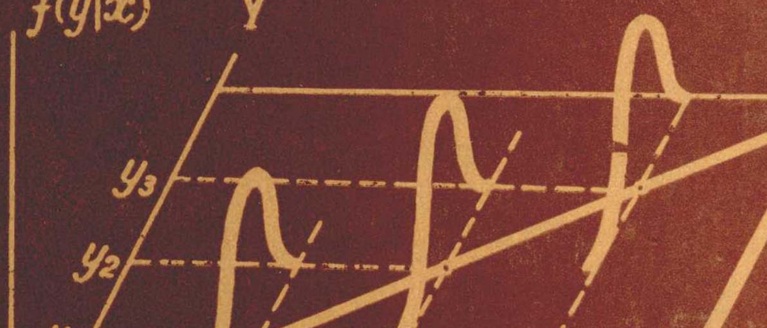
А. И. ГЕРАСИМОВИЧ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА



АНАТОЛИЙ ИГНАТЬЕВИЧ ГЕРАСИМОВИЧ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Изд. 2-е, перераб. и доп.

Зав. редакцией *Л. Д. Духвалов*
Редактор *С. С. Голод*
Мл. редактор *В. М. Кушилевич*
Худож. редактор *Ю. С. Сергачев*
Техн. редактор *М. Н. Кислякова*
Корректор *Т. К. Хваль*

ИБ № 1525

Сдано в набор 15.12.82. Подписано в печать 26.05.83. Формат 60×90/16. Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная. Высокая печать. Усл. печ. л. 17,5. Усл. кр.-отт. 17,82. Уч.-изд. л. 20,14. Тираж 8000 экз. Зак. № 2410. Цена 85 коп.

Издательство «Вышэйшая школа» Государственного комитета БССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 220048, Минск, проспект Машерова, 11.
Типография им. Франциска (Георгия) Скорины издательства «Наука и техника». 220600, Минск, Ленинский пр., 68.

А. И. ГЕРАСИМОВИЧ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Издание 2-е, переработанное
и дополненное

Допущено Министерством высшего
и среднего специального образования БССР
в качестве учебного пособия
для студентов инженерно-технических
и экономических специальностей
втузов

МИНСК
«ВЫШЭЙШАЯ ШКОЛА»
1983

ББК 22.17я73
Г37
УДК 519.22(075.8)

Рецензенты: кафедра высшей математики Московского инженерно-строительного института и *Е. И. Гурский,* канд. пед. наук, зав. кафедрой высшей математики Минского высшего инженерного зенитного ракетного училища противовоздушной обороны.

Герасимович А. И.

Г 37 Математическая статистика: [Учеб. пособие для инж.-техн. и экон. спец. втузов].— 2-е изд., перераб. и доп.— Мн.: Выш. школа, 1983.— 279 с., ил.

В пер.: 85 к.

Изложение материала основано на аксиоматическом подходе А. Н. Колмогорова. Дается определение понятия вероятностного пространства, рассмотрены случайные величины, изложены основные методы построения точечных и интервальных оценок параметров распределения и проверки статистических гипотез. Изложение теоретического материала сопровождается большим количеством примеров.

Предназначается для студентов инженерно-технических и экономических специальностей втузов, может быть полезно инженерно-техническим работникам.

Г $\dfrac{1702060000-088}{М303(05)-83}$ 27—83 ББК 22.17я73

ПРЕДИСЛОВИЕ

В основу настоящего учебного пособия положен курс лекций, который на протяжении ряда лет читался автором студентам Белорусского политехнического института. Некоторые разделы предлагаемой книги были включены в учебное пособие А. И. Герасимовича и Я. И. Матвеевой «Математическая статистика» (Мн.: Выш. школа, 1978).

В упомянутом учебном пособии были изложены только основные вопросы математической статистики (точечное и интервальное оценивание параметров, статистическая проверка гипотез, регрессионный анализ).

Предлагаемая книга содержит дополнительный материал по курсу теории вероятностей, кроме того, ранее опубликованные главы значительно переработаны. Здесь на базе системы аксиом А. Н. Колмогорова достаточно строго излагаются основы теории вероятностей. Указанная система аксиом вводится после изучения свойств относительных частот, что позволяет рассматривать вероятность как абстрактное понятие, моделирующее частотные закономерности вероятностного эксперимента.

Случайные величины (гл. 2, 3) излагаются на базе пространства элементарных событий, причем особое внимание уделяется механизму построения математических моделей вероятностных экспериментов, индуцированных случайными величинами.

Построение предлагаемого пособия согласовано с принципом непрерывности математической подготовки студентов машиностроительных, приборостроительных, механических, экономических, педагогических и других специальностей втузов. Большинство примеров, полученных автором от преподавателей технических кафедр БПИ либо заимствованных из спецкурсов по теории надежности, метрологии, основ математической обработки результатов измерений, экономической статистики и др., носит конкретный характер.

При изложении методов и приемов математической статистики (гл. 5—10) автор не стремился к полной строгости. В пособии ряд формул дан без выводов и глубокого теоретического обоснования. Читатели, желающие детально ознакомиться с математическим обоснованием того или иного метода или со строгим выводом некоторых математических формул, могут воспользоваться рекомендуемыми источниками. Особое внимание автор обращает на интерпретацию полученных результатов статистического анализа по готовым схемам.

Отдельные параграфы не входят в обязательный минимум, необходимый для усвоения курса математической статистики, и могут быть опущены без ущерба для понимания основного текста. Эти параграфы отмечены звездочкой.

В целом учебное пособие соответствует новой программе курса высшей математики для втузов и предназначено для студентов инженерно-технических и экономических специальностей.

Автор благодарит рецензентов: коллектив кафедры высшей математики Московского инженерно-строительного института и в частности доктора технических наук профессора этой кафедры Н. Д. Дроздова, а также заведующего кафедрой высшей математики Минского высшего инженерного зенитного ракетного училища противовоздушной обороны кандидата педагогических наук Е. И. Гурского за ценные советы и замечания.

Все замечания и пожелания просим направлять по адресу: 220048, Минск, проспект Машерова, 11, издательство «Вышэйшая школа».

Автор

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ И ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА ЕЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

1.1. Вероятностный эксперимент. Предмет и задачи теории вероятностей

Результаты любого эксперимента в той или иной степени зависят от комплекса условий S, при которых данный эксперимент производится. Эти условия либо объективно существуют, либо создаются искусственно (т. е. производится планирование эксперимента). По степени зависимости результатов эксперимента от условий, при которых он производится, все эксперименты условно можно разделить на 2 класса: детерминированные и вероятностные.

Детерминированные эксперименты — это такие эксперименты, результаты которых можно предвидеть заранее на основании естественно-научных законов исходя из данного комплекса условий S. Примером детерминированного эксперимента является определение ускорения, получаемого телом массы m под воздействием силы F: $a=F/m$. Искомая величина однозначно определяется комплексом условий эксперимента (массой тела m и силой F).

Детерминированными являются, например, все процессы, основанные на использовании законов классической механики, согласно которым движение тела однозначно определяется заданными начальными условиями и силами, действующими на тело.

Вероятностные эксперименты, иногда называемые *стохастическими* или *случайными*,— это эксперименты, которые можно повторять произвольное число раз при соблюдении одних и тех же (насколько это возможно) стабильных условий, но в отличие от детерминированных экспериментов исход вероятностного эксперимента неоднозначен, случаен. Другими словами, нельзя заранее на основании комплекса условий S предвидеть результат вероятностного эксперимента.

Однако если вероятностный эксперимент повторять многократно при одних и тех же насколько это возможно стабильных условиях, то совокупность исходов таких экспериментов подчиняется определенным закономерностям. Изучением этих закономерностей (а точнее их математических моделей) и занимается теория вероятностей. Приведем несколько примеров вероятностных экспериментов, которые в дальнейшем будем называть просто экспериментами.

Пример 1. Пусть эксперимент заключается в однократном подбрасывании симметричной монеты. Этот эксперимент может закончиться одним из исключающих друг друга исходов: выпадением герба или решетки. Если бы мы точно знали начальные скорости поступательного и вращательного движения и начальное положение монеты в момент броска, мы смогли бы предвидеть результат этого эксперимента (выпадение герба или решетки) по законам классической механики, т. е. он был бы детерминированным.

Практически начальные условия никогда не могут быть фиксированы с абсолютной точностью, поэтому даже незначительное изменение начальных скоростей или начального положения монеты приводит к другому результату. Так как невозможно предсказать исход этого эксперимента, говорят, что результат его неоднозначен, случаен.

Тем не менее если мы будем подбрасывать одну и ту же симметричную монету многократно по достаточно длинной траектории, т. е. если мы по возможности сохраним стабильными некоторые условия эксперимента (симметричность монеты, длину траектории броска), то совокупное число его исходов подчиняется определенным закономерностям: относительная частота выпадения герба m_1/n примерно равна относительной частоте m_2/n выпадения решетки (n — число бросков; m_1 — число выпадения герба; m_2 — надписи).

Пример 2. Завод выпускает массовые изделия партиями по n штук. Проверка качества изделия приводит к их разрушению. Поэтому при приемке массовой продукции производится выборочный контроль: из партии n изделий выбирается m штук ($m<n$). Результат эксперимента — число дефектных изделий среди m проверяемых. Это произвольное целое число, лежащее между 0 и m, которое можно определить до проведения эксперимента только в двух крайних случаях: если мы знаем, что все изделия дефектные, или если мы знаем, что дефектных изделий нет. Проверяя только одну серию из n изделий, невозможно заранее предсказать число дефектных изделий в этой партии. Однако при проверке большого числа партий по n штук в каждой серии оказывается, что процент дефектных изделий в этих сериях колеблется вокруг некоторой постоянной величины. При этом предполагается, что комплекс условий S данного эксперимента (отладка технологического оборудования) сохраняется по возможности стабильным. Если же произошла разладка технологического оборудования, т. е. изменился комплекс условий S, то процент дефектных изделий в партиях будет колебаться вокруг некоторой новой постоянной величины.

Пример 3. Предположим, что мы заполняем карточку спортлото. До проведения тиража выигрышей невозможно предсказать, сколько номеров будет правильно угадано. Однако опыт проведения тиража спортлото говорит о том, что средний процент игроков, угадавших $m(1\leqslant m\leqslant 6)$ номеров, колеблется около некоторой постоянной величины. Эти «закономерности» (средний процент правильного угадывания данного количества номеров) используются для расчета фондов выигрыша.

Пример 4. Предположим, что врач с помощью специальной аппаратуры измеряет активность сердечной деятельности пациента. В результате измерений получается график, называемый кардиограммой. Вид этой кардиограммы нельзя предвидеть заранее. Однако анализ множества кардиограмм больных позволяет врачу заметить в них закономерности, характерные для данного типа заболевания.

Пример 5. Предположим, что мы производим измерение некоторой величины (расстояния, площади, объема, температуры и т. п.). Так же, как и в предыдущих экспериментах, невозможно предвидеть его результат. Однако если измерения организованы тщательно, то при многократном проведении их наблюдается общая закономерность: среднее арифметическое результатов измерений приближается к некоторой постоянной величине.

Исследователь, построив математическую модель эксперимента, находит приближенное значение данной константы (говорят: «оценивает» эту постоянную) и принимает с определенной степенью уверенности эту оценку за реальное значение измеряемой величины, т. е. за реальное расстояние, реальную площадь и т. д.

Из приведенных примеров видно, что понятие вероятностного эксперимента достаточно широко. Тем не менее можно указать некоторые общие черты вероятностных экспериментов: *множество возможных исходов; непредвиденность результата; наличие определенных количественных закономерностей при их многократном повторении при одинаковых условиях.*

Указанные закономерности изучаются методом моделирования. С этой целью строится математическая модель вероятностного эксперимента. В принятой модели исследуемые закономерности описываются различными математическими уравнениями или функциями.

Знание методов теории вероятностей позволяет инженеру ориентироваться в выборе математических моделей. Однако, как правило, теория вероятностей не занимается выяснением вопроса, насколько хорошо построена математическая модель и хорошо ли она согласуется с практикой. Этим вопросом занимается математическая статистика.

Изложенные примеры позволяют более подробно конкретизировать предмет и задачи теории вероятностей.

Предметом теории вероятностей является количественный и качественный анализ математических моделей вероятностных экспериментов, называемый в технике статистической обработкой экспериментальных данных.

Разумеется, постановка вероятностных экспериментов не является самоцелью. Эти эксперименты производятся, например, с целью получения некоторых рекомендаций, научных или практических выводов, т. е. их результаты (исходы) служат основой для принятия решений. Поскольку эти исходы случайны, то говорят, что решения принимаются в условиях неопределенности. Например, по числу дефектных единиц (пример 2) среди m изделий, отобранных из партии, содержащей n штук, принимают решение о приемке или браковке всей партии. По виду кардиограмм (пример 4) врач принимает решение о виде заболевания (ставит диагноз). Правильность таких решений зависит от того, насколько хорошо мы построили математическую модель, отражающую закономерности вероятностного эксперимента. Поэтому в последние годы теорию вероятностей определяют *как науку, занимающуюся анализом математических моделей для принятия решений в условиях неопределенности.*

1.2. Краткий исторический очерк

Возникновение теории вероятностей обычно относят к XVII в. и связывают с решением комбинаторных задач теории азартных игр и потребностями страхового дела. Азартные игры и страхование являются классическими примерами вероятностных экспериментов. Именно азартные игры стимулировали вначале построение математических моделей игровых ситуаций. Эти математические модели давали игроку возможность ориентироваться в ходе игры, делать расчет ставок, оценивать шансы выигрыша, а также позволяли планировать расходы и доходы страховых компаний и т. д.

Элементы построения математических моделей были заложены еще в работах Б. Паскаля (1623—1662), П. Ферма (1601—1665), Х. Гюйгенса (1629—1695). Основы классической теории вероятностей, которая в значительной мере сохранилась неизменной и в настоящее время, были сформулированы в работах Я. Бернулли (1654—1705), А. Муавра (1667—1754), П. Лапласа (1749—1827), С. Пуассона (1781—1840), К. Гаусса (1777—1855), Т. Бейеса (1702—1761). Эти работы были вызваны потребностями естественных наук (астрономии, геодезии, военного дела и других). Они и в настоящее время являются основой теории информации, теории надежности, кибернетики, теории ошибок и ряда других математических дисциплин.

Создателем русской школы теории вероятностей является П. Л. Чебышев (1821—1894). Работы его последователей А. А. Маркова (1856—1922) и А. М. Ляпунова (1857—1918) выдвинули эту школу на передовое место в мире.

Советская школа теории вероятностей, представленная учеными С. Н. Бернштейном (1880—1968), А. Я. Хинчиным (1894—1959), А. Н. Колмогоровым, Б. В. Гнеденко, Н. В. Смирновым (1900—1966), Ю. В. Линником (1915—1972), Ю. В. Прохоровым, А. В. Скороходом, Л. Н. Большевым (1922—1978) и другими, еще более укрепила репутацию русских ученых в мировой науке.

Годом рождения современной теории вероятностей следует считать 1933 год — год опубликования работы А. Н. Колмогорова «Основные понятия теории вероятностей». Аксиоматическое построение теории вероятностей, данное А. Н. Колмогоровым в этой работе, основывается на теории множеств. Такое построение теории вероятностей сделало ее строгой математической наукой.

Примерно в это же время в теории вероятностей выделилась новая дисциплина — математическая статистика, имеющая в настоящее время огромное применение в физике, технике, экономике, социологии и т. д. В области математической статистики основные результаты, ставшие в настоящее время классическими, были получены учеными англо-американской школы (К. Пирсон, Р. Фишер, Ю. Нейман, А. Вальд, Ф. Вилкоксон, И. Дуб, В. Феллер, Е. Леман, М. Лоев и др.).

В настоящее время от теории вероятностей отпочковался еще ряд математических дисциплин: теория случайных процессов, теория планирования экспериментов, теория массового обслуживания. Эти дисциплины, рассматриваемые как разделы теории вероятностей, находятся в стадии бурного развития.

1.3. Пространство элементарных событий

Построение математической модели вероятностного эксперимента E обычно начинается с описания его возможных исходов. При проведении любого такого эксперимента E можно выделить некоторые элементарные события (или исходы), характеризующиеся тем, что любое повторение эксперимента E может закончиться одним и только одним из этих взаимоисключающих друг друга элементарных событий. Таким образом, можно дать следующее

Определение 1. *Элементарным событием* ω *называется любой мысленно возможный исход (результат) эксперимента* E.

Совокупность всех элементарных событий ω образует некоторое множество Ω.

Определение 2. *Пространством элементарных событий, отвечающих данному эксперименту* E, *называется множество* Ω *всех его мыслимых взаимоисключающих исходов (результатов).*

В дальнейшем будет показано, что любой интересующий исследователя результат может быть однозначно описан с помощью элементов ω множества Ω. Таким образом, элементарное событие ω — это элемент пространства Ω, а само пространство Ω является множеством элементарных событий. В случае, если эксперимент E произведен и зафиксирован его исход $\omega\in\Omega$, будем говорить, что произошло элементарное событие $\{\omega\}$.

Структура пространства элементарных событий Ω зависит от характера эксперимента. По числу элементов $\omega\in\Omega$ пространство элементарных событий может быть конечным, счетным или несчетным.

Пространство Ω с конечным множеством элементов ω будем обозначать $\Omega=\{\omega_i \mid i=\overline{1, n}\}$, а число его элементов — символом $|\Omega|$.

Пространство со счетным множеством элементов ω обозначим $\Omega = \{\omega_i \mid i = \overline{1, \infty}\}$ или $\Omega = \{\omega_i \mid i \in N\}$.

Пример 1. Пусть вероятностный эксперимент E имеет только два элементарных исхода ω_1 и ω_2. Например, при подбрасывании монеты можно считать ω_1 — выпадение герба, ω_2 — выпадение решетки; при рождении ребенка можно считать ω_1— рождение мальчика, ω_2 — рождение девочки. В этом случае пространство элементарных исходов $\Omega = \{\omega_1;\ \omega_2\}$. Содержательная сущность элементарных исходов ω_1, ω_2 зависит от физического смысла вероятностного эксперимента E.

Если эксперимент E может закончиться одним из четырех элементарных исходов ω_i, $i = \overline{1, 4}$; $|\Omega| = 4$, тогда $\Omega = \{\omega_i | i = \overline{1, 4}\}$. Например, такое пространство элементарных событий имеет эксперимент, состоящий в двукратном подбрасывании монеты, т. е. $\Omega = \{\omega_1;\ \omega_2;\ \omega_3;\ \omega_4\}$ = {(гг); (гр); (рг); (рр)}, где, например, ω_2 = (гр) — выпадение при первом броске герба, при втором — решетки. Такое же пространство имеет эксперимент по исследованию состава двухдетной семьи, т. е. $\Omega = \{\omega_1;\ \omega_2;\ \omega_3;\ \omega_4\}$ = {(мм); (мд); (дм); (дд)}, где первая буква обозначает пол старшего по возрасту ребенка, вторая — пол младшего.

Аналогично, если монета подбрасывается три раза, имеем: $\Omega = \{\omega_i | i = \overline{1, 8}\}$ = {(ггг); (ггр); (грг); (грр); (ргг); (ргр); (ррг); (ррр)}. Число элементов этого пространства $|\Omega| = 8$.

Состав случайно взятой трехдетной семьи описывается пространством с тем же числом элементарных событий: $\Omega = \{\omega_i | i = \overline{1, 8}\}$ = {(ммм); (ммд); (мдм); (мдд); (дмм); (дмд); (ддм); (ддд)}, где первая буква по-прежнему обознача т пол старшего по возрасту ребенка.

Пример 2. Пусть эксперимент E состоит в определении длительности t горения произвольной электролампочки. Так как число t ч горения электролампочки является числом неотрицательным, верхнюю границу которого трудно определить, то пространством элементарных событий удобно считать несчетное множество неотрицательных действительных чисел $\mathbf{R}_0 : \Omega = \{\omega = t | t \in [0,\ \infty[\}$.

Пример 3. Пусть эксперимент состоит в регистрации числа вызовов телефонной станции в течение 1 ч. Так как верхнюю границу вызовов установить практически невозможно, то принято считать возможными исходами 0 и все натуральные числа: $\Omega = \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}$. В этом случае множество элементарных событий ω пространства Ω счетно.

Пример 4. Пусть эксперимент E состоит в случайном бросании точки в круг радиуса R. Пространством элементарных событий этого эксперимента (рис. 1.1) является множество точек круга радиуса R, т. е. $\Omega = \{\omega = (r,\ \varphi) | r \leqslant R\}$, где $(r,\ \varphi)$ — полярные координаты случайной точки.

Пример 5. Пусть эксперимент состоит в измерении прочности при растяжении образца стали 45. Предел прочности для данного типа стали обозначим $\sigma_в = 650$ МПа $= u$. Результат измерения предела прочности будет заключен между 0 и пределом прочности u. Таким образом, пространство элементарных событий этого вероятностного эксперимента состоит из совокупности точек $\omega \in]0;\ u[$, т. е. $\Omega = \{\omega | \omega \in]0;\ u[\}$.

Если же мы измерим прочность двух различных образцов стали 45, то каждый результат будет заключен между 0 и u, т. е. пространство элементарных событий состоит из совокупности пар $(\omega_1;\ \omega_2)$: $\Omega = \{(\omega_1;\ \omega_2) | \ 0 < \omega_1 < u;\ 0 < \omega_2 < u\}$.

Аналогично, если мы измерим прочность n различных образцов, то пространство элементарных событий этого эксперимента будет иметь вид: $\Omega = \{\omega_1;\ \omega_2;\ \ldots;\ \omega_n \mid 0 < \omega_1 < u;\ 0 < \omega_2 < u;\ \ldots;\ 0 < \omega_n < u\}$.

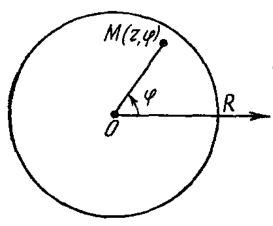


Рис. 1.1

Пример 6. Пусть вероятностный эксперимент состоит в измерении активности сердечной деятельности пациента в течение некоторого времени T. В качестве исхода ω фиксируется график зависимости (кардиограмма) измерения частоты сердечного сокращения от времени $t \in T$. Пространством элементарных событий этого эксперимента является несчетное множество непрерывных функций (кардиограмм)

$X(t)$, определенных на $[0, T]$: $\Omega=\{\omega=X(t)|t\in[0, T]\}$, где $X(t)$ — функция, определяющая ординату графика кардиограммы, соответствующую моменту времени измерения t.

1.4. Классификация событий (операции над множествами)

Определение 1. *Событием называется всякое подмножество пространства элементарных событий Ω.*

События будем обозначать прописными латинскими буквами $A, B, C, \ldots$. Утверждение «A есть подмножество множества Ω» записывают в виде $A\subseteq\Omega$. Если $A\subseteq\Omega$, но $A\neq\Omega$, то употребляют краткую запись $A\subset\Omega$.

Пример 1. Пусть эксперимент E состоит в бросании шестигранной игральной кости и подсчете числа выпавших очков ω_i. Пространство элементарных событий этого эксперимента $\Omega=\{\omega_i|\, i=\overline{1, 6}\}$. Элемент $\omega_i\in\Omega$ обозначает элементарное событие {число i выпало} (или «может выпасть»). Каждое из элементарных событий, например, ω_4 {выпадение четырех очков}, может произойти или не произойти в результате эксперимента. Обратим внимание на тот факт, что одновременно с появлением элементарного события ω_4 происходит много других, более сложных событий. Пусть, например, произошло элементарное событие ω_4, состоящее в выпадении четырех очков. Очевидно, что вместе с ним произошли следующие более сложные (состоящие не из одного, а из нескольких элементов $\omega_i\in\Omega$) события: $A=$ {выпадение четного числа очков}. *На языке теории множеств это событие можно записать:* $A=\{\omega_2;\ \omega_4;\ \omega_6\}$; $B=$ {выпадение числа очков, не большего четырех}: $B=$ $=\{\omega_1;\ \omega_2;\ \omega_3;\ \omega_4\}=\{\omega_i|i=\overline{1, 4}\}$.

Очевидно, что если элементарное событие ω_4 произошло, то одновременно с ним не произошли следующие события: $C=$ {невыпадение нечетного числа очков}, т. е. не произошло событие $C=\{\omega_1;\ \omega_3;\ \omega_5\}=\{\omega_i\,|\,i=1, 3, 5\}$; не произошло также событие D — число выпавших очков меньше четырех: $D=\{\omega_1;\ \omega_2;\ \omega_3\}=$ $=\{\omega_i\,|\,i=\overline{1, 3}\}$ и не произошли некоторые другие сложные события, являющиеся подмножествами пространства Ω.

Из приведенного примера видно, что одни события происходят в результате эксперимента, другие не происходят. Легко заметить, что событие $A=\{\omega_2,\ \omega_4;\ \omega_6\}=$ {выпадение четного числа очков} происходит одновременно с появлением одного из элементарных событий ω_2, ω_4, ω_6. Поэтому, когда мы говорим, что событие A произошло, мы предполагаем, что эксперимент закончился одним из элементарных событий $\omega\in A$.

Таким образом, если эксперимент E произведен фактически, то его исход ω может оказаться принадлежащим событию A (подмножеству Ω), и тогда мы говорим, что *событие A произошло или наступило*. Если окажется, что исход эксперимента не принадлежит событию $A\,(\omega\overline{\in}A)$, то говорят, что событие A не произошло или не наступило.

В частном случае подмножество, соответствующее событию A, может совпадать с пространством элементарных исходов $(A=\Omega)$ или с пустым множеством $(A=\varnothing)$.

Определение 2. *Достоверным событием называется событие, совпадающее с пространством элементарных событий Ω, т. е. если $A=\Omega$, то A является достоверным событием.*

Согласно определению, Ω есть множество всех возможных элементарных событий, которые могут произойти в результате эксперимента. Другими словами, событие $A=\Omega$ происходит всегда при каждом повторении вероятностного эксперимента.

Определение 3. *Невозможным называется событие, совпадающее с пустым множеством, т. е. если $A=\varnothing$, тогда A является невозможным событием.*

Невозможному событию можно дать следующую трактовку: если эксперимент E произведен, то он должен закончиться одним из элементарных событий $\omega\in\Omega$, эксперимент не может произойти без результата $\omega\in\Omega$.

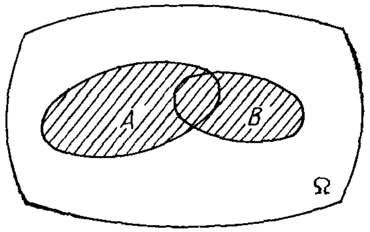


Рис. 1.2

На множестве этих событий можно выполнять некоторые операции. Дадим определения основным операциям над множествами, переводя их на язык событий (операции над множествами и операции над событиями практически ничем не отличаются, кроме терминологии и интерпретации).

Определение 4. *Событием $\bar{A}$, противоположным событию A, называется дополнение множества A до Ω,* т. е. событие, состоящее из таких элементарных исходов ω эксперимента E, которые не входят в событие A: $\bar{A}=\{\omega|\omega\bar{\in}A\}$.

Противоположное событие $\bar{A}$ происходит тогда и только тогда, когда событие A не происходит. Например, при бросании игральной кости событие $\bar{A}=\{\omega_2;\ \omega_4;\ \omega_6\}=\{$выпадение четного числа очков$\}$ является противоположным (дополнением) событию $A=\{\omega_1;\ \omega_3;\ \omega_5\}=$ $=\{$выпадение нечетного числа очков$\}$. Подмножества этих событий охватывают все пространство элементарных событий Ω, поэтому в результате эксперимента обязательно должно наступить или событие A, или противоположное событие $\bar{A}$. Иногда говорят, что событие $\bar{A}$ дополняет событие A до пространства Ω. Очевидно, что $\bar{\Omega}=\varnothing$, $\bar{\bar{A}}=A$.

Определение 5. *Суммой (объединением) двух событий A и B называется событие, содержащее те элементарные исходы, которые принадлежат хотя бы одному из этих событий. Сумму двух событий будем обозначать $A\cup B$:* $A\cup B=\{\omega|\omega\in A$, или B, или A и $B\}$.

На рис. 1.2 дана геометрическая интерпретация суммы двух событий. Если A и B — произвольные подмножества пространства элементарных событий, то событию $A\cup B$ соответствует заштрихованная на рис. 1.2 область. Можно, например, считать, что $\Omega=\{$множество студентов в аудитории$\}$, $A=\{$подмножество курящих студентов$\}$, $B=$ $=\{$подмножество студентов в очках$\}$; тогда $A\cup B=\{$подмножество студентов или курящих, или носящих очки, или то и другое вместе$\}$.

Пусть эксперимент $E=\{$подбрасывание игральной кости$\}$. Рассмотрим два события: $A=\{\omega_2;\ \omega_4;\ \omega_6\}=\{$выпадение четного числа очков$\}$, $B=\{\omega_3;\ \omega_4;\ \omega_5;\ \omega_6\}=\{$выпадение не менее трех очков при одном бросании игральной кости}; тогда $A \cup B = \{\omega_2; \omega_3; \omega_4; \omega_5; \omega_6\}$ = {выпадение или четного числа очков, или не менее трех очков}.

Заметим, что для любого события A справедливы следующие соотношения: $A \cup A = A$; $A \cup \varnothing = A$; $A \cup \Omega = \Omega$.

Определение 6. *Суммой (объединением) конечной или счетной последовательности событий $A_1, A_2, \ldots$ называется событие, содержащее те элементарные события $\omega \in \Omega$, которые входят по крайней мере в одно из событий A_i. Сумму конечной последовательности событий будем обозначать символом* $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{\omega | \omega \in A_1$ или A_2 или ... или $A_n\}$, *а сумму счетной последовательности событий — символом* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{\omega | \omega \in A_1$ или $A_2 \ldots\}$.

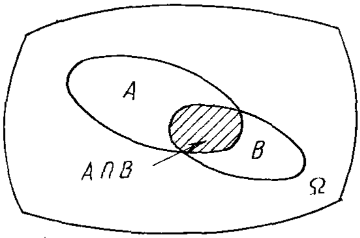


Рис. 1.3

Определение 7. *Произведением (пересечением) двух событий A и B называется событие, состоящее из тех и только тех элементарных событий $\omega \in \Omega$, которые принадлежат как событию A, так и событию B. Произведение двух событий будем обозначать символом $AB = A \cap B$. Согласно определению,* $A \cap B = \{\omega | \omega \in A$ и $\omega \in B\}$.

На рис. 1.3 дана геометрическая интерпретация произведения двух событий A и B. Если A и B — некоторые подмножества пространства элементарных событий Ω, то событию $A \cap B$ соответствует заштрихованная на рис. 1.3 область.

Можно, например, по-прежнему считать, что Ω — множество студентов в аудитории, A — подмножество курящих студентов, B — подмножество студентов в очках, тогда $A \cap B$ — подмножество курящих студентов в очках.

Пусть $A = \{\omega_2; \omega_4; \omega_6\}$ — выпадение четного числа очков, $B = \{\omega_3; \omega_4; \omega_5; \omega_6\}$ — выпадение не менее трех очков при одном бросании игральной кости, тогда $A \cap B = \{\omega_4; \omega_6\}$ — выпадение четного числа очков, но не менее трех очков.

Для произвольного события A справедливы следующие соотношения: $A \cap A = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$; $A \cap \Omega = A$.

Аналогичным образом можно определить произведение (пересечение) конечной или счетной последовательности событий.

Определение 8. *Произведением (пересечением) конечной или счетной последовательности событий $A_1, A_2, \ldots$ называется событие, состоящее из тех элементов $\omega \in \Omega$, которые входят одновременно во все события A_i* ($i = \overline{1, n}$ или $i = \overline{1, \infty}$). *Произведение конечной последовательности событий будем обозначать символом* $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{\omega | \omega \in A_1$ и A_2 и ... и $A_n\}$, *счетной — символом* $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{\omega | \omega \in A_1$ и A_2 и $\ldots\}$.

Определение 9. *Два события A и B называются несовместными, если их пересечение является невозможным событием,* т. е. если $A \cap B = \varnothing$.

На рис. 1.4 дана геометрическая интерпретация двух взаимно несовместных событий A и B. Геометрическая интерпретация двух совместных событий показана на рис. 1.3.

Так как $\forall i \neq j \; \omega_i \cap \omega_j = \varnothing$, то элементарные события $\omega_i \in \Omega$ являются несовместными.

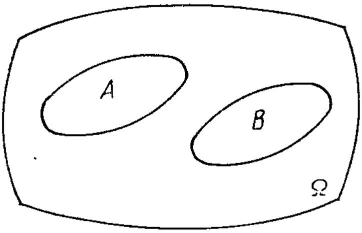


Рис. 1.4

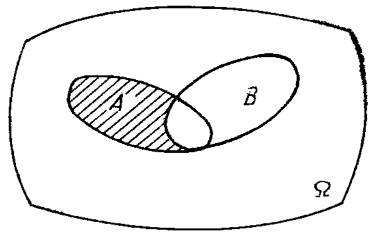


Рис. 1.5

Операции взятия дополнения, объединения и пересечения называются *элементарными операциями над множествами* $A \subseteq \Omega$. Дадим определение еще одной операции.

Определение 10. *Разностью двух событий A и B называется событие, состоящее из тех элементов* $\omega \in \Omega$, *которые входят в событие A, но не входят в событие B. Разность двух событий принято обозначать символом* $A \setminus B$: $A \setminus B = \{\omega | \omega \in A$, но $\omega \notin B\}$.

На рис. 1.5 дана геометрическая интерпретация разности двух событий $A \setminus B$. Событие $A \setminus B$ состоит в том, что событие A наступит, а событие B не наступит. На рис. 1.5 событию $A \setminus B$ соответствует заштрихованная область.

Разность событий можно выразить через введенные ранее операции: $A \setminus B = A \cap \overline{B}$, т. е. можно обойтись без использования операции разности двух событий. Однако ее применение часто сокращает записи комбинаций ранее введенных операций.

Заметим, что все свойства алгебры множеств сохраняются в силе и для событий. В частности, справедливы законы дополнения:

$$A \cup \overline{A} = \Omega; \; A \cap \overline{A} = \varnothing; \; \overline{\Omega} = \varnothing; \; \overline{\varnothing} = \Omega; \; \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}; \; \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B};$$

законы коммутативности:

$$A \cup B = B \cup A; \; A \cap B = B \cap A;$$

законы ассоциативности:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C); \; (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$$

закон дистрибутивности:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C); \; A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Мы уже говорили, что операции над событиями практически ничем не отличаются от операций над множествами, кроме терминологии и интерпретации.

Приведем таблицу, показывающую, как некоторые понятия интерпретируются в теории множеств и в теории вероятностей.

Обозначения	Язык теории множеств	Язык теории вероятностей
Ω	Универсальное множество	Пространство элементарных событий эксперимента
ω	Элемент $\omega \in \Omega$	Элементарное событие
A	Некоторое подмножество элементов ω	Событие A (если $\omega \in A$, то говорят, что наступило событие A)
Ω	Множество всех ω	Достоверное событие
$\varnothing$	Пустое множество	Невозможное событие
$A \subset B$	A является подмножеством множества B	Событие A влечет событие B
$A \cup B$	Объединение множества A и B; множество элементов, входящее хотя бы в одно множество	Сумма событий A и B
$A \cap B$	Пересечение множества A и B; множество элементов, входящих и в A, и в B	Произведение событий A и B
$A \cap B = \varnothing$	A и B — непересекающиеся множества	A и B — несовместные события
$A \setminus B$	Разность множеств A и B	Разность событий A и B

В настоящее время символика теории множеств широко применяется в теории вероятностей. Однако для удобства записей в теории вероятностей принято опускать символ пересечения, т. е. писать ABC *вместо* $A \cap B \cap C$. Аналогично иногда пишут $A+B$ вместо $A \cup B$; $A - B$ — вместо $A \setminus B$. Эти обозначения общеприняты в теории вероятностей.

Пример 2. Пусть эксперимент E состоит в исследовании надежности работы электрической цепи между точками M и N, составленной по схеме, изображенной на рис. 1.6.

Пусть выход из строя элемента a — событие A, элемента b_k — событие B_k ($k=1, 2$).

Требуется: 1. Составить пространство элементарных событий. 2. Записать события A и B_k в виде подмножества пространства Ω. 3. Выразить с помощью операций объединения и пересечения событий A и B_k событие C — разрыв цепи и событие $\overline{C}$ — безотказную работу цепи.

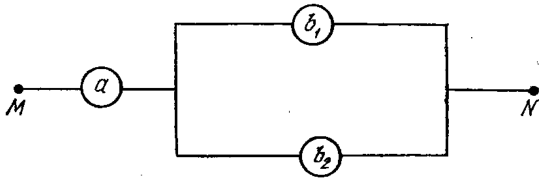


Рис. 1.6

Решение 1. Пространство элементарных событий, элементами которог являются все возможные состояния трех элементов a, b_1 и b_2, таково:

$$\Omega = \{\omega_i | i = \overline{1, 8}\} = \{ab_1b_2); \quad (ab_1\overline{b_2}); \ (a\overline{b_1}b_2); \ (\overline{a}b_1b_2);$$

$$(\overline{a}\overline{b_1}b_2); \ (\overline{a}b_1\overline{b_2}); \ (\overline{a}\,\overline{b_1}b_2); \ (\overline{a}\,\overline{b_1}\,\overline{b_2})\};$$

где, например, $\omega_2 = \{ab_1\overline{b_2}\}$ — элементарное событие, состоящее в том, что элементы a и b_1 отказали, а элемент b_2 работает безотказно.

2. Запишем события A и B_k в виде подмножеств Ω:

$$A = \{(ab_1b_2); \ (ab_1\overline{b_2}); \ (a\overline{b_1}b_2); \ (a\overline{b_1}\,\overline{b_2})\},$$

$$B_1 = \{(ab_1b_2); \ (ab_1\overline{b_2}); \ (\overline{a}b_1b_2); \ (\overline{a}b_1\overline{b_2})\},$$

$$B_2 = \{(ab_1b_2); \ (a\overline{b_1}b_2); \ (\overline{a}b_1b_2); \ (\overline{a}\,\overline{b_1}b_2)\}.$$

3. Выразим событие C = {разрыв цепи} через события A и B_k:

$$C = A \cup (B_1 \cap B_2) = \{(ab_1b_2); \ (ab_1\overline{b_2}); \ (a\overline{b_1}b_2); \ (a\overline{b_1}\,\overline{b_2}); \ (\overline{a}b_1b_2)\}.$$

Событие $\overline{C}$ = {безотказная работа всей цепи} является противоположным событию C $(C \cup \overline{C} = \Omega)$. Поэтому $\overline{C} = \Omega \setminus C = \{(\overline{a}\overline{b_1}b_2); \ (\overline{a}b_1\overline{b_2}); \ (\overline{a}\overline{b_1}\overline{b_2})\}$. Это событие можно представить через события A и B_k, используя законы дополнения

$$\overline{C} = \overline{A \cup (B_1 \cap B_2)} = \overline{A} \cap (\overline{B_1 \cap B_2}) = \overline{A} \cap (\overline{B}_1 \cup \overline{B}_2).$$

1.5. Понятие о σ-алгебре

Построение математической модели вероятностного эксперимента обычно призводится в следующей последовательности: 1) составляется пространство элементарных событий Ω; 2) выделяется класс событий, достаточный для описания закономерностей изучаемого явления; 3) определяются вероятности (степени объективной возможности) наступления событий из выделенного класса.

Перейдем к рассмотрению второго пункта этой схемы построения математической модели вероятностного эксперимента. Если пространство элементарных событий конечное, то в качестве класса событий часто рассматривают все подмножества пространства элементарных событий Ω. Пусть дано, например, пространство с тремя элементарными исходами: $\Omega = \{\omega_1; \ \omega_2; \ \omega_3\}$. В результате эксперимента могут произойти следующие события A_i: $\{\varnothing\}$, $\{\omega_1\}$, $\{\omega_2\}$, $\{\omega_3\}$, $\{\omega_1; \ \omega_2\}$, $\{\omega_1; \ \omega_3\}$, $\{\omega_2; \ \omega_3\}$, $\{\Omega\}$. Будем считать эти события элементами некоторого класса: $\mathbf{F}=\{\{\varnothing\}, \ \{\omega_1\}, \ \{\omega_2\}, \{\omega_3\}, \{\omega_1; \omega_2\}, \ \{\omega_1; \ \omega_3\}, \ \{\omega_2; \ \omega_3\}, \ \{\Omega\}\}$.

Из курса математики средней школы известно, что если множество состоит из Ω элементов, то число всех подмножеств этого множества равно 2^n. Если, например, эксперимент состоит в исследовании надежности работы некоторого устройства, содержащего только два элемента, то пространство элементарных событий $\Omega = \{\omega_0; \ \omega_1; \ \omega_2\}$, где ω_0 — два элемента работают исправно; ω_1 — отказал один элемент; ω_2 — отказали оба элемента устройства. Класс всех подмножеств: $\mathbf{F} = \{\{\varnothing\}$, $\{\omega_0\}$, $\{\omega_1\}$, $\{\omega_2\}$, $\{\omega_0; \ \omega_1\}$, $\{\omega_0; \ \omega_2\}$, $\{\omega_1; \ \omega_2\}$, $\{\Omega\}\}$, причем событиям $A_i \in \mathbf{F}$, $i = \overline{1, 8}$, можно дать следующую трактовку: $A_1 = \varnothing = \overline{\Omega}$; $A_2 = \{\omega_0\}$ — два элемента работают исправно; $A_3 = \{\omega_1\}$ — отказал один