) в тождество, справедливое для всех значений x из интервала (a, b). При этом, конечно, предполагается, что точки $[x, \varphi(x)]$ лежат в области задания функции $f(x, y)$.

Например, для уравнения

$$y'=-\frac{x}{y} \tag{6}$$

функция

$$y=\sqrt{1-x^2} \tag{7}$$

будет решением в интервале $(-1, +1)$.

* Этот интервал может быть как конечным, так и бесконечным в одну или обе стороны. Он может быть также замкнутым (с одного или с обоих концов). Это замечание относительно интервала задания решения нужно иметь в виду и впредь.

Решение может быть задано в *неявном* виде

$$\Phi(x, y)=0. \tag{8}$$

Так, уравнение (6) имеет решение:

$$x^2+y^2=1. \tag{9}$$

Решение может быть задано также в *параметрической форме*:

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t). \tag{10}$$

Например, уравнение (6) имеет решение:

$$x=\cos t, \quad y=\sin t. \tag{11}$$

Решения уравнения (2′) присоединяются к решениям уравнения (2).

Решением уравнения (4) называется функция $y=y(x)$ или $x=x(y)$, обращающая это уравнение в тождество.

Все интегральные кривые являются *гладкими кривыми*, т. е. они имеют непрерывно изменяющуюся касательную.

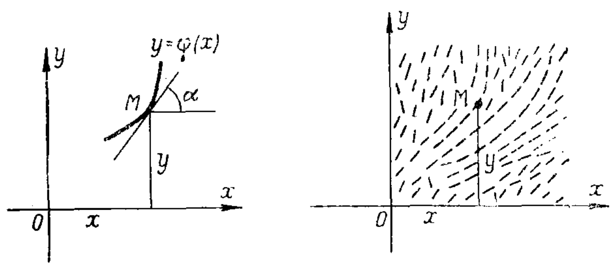

Рис. 1.

2°. Поле направлений. Если рассматривать дифференциальное уравнение в виде (2) и обозначить через α угол между касательной к интегральной кривой $y=\varphi(x)$ в точке (x, y) и положительным направлением оси Ox (рис. 1), то, принимая во внимание, что $\operatorname{tg}\alpha=y'$, а $y'=f(x, y)$, мы будем иметь $\operatorname{tg}\alpha=f(x, y)$, так что направление касательных к интегральным кривым задается самим дифференциальным уравнением.

Проведя в каждой точке (x, y) из области задания функции $f(x, y)$ отрезок (для определенности) единичной длины с центром в этой точке, образующий с положительным направлением оси Ox угол α, где $\operatorname{tg}\alpha=f(x, y)$, получим так называемое *поле направлений*.

Если в точке (x_0, y_0) правая часть уравнения (2) обращается в бесконечность, то направление поля параллельно оси Oy. В этом случае нужно использовать перевернутое дифференциальное уравнение (2′).

Если же в точке (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ обращается в неопределенность $\frac{0}{0}$, то говорят, что в этой точке поле не определено. Такую точку будем называть ***особой точкой*** дифференциального уравнения (2).

Если при этом существует интегральная кривая $y = y(x)$ $[x = x(y)]$, обладающая свойством $y(x) \to y_0$ при $x \to x_0$, $[x(y) \to x_0$ при $y \to y_0]$, то говорят, что она ***примыкает*** к точке (x_0, y_0). В рассматриваемом случае само уравнение (2) не указывает наклона касательной в точке (x_0, y_0) к интегральной кривой, примыкающей к этой точке. Это обстоятельство порождает особенности поведения интегральных кривых в окрестности особой точки (x_0, y_0), обусловленные аналитической структурой правой части уравнения (2).

Изучая поле направлений, определяемое заданным дифференциальным уравнением, мы получаем некоторое представление об интегральных кривых этого уравнения, а иногда и сами интегральные кривые.

Например, из рассмотрения соответствующих полей направлений ясно, что интегральными кривыми уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \tag{12}$$

являются полупрямые (рис. 2):

$$y = Cx \, (x \neq 0), \quad x = 0 \ (y \neq 0) \tag{13}$$

(C — любое постоянное число), а интегральными кривыми уравнения (6) служат окружности с центром в начале координат (рис. 3):

$$x^2 + y^2 = C^2. \tag{14}$$

В точке (0, 0) поле, определяемое уравнениями (6) и (12), не задано. Из (13) и (14) ясно, что все интегральные кривые уравнения (12) примыкают к точке (0, 0), в то время как в случае уравнения (6) ни одна из интегральных кривых не примыкает к ней.

Если дифференциальное уравнение задано в виде (4), то поле, определяемое этим уравнением, не определено в точке (x_0, y_0), в которой функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ одновременно обращаются в нуль. Эту точку будем называть *особой точкой* рассматриваемого уравнения.

При изучении поля направлений особый интерес представляют *изоклины* — линии, во всех точках которых направление поля одно и то же. Так, для уравнений (6) и (12) изоклинами служат полупрямые, выходящие из начала координат.

Изоклинами уравнения

$$y' = x^2 + y^2 \tag{15}$$

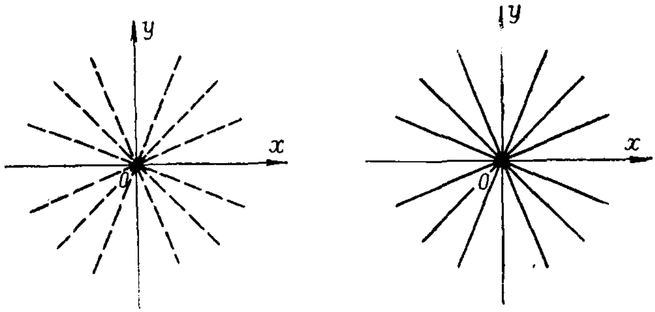

Рис. 2.

являются окружности $x^2 + y^2 = R^2$, так что, например, все интегральные кривые этого уравнения в точках пересечения

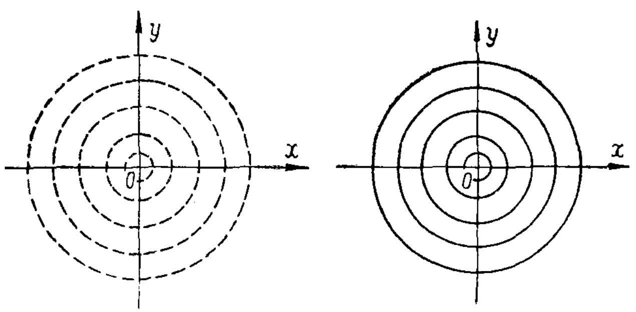

Рис. 3.

с окружностью $x^2 + y^2 = 1$ наклонены к оси Ox под углом $\frac{\pi}{4}$ (рис. 4).

Из вида правой части уравнения (15) ясно, что интегральная кривая, проходящая через начало координат, касается в этой точке оси Ox. Очевидно также, что каждое решение уравнения (15) есть возрастающая функция от x (во всем интервале существования решения). Таким образом, интегральная кривая, проходящая через начало координат, имеет вид, указанный схематически на рис. 4.

В простейших случаях удается по виду правой части уравнения (2) найти *линию экстремумов* и *линию точек* *перегиба* (линии, во всех точках которых интегральные кривые имеют соответственно экстремум или перегиб). Изоклины вместе с линиями экстремумов и точек перегиба дают возможность построить схематически графики интегральных кривых данного уравнения.

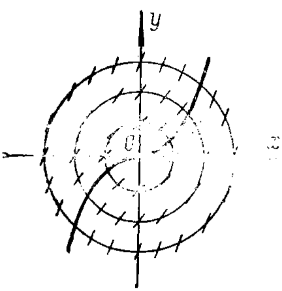

Рис. 4.

3°. Задача Коши. Во многих вопросах теоретического и прикладного характера требуется среди всех решений дифференциального уравнения (2) найти решение

$$y = y(x), \tag{16}$$

удовлетворяющее условиям:

$$y = y_0 \text{ при } x = x_0, \tag{17}$$

где x_0 и y_0 — заданные числа, т. е. ищется такое решение (16), в котором функция $y(x)$ принимает заданное значение y_0, если независимую переменную x заменить заданным значением x_0, так что $y(x_0) = y_0$.

Геометрически это означает, что ищется интегральная кривая, проходящая через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ (рис. 5).

Условия (17) называются *начальными условиями* решения (16), а числа x_0 и y_0 — *начальными данными* этого решения. Обычно числа x_0 и y_0 предполагаются конечными.

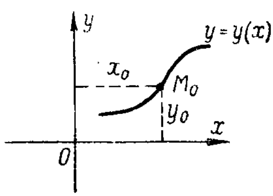

Рис. 5.

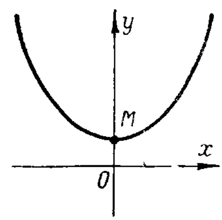

Рис. 6.

Задача нахождения решения, удовлетворяющего заданным начальным условиям (17), называется *задачей Коши.*

Например, решением уравнения

$$y' = 2x, \tag{18}$$

удовлетворяющим начальным условиям:

$$y = 1 \text{ при } x = 0, \tag{19}$$

будет

$$y = x^2 + 1. \tag{20}$$

Это — парабола, проходящая через точку (0, 1) (рис. 6).

В случае, когда в точке (x_0, y_0) правая часть уравнения (2) обращается в бесконечность, рассматривают перевернутое уравнение (2′) и ищут интегральную кривую, проходящую через эту точку в виде $x = x(y)$.

Вообще решение задачи Коши для уравнения в любой из форм его записи ищут в том виде, в каком это оказывается наиболее удобно, т. е. в виде $y = y(x)$, $x = x(y)$, $F(x, y) = 0$ или в параметрической форме $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Задача Коши для уравнения (2) с начальными данными x_0, y_0, согласно теореме Пеано, имеет решение, если точка (x_0, y_0) лежит в области задания и непрерывности правой части этого уравнения. Единственность решения только при одном этом условии не гарантируется.

Чтобы гарантировать не только существование, но и единственность решения задачи Коши, достаточно, согласно теореме Пикара, предположить дополнительно, что правая часть уравнения (2) удовлетворяет условию Липшица относительно y в некоторой окрестности начальной точки (x_0, y_0), в частности, что она имеет в этой окрестности ограниченную частную производную по y.

Например, так обстоит дело, если правая часть уравнения (2) есть полином относительно x и y. При этом начальную точку (x_0, y_0) можно выбирать произвольно.

Единственность решения задачи Коши также заведомо имеет место, если функция $f(x, y)$ есть полином только относительно y, причем коэффициенты этого полинома суть непрерывные функции от x. Но при этом только y_0 можно задавать произвольно, а x_0 должно лежать внутри интервала непрерывности коэффициентов.

Если уравнение имеет вид (4), где M и N суть полиномы, то существует единственное решение с начальными данными x_0, y_0, если в точке (x_0, y_0) функции M и N не обращаются одновременно в нуль.

Точки (x_0, y_0), в которых $f(x, y)$ непрерывна, а $\frac{\partial f}{\partial y}$ обращается в бесконечность, будем называть *особыми точками* уравнения (2). В этих точках может быть нарушена единственность решения задачи Коши. Например, для уравнения

$$y' = 2\sqrt{y} \tag{21}$$

такими точками будут все точки оси $Ox\,(y=0)$.

Решение задачи Коши стараются найти в элементарных функциях или в квадратурах от элементарных функций. В тех случаях, когда это не удается, приходится искать решение в другом виде или прибегать к приближенным методам решения.

4°. Общее решение. Общее решение в форме Коши. Общий интеграл. Общее решение в параметрической форме. Функция

$$y = \varphi(x,\ C), \tag{22}$$

определенная в некоторой области изменения переменных x и C и имеющая частную производную по x, называется ***общим решением*** уравнения (2) в заданной области D изменения переменных x и y, в каждой точке которой решение задачи Коши существует и единственно,* если равенство (22) разрешимо в области D относительно произвольной постоянной C, так что мы имеем:

$$C = \psi(x,\ y) \tag{23}$$

и, если функция (22) является решением уравнения (2) при всех значениях произвольной постоянной C, доставляемых формулой (23), когда точка $(x,\ y)$ пробегает область D.

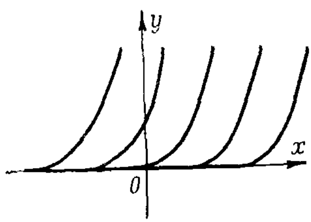

Рис. 7.

Например, для уравнения (21) общим решением в области

$$|x| < +\infty,\ 0 < y < +\infty \tag{24}$$

будет

$$y = (x + C)^2,\ x > -C. \tag{25}$$

Это — правые ветви парабол с вершинами на оси Ox и осями симметрии, параллельными оси Oy (рис. 7).

Чтобы найти решение уравнения (2) с начальными данными x_0, y_0 из области D при помощи формулы общего решения (22) поступают так:

1) подставляют в формулу (22) вместо x и y числа x_0 и y_0:

$$y_0 = \varphi(x_0,\ C). \tag{26}$$

---

* D есть вся область существования и единственности для уравнения (2) или ее часть.

2) решают уравнение (26) относительно C. Находят $C = C_0$.

3) подставляют найденное значение C в формулу (22):

$$y = \varphi(x, C_0). \tag{27}$$

Это и есть искомое решение. Оно будет единственным.

Общее решение

$$y = \varphi(x, x_0, y_0), \tag{28}$$

в котором роль произвольной постоянной играет начальное значение y_0 решения $y = y(x)$ при фиксированном значении x_0 независимой переменной x, называется *общим решением в форме Коши*.

Если общее решение уравнения (2) задано в неявном виде

$$\Phi(x, y, C) = 0 \text{ или } \psi(x, y) = C, \tag{29}$$

то оно называется *общим интегралом* этого уравнения. Так, для уравнения (6) общим интегралом будет соотношение (14).

Если общий интеграл уравнения (2) записан в виде $\psi(x, y) = C$, то функция ψ называется *интегралом* этого уравнения.

Если функция (22), дающая общее решение уравнения (2), задана в параметрическом виде

$$x = \varphi(t, C), \; y = \psi(t, C), \tag{30}$$

то (30) называется *общим решением* уравнения (2) *в параметрической форме*. Например, для уравнения (6) общим решением в параметрической форме будет:

$$x = C\cos t, \; y = C\sin t. \tag{31}$$

Если дано однопараметрическое семейство кривых, например, в виде (22), то, дифференцируя его по x и исключая из полученного уравнения и уравнения (22) параметр C, мы получим, вообще говоря, дифференциальное уравнение первого порядка. Это дифференциальное уравнение называется *дифференциальным уравнением* данного *семейства кривых*.

5°. Частное решение. Решение, в каждой точке которого сохраняется единственность решения задачи Коши, т. е. через эту точку в достаточно малой окрестности ее проходит только одна интегральная кривая, называется *частным решением*. Если (22) есть общее решение уравнения (2) в области D, то всякое решение, содержащееся в формуле (22), при конкретном (допустимом) числовом значении