Einführung in die mathematische Statistik

L. Schmetterer

Wien • Springer-Verlag • 1956

EINFÜHRUNG IN DIE MATHEMATISCHE STATISTIK

VON

DR. LEOPOLD SCHMETTERER
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT WIEN

MIT 13 TEXTABBILDUNGEN

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1956

Vorwort

Die mathematische Statistik hat in den letzten 25 Jahren in Verbindung mit der modernen Wahrscheinlichkeitsrechnung einen enormen Aufschwung genommen, der allerdings fast ausschließlich von Gelehrten außerhalb des deutschsprachigen Raumes getragen wurde. Die Ungunst der Zeit brachte es mit sich, daß die deutschsprachigen Länder von dieser Entwicklung ziemlich unberührt blieben. Die Folge davon ist, daß es wohl eine große Anzahl fremdsprachiger und vielfach ausgezeichneter Werke über den Gegenstand der mathematischen Statistik gibt, jedoch kein einziges modernes Lehrbuch in deutscher Sprache, wenn man von der Monographie von A. Linder absieht, welche sich vor allen Dingen an den statistisch arbeitenden Naturwissenschaftler und nur in geringem Ausmaße an den Mathematiker wendet. Besonders deutlich machte sich der Mangel eines Lehrbuches während meiner mehrjährigen Lehrtätigkeit an der Wiener Universität und Technischen Hochschule fühlbar. Ich glaubte daher einer Aufforderung meiner Fachkollegen nachkommen zu sollen, meine Vorlesungen aus diesem Gegenstand, die für Mathematiker und Statistiker abgehalten werden, zu veröffentlichen. Natürlich mußten Änderungen vorgenommen werden, wie es der Charakter und die Zielsetzung eines einführenden Lehrbuches erfordern. Die Darstellung umfaßt hauptsächlich jenen Bestand der mathematischen Statistik, den man heute bereits als klassisch bezeichnen könnte und der mit den Namen Fisher, Pearson und insbesondere Neyman verknüpft ist. Darüber hinaus werden auch neuere Ergebnisse gebracht, wie etwa die Theorie der parameterfreien Verfahren im siebenten Kapitel. Dagegen wurde, um den Charakter einer Einführung zu wahren, auf die Fragen der modernen Spieltheorie und der Theorie der Entscheidungsfunktionen nicht eingegangen. Selbstverständlich mußte aus dem immensen Stoffgebiet eine engere Auswahl getroffen werden. Vielfach war sie ja von selbst gegeben, doch in manchen Fällen mußte der persönliche Geschmack entscheiden.

Das Lehrbuch soll dem mathematisch interessierten Statistiker oder auch dem statistisch interessierten Mathematiker die Möglichkeit geben, die Grundlagen zu beherrschen, so daß er in die moderne Literatur der mathematischen Statistik eindringen kann. Es soll dem Studierenden helfen, die Scheu vor jener eigentümlichen Atmosphäre zu überwinden, welche die Begriffsbildungen der mathematischen Statistik umgibt und welche nach meinen Erfahrungen die Ursache dafür ist, daß unsere Studierenden fast niemals zu vertieften Kenntnissen in diesem Fach vorstoßen. Um über die terminologischen Schwierigkeiten der fremdsprachigen Literatur hinwegzuhelfen, findet sich im Anhang ein Vergleich der hier benützten Ausdrücke mit denen in der englischen Literatur.

Die Hörer meiner Vorlesungen über mathematische Statistik verfügen meist über eine viersemestrige mathematische Ausbildung. Man kann also eine vollständige Kenntnis der Differential- und Integralrechnung, der allereinfachsten mengentheoretischen Begriffe sowie der elementaren Matrizentheorie und analytischen Geometrie voraussetzen. Von diesen Vorkenntnissen geht auch das Buch aus. Allerdings ist dies ohne Konzessionen an die Allgemeinheit und Eleganz der Darstellung kaum möglich. So habe ich grundsätzlich auf den Gebrauch des Stieltjesschen Integrales verzichtet. Insbesondere für das dritte bis fünfte Kapitel ist zusätzlich die Kenntnis der Begriffe „Lebesguesches Integral, Borel meßbare Funktion und Borelsche Menge" wünschenswert. Doch habe ich mich fast immer bemüht, alles so zu formulieren, daß man bei geringfügigem Verzicht auf mathematische Strenge das Lebesguessche durch das Riemannsche Integral, die Borel meßbaren Funktionen etwa durch stetige Funktionen und die Borelschen Mengen durch einen nicht scharf umrissenen anschaulichen Begriff des „Bereiches" ersetzen kann. Eine gewisse Höhe des mathematischen Denkens ist allerdings unerläßlich für das Verständnis. An einer Stelle wurde der Begriff der Dupinschen Indikatrix, an einer anderen der Begriff der geodätischen Linien im Riemannschen Raum verwendet. Diese Absätze können ohne Schaden für das Weitere überschlagen werden.

Das erste Kapitel, welches stellenweise referierenden Charakter trägt, hat eine zweifache Aufgabe: Es soll einerseits für den der Wahrscheinlichkeitsrechnung unkundigen Leser einen tragfähigen Untergrund für das Nachfolgende schaffen, andererseits aber den vornehmlich mathematisch interessierten Leser darauf aufmerksam machen, in welchem Umfange es wünschenswert wäre, sich mit den Grundlagen der modernen Wahrscheinlichkeitstheorie vertraut zu machen. Es wurde hier nach längerem Zögern jede Bezugnahme auf die Maßtheorie und die totaladditiven Mengenfunktionen unterlassen. Ich habe daher auch stets von der Wahrscheinlichkeit von Ereignissen und nicht von der Wahrscheinlichkeit von Mengen gesprochen. Dieser Vorgang hat sich auch in meinen Grundvorlesungen für mathematische Statistik in didaktischer Hinsicht bewährt. Ich bin mir darüber im klaren, daß die hier gegebene Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes der Kritik zugänglich ist. Es scheint überhaupt so zu sein, daß jeder Versuch, den Begriff des Wahrscheinlichkeitsfeldes zu übergehen, im Lichte einer streng exakten Auffassung Lücken aufweist. Die zahlreichen ergänzenden Hinweise, vor allen Dingen auf die hervorragende Darstellung von Kolmogoroff in den „Ergebnissen" der Springer-Sammlung, dürften jedoch diese Lücken überbrücken.

Ich habe mich stets bemüht, auch in der Bezeichnung zwischen einer zufälligen Variabeln und ihren Realisationen zu unterscheiden. Im Lichte einer strengen Auffassung handelt es sich einfach um den Unterschied zwischen der durch eine Funktion vermittelten Abbildung und einem speziellen Funktionswert.

Ich hoffe, daß die folgenden Kapitel durch vielfältige Verwendung der neueren Literatur und einige vielleicht nicht allgemein bekannte Bemerkungen und Beweisanordnungen auch dem fortgeschrittenen Leser etwas Neues bieten. Ein gewisses Interesse dürfte vielleicht auch das Kapitel über nicht-parametrische Verfahren beanspruchen. Ich habe mich sehr bemüht, stets eine lückenlose Aufzählung der Voraussetzungen zu geben, welche für den Beweis eines Satzes nötig sind. Dieser Vorgang wird ja in der statistischen Literatur nicht immer eingehalten. Soweit als möglich habe ich die Literatur bis zum Jahre 1954 berücksichtigt, jedoch keinesfalls angestrebt, die Literatur vollständig zu zitieren.

Für die Möglichkeit, in einen großen Teil der Nachkriegsliteratur Einsicht nehmen zu können, bin ich insbesondere Herrn Prof. W. Winkler, Wien, zu großem Dank verpflichtet. Für wertvolle Bemerkungen, Hinweise auf Fehler und Verbesserung von Beweisen habe ich den Herrn Prof. H. Hornich, Graz, Dr. St. Vajda, Epsom und dem mathematischen Centrum Amsterdam, insbesondere den Herren Dr. G. Zoutendijk, Dr. J. Kriens und Dr. Ph. van Elteren sehr zu danken. Zu meinem großen Bedauern habe ich die ausgezeichneten Vorlesungen von Prof. D. van Dantzig erst zu einem Zeitpunkt erhalten, zu dem es mir aus drucktechnischen Gründen nur mehr in beschränktem Umfang möglich war, diese zur Verbesserung der Darstellung heranzuziehen. Ferner bin ich den Herren Prof. H. Kneser, Tübingen, Dr. J. Pfanzagl, Wien und Doz. K. Prachar, Wien, zu

Dank verpflichtet. Für besonders sorgfältiges Lesen der Korrekturen danke ich Herrn Dr. W. Eberl, Wien. Die Zeichnungen hat mit großem Geschick Herr G. Bruckmann, Wien gemacht. Mein besonderer Dank gebührt meiner Frau, ohne deren Hilfe die Herstellung des Manuskriptes nicht möglich gewesen wäre. Der Springer-Verlag war stets in dankenswerter Weise bemüht, meinen vielfachen Wünschen hinsichtlich des Druckes entgegenzukommen.

So übergebe ich dieses Buch der Öffentlichkeit mit der Bitte, es wohlwollend aufzunehmen. Für alle Verbesserungsvorschläge und Hinweise auf Fehler werde ich stets dankbar sein.

Wien, im Februar 1956.

L. Schmetterer

Bezeichnungen und Vorbemerkungen

1. Die Gesamtheit der geordneten n-Tupel von reellen Zahlen $(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ bezeichnen wir als den R_n. Für $n = 1$ stimmt der R_1 mit der Gesamtheit der reellen Zahlen überein. Wir nennen den R_n auch den n-dimensionalen Raum.

Es ist oft zweckmäßig, nach Festlegung eines cartesischen Koordinatensystems im R_n jedes n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ als Koordinaten eines Punktes in bezug auf dieses Koordinatensystem aufzufassen.

2. Im folgenden benützen wir oft die Vektorschreibweise und bezeichnen ein geordnetes n-Tupel reeller Zahlen $(x_1, \ldots, x_n)$ z. B. mit $\mathfrak{x}$. $x_1, \ldots, x_n$ nennen wir dann die Komponenten des Vektors $\mathfrak{x}$. Vektoren bezeichnen wir im allgemeinen mit kleinen gotischen Buchstaben: $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ und nur ausnahmsweise verwenden wir auch andere Symbole.

Sei $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ und $\mathfrak{b} = (b_1, \ldots, b_n)$, dann verstehen wir unter dem Vektor $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ den Vektor mit den Komponenten $(a_1+b_1, \ldots, a_n+b_n)$, d. h. wir erklären für die geordneten n-Tupel reeller Zahlen eine Addition.

c sei eine reelle Zahl. Dann bedeutet $c\,\mathfrak{a}$ das n-Tupel $(ca_1, \ldots, ca_n)$.

Unter dem inneren Produkt von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ verstehen wir $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i$. Wie üblich erklären wir als Betrag von $\mathfrak{a}$, den wir stets mit $|\mathfrak{a}|$ bezeichnen

$$|\mathfrak{a}| = \sqrt{a^2 + \ldots + a_n^2}$$

Es gilt stets die wichtige Dreiecksungleichung

$$|\mathfrak{a} + \mathfrak{b}| \leq |\mathfrak{a}| + |\mathfrak{b}|.$$

Außerdem gilt folgende Ungleichung

$$|\mathfrak{a}| \leq |a_1| + \ldots + |a_n| \leq \sqrt{n}\,|\mathfrak{a}|.$$

Wir schreiben weiter $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$ an Stelle von $a_1 \leq b_1, a_2 \leq b_2, \ldots, a_n \leq b_n$. In diesem Sinne ist auch die Schreibweise $\mathfrak{a} < \infty$ oder $-\infty < \mathfrak{a}$ zu verstehen. So bedeutet jene symbolische Schreibweise

$$a_1 < \infty, a_2 < \infty, \ldots, a_n < \infty.$$

Wir benützen die Vektorsymbolik auch bei der Definition von Funktionen und als abkürzende Schreibweise bei der Integration. Statt $F(x_1, \ldots, x_n)$ schreiben wir oft $F(\mathfrak{x})$, statt $F(+\infty, \ldots, +\infty)$ $F(+\infty)$.

Wenn $F(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_k)$ eine Funktion zweier Variablengruppen ist, schreiben wir $F(\mathfrak{x}, \mathfrak{t})$. Ebenso verwenden wir an Stelle von $F(x_1, \ldots, x_n, +\infty, \ldots, +\infty)$ das Symbol $F(\mathfrak{x}, +\infty)$.

$\int\limits_{y_1}^{z_1} \ldots \int\limits_{y_m}^{z_m} F(x_1, \ldots, x_m)\, dx_1 \ldots dx_m$ kürzen wir oft durch $\int\limits_{\mathfrak{y}}^{\mathfrak{z}} F(\mathfrak{x})\, d\mathfrak{x}$ ab und ebenso $\int\limits_{-\infty}^{y_1} \ldots \int\limits_{-\infty}^{y_m} F(x_1, \ldots, x_m)\, dx_1 \ldots dx_m$ durch $\int\limits_{-\infty}^{\mathfrak{y}} F(\mathfrak{x})\, d\mathfrak{x}$. Die Schreibweise $\int\limits_{-\infty}^{\mathfrak{y}} F(\mathfrak{x})\, d\mathfrak{x}$ oder eine ähnliche empfiehlt sich besonders dann, wenn kein Wert auf die Angabe der Anzahl der Integrationsvariablen gelegt wird. So schreiben wir $\int\limits_{R_m} F(\mathfrak{x})\, d\mathfrak{x}$, wenn wir über den ganzen m-dimensionalen Raum integrieren, jedoch $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\mathfrak{x})\, d\mathfrak{x}$, wenn es uns auf die Angabe der Dimension nicht ankommt.

Sei $F(\mathfrak{x}) = F(x_1, \ldots, x_n)$. Wir werden dann gelegentlich sagen: $F(\mathfrak{x})$ ist differenzierbar und meinen, daß $F(x_1, \ldots, x_n)$ nach allen Variablen differenzierbar ist.

3. $\mathfrak{M}$ sei irgendeine Menge von Punkten aus dem R_n oder kurz eine Punktmenge des R_n. Wenn P irgendein Punkt oder wie wir auch sagen Element von $\mathfrak{M}$ ist, schreiben wir $P \in \mathfrak{M}$.

Teilmenge: $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ seien zwei Punktmengen. Wenn $\mathfrak{M}_1$ nur Punkte von $\mathfrak{M}_2$ enthält, d. h. aus $P \in \mathfrak{M}_1$, stets $P \in \mathfrak{M}_2$ folgt, heißt $\mathfrak{M}_1$ Teilmenge von $\mathfrak{M}_2$. Wir schreiben $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2$.

Durchschnitt: Die Gesamtheit der Punkte, welche sowohl zu $\mathfrak{M}_1$ als auch zu $\mathfrak{M}_2$ gehören, heißt der Durchschnitt von $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$. Wir bezeichnen ihn mit $\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2$ oder $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2$.

Ausdehnung des Begriffes und der Schreibweise auf endlich viele Mengen ist selbstverständlich.

Vereinigungsmenge: Die Gesamtheit der Punkte, welche mindestens zu $\mathfrak{M}_1$ oder $\mathfrak{M}_2$ gehören, heißt die Vereinigungsmenge von $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$. Wir schreiben: $\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$ oder $\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$.

Ausdehnung des Begriffes und der Schreibweise auf endlich viele Mengen ist selbstverständlich.

4. Es sei $a < b$. Die Menge der Punkte x des R_1, welche der Ungleichung $a < x < b$ genügen, nennt man ein offenes Intervall und schreibt hiefür (a, b). Ebenso bezeichnet das abgeschlossene Intervall $[a, b]$ die Menge der Punkte x, welche die Ungleichung $a \leq x \leq b$ erfüllen. Die Punkte x des halboffenen Intervalles $(a, b]$ bzw. $[a, b)$ genügen der Ungleichung $a < x \leq b$ bzw. $a \leq x < b$.

Diese Definitionen übertragen wir auf den R_n $(n \geq 2)$.

Sei $a_i < b_i$ für $i = 1, \ldots, n$.

Die Menge der Punkte $(x_1, \ldots, x_n)$ des R_n, welche für $i = 1, \ldots, n$ der Ungleichung $a_i < x_i < b_i$ bzw. $a_i \leq x_i \leq b_i$ genügen, bezeichnen wir als offenes bzw. abgeschlossenes Intervall. Für $n = 2$ sprechen wir auch von einem offenen bzw. abgeschlossenen Rechteck, für $n \geq 3$ von einem offenen bzw. abgeschlossenen Quader. Die Menge der Punkte $(x_1, \ldots, x_n)$ des R_n, welche Ungleichungen der Gestalt $a_1 \underset{(=)}{<} x_1 \underset{(=)}{<} b_1$, $a_2 \underset{(=)}{<} x_2 \underset{(=)}{<} b_2, \ldots, a_n \underset{(=)}{<} x_n \underset{(=)}{<} b_n$ genügen, bezeichnen wir als Intervall schlechthin, gleichgültig, ob die eingeklammerten Gleichheitszeichen sämtlich oder zum Teil weggelassen werden.

5. Matrizen bezeichnen wir im allgemeinen mit lateinischen oder gotischen Großbuchstaben. Vielfach fassen wir jedoch Vektoren auch als Spaltenvektoren, d. h. als einspaltige Matrizen auf und schreiben dann z. B.: $\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. Meist lassen wir es offen, ob $\mathfrak{a}$ ein geordnetes n-Tupel reeller Zahlen im Sinne von 2. oder einen Spaltenvektor bezeichnet. So werden wir manchmal eine Funktion $F(\mathfrak{x})$ betrachten, wobei $\mathfrak{x}$ von der Gestalt $(x_1, \ldots, x_n)$ ist. Führen wir eine neue Variable $\mathfrak{y}$ ein, indem wir die Transformation $\mathfrak{y} = \mathfrak{A}\mathfrak{x}$ (s. u.) benützen, dann fassen wir ohne weiteren Hinweis $\mathfrak{x}$ als Spaltenvektor auf.

Es sei

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1m} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nm} \end{pmatrix}$$

eine n-zeilige und m-spaltige Matrix. Dann verwenden wir für sie auch das Symbol $(a_{ij})_{1n}^{1m}$.

Mit $\mathfrak{A}'$ bezeichnen wir wie üblich die transponierte Matrix von $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{A}' = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{n1} \\ \dots\dots\dots \\ a_{1m} \dots a_{nm} \end{pmatrix}$$

Es sei $\mathfrak{A} = (a_{ij})_{1n}^{1m}$ und $\mathfrak{B} = (b_{ij})_{1m}^{1r}$. Dann ist das Matrizenprodukt $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{B}$ erklärt, und zwar ist $\mathfrak{C}$ eine n-zeilige und r-spaltige Matrix, deren Elemente c_{ij} durch $c_{ij} = \sum_{l=1}^{m} a_{il}\, b_{lj}$ gegeben sind. Ist insbesondere $\mathfrak{A} = (a_{ij})_{1m}^{1n}$ und $\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, dann ist

$$\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} a_{11}\, x_1 + \dots + a_{1n}\, x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\, x_1 + \dots + a_{mn}\, x_n \end{pmatrix}.$$

Fassen wir zwei Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, welche dieselbe Anzahl von Komponenten besitzen, als Spaltenvektoren auf, dann ist ihr inneres Produkt durch $\mathfrak{a}'\mathfrak{b} = \mathfrak{b}'\mathfrak{a}$ gegeben.

Es sei $\mathfrak{A} = (a_{ij})_{1n}^{1n}$ eine Matrix mit n Spalten und n Zeilen. Mit $\mathfrak{A}^{-1}$ bezeichnen wir die zu $\mathfrak{A}$ inverse Matrix, falls sie vorhanden ist.

Die Determinante von $\mathfrak{A}$ bezeichnen wir mit $|\mathfrak{A}|$ oder $|\,a_{ij}\,|_{1n}^{1n}$.

6. Wir erwähnen einen Satz über die Transformation des mehrfachen Integrals, der dem Beweis von I., Satz 7′ zu Grunde liegt:

$$\begin{aligned} y_1 &= g_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n &= g_n(x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \tag{1}$$

seien n Funktionen, die in einem offenen Quader Q des R_n definiert sind und dort stetige partielle Ableitungen nach allen Variablen besitzen. Überdies sei die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(g_1, \ldots, g_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$$

in Q von 0 verschieden.

Für alle $(x_1, \ldots, x_n) \in Q$ sei die durch (1) vermittelte Abbildung umkehrbar eindeutig. Q werde in einen Bereich $\mathfrak{B}$ abgebildet. Dann besitzen die Umkehrfunktionen $x_i = h_i(y_1, \ldots, y_n)$ stetige partielle Ableitungen nach allen Variablen in $\mathfrak{B}$, und es gilt

$$\frac{\partial(g_1, \ldots, g_n)\,\partial(h_1, \ldots, h_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)\,\partial(y_1, \ldots, y_n)} = 1$$

so daß auch

$$\frac{\partial(h_1, \ldots, h_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} \neq 0$$

in $\mathfrak{B}$ ist.

q sei ein beliebiger abgeschlossener Quader mit $q \subset Q$. Sein vermöge (1) geliefertes Bild in $\mathfrak{B}$ sei $\mathfrak{b}$. $f(x_1, \ldots, x_n)$ sei eine in q integrierbare Funktion. Dann ist auch

$$f(h_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, h_n(y_1, \ldots, y_n)) = k(y_1, \ldots, y_n)$$

in $\mathfrak{b}$ integrierbar, und es gilt

$$\int_q f(x_1, \ldots, x_n) \left| \frac{\partial(g_1, \ldots, g_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \right| dx_1 \ldots dx_n = \int_{\mathfrak{b}} k(y_1, \ldots, y_n)\, dy_1 \ldots dy_n.$$

Wir bemerken noch, daß die Aussage von I., Satz 7′ selbstverständlich bestehen bleibt, wenn man die Funktionen (71) nur in jenem Bereich betrachtet, in dem die Dichte $f(x_1, \ldots, x_n)$ nicht identisch verschwindet.

Alles in diesem Punkt Gesagte gilt sinngemäß analog auch für I., Satz 7.

7. Definition der Gammafunktion für positive Argumente.

Wir betrachten $\int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt$. Dieses Integral hat offenbar für alle $x > 0$ einen Sinn und definiert die Gammafunktion $\Gamma(x)$. Es ist also für $x > 0$

$$\int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt = \Gamma(x)$$

Durch partielle Integration erhält man sofort

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \text{ für } x > 0.$$

Daraus folgt für ganzes $n > 0$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

In I. Seite 70 wird gezeigt, daß $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\, dt = \sqrt{2\pi}$ oder $\int_0^\infty e^{-t^2/2}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Macht man hier die Transformation $t/\sqrt{2} = \sqrt{x}$ und schreibt man dann für die Integrationsvariable wieder t, erhält man

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\infty e^{-t} \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{ oder } \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

Diese Beziehung werden wir öfters verwenden.

Schließlich merken wir noch folgende wichtige Formel an: Für $a > 0$ und $b > 0$ gilt:

$$\int_0^1 (1-x)^{a-1}\, x^{b-1}\, dx = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

8. Für die Verweise im Text gilt folgende Konvention:

Zitieren wir in einem Kapitel einen Satz oder eine Fußnote dieses Kapitels, dann wird die Nummer des Satzes oder der Fußnote angegeben. Bei Hinweisen auf andere Kapitel wird jedoch die Nummer dieses Kapitels vorgesetzt. Dabei wird die Einleitung und das I. Kapitel als I., der Anhang als VIII. zitiert. So bedeutet z. B. im II. Kapitel: „siehe Satz 3" einen Hinweis auf den Satz 3 des II. Kapitels, aber: „siehe V., Satz 3" einen Hinweis auf den Satz 3 des V. Kapitels. Diese Vereinbarung gilt sinngemäß auch für Hinweise auf Abschnitte und Formelnummern.

Bei Seitenverweisen ist folgendes zu beachten: Seitenangaben, die sich auf den Text beziehen, ist immer ein „Seite" oder S. vorangestellt. Seitenangaben, die sich auf ein anderes Werk beziehen, bestehen nur in der Angabe der Seitenzahl. So bedeutet: siehe S. 256 einen Hinweis auf die Seite 256 des Buches, hingegen: Winkler, l. c., 256 einen Hinweis auf die Seite 256 eines Werkes von Winkler.

9. Weitere wichtige Bezeichnungsverabredungen finden sich auf S. 82, S. 119, S. 171, S. 213 und S. 288.

10. Zur Formulierung von III., Satz 1 bemerken wir ausdrücklich, daß beim Beweis stillschweigend vorausgesetzt wird, daß es zu jedem $\mathfrak{x} \in R_n$ mindestens ein t aus III. (4) gibt, so daß die Gleichungen

$$\varepsilon_1(\beta) = T(\mathfrak{x}, t) \text{ und } \varepsilon_2(\beta) = T(\mathfrak{x}, t)$$

auf S. 172 erfüllt sind. Eine sinngemäß analoge Bemerkung ist beim Beweis von III., Satz 2 zu machen.

Dies ist (für den allgemeinen Fall) ausdrücklich auf S. 178 oben formuliert.

11. Berichtigung: Am Ende der zweiten Zeile von IV., Satz 12 soll es heißen: ... asymptotisch wirksam, wenn die zweiten Momente von (79) existieren und gegen die entsprechenden Momente der normalen Grenzverteilung konvergieren.

Übersetzung englischsprachiger Fachausdrücke

Wir machen darauf aufmerksam, daß manchesmal der links stehende deutschsprachige Ausdruck nicht genau dem rechtsstehenden englischsprachigen entspricht, da wir gelegentlich im Text etwas andere Definitionen gewählt haben als sie dem englischsprachigen Terminus entsprächen.

Asymptotisch normal verteilt	Asymptotic normality
Bayes'sches Theorem	Bayes theorem
Binomialverteilung	Binomial distribution
Borelsche Menge	Borel set
Borel-meßbare Funktion	Borel measurable function
Charakteristische Funktion	Characteristic function
Chiquadratverteilung	Chi-square distribution
nicht zentrale	non central
Dichte	Density
Diskreter Typ	Discrete type
Diskriminatorische Funktion	Discriminant function
Einfacher Stichprobenplan	Single-sampling plan
Entscheidungsfunktion	decision function
Ereignis	Event
Erwartungswert	Expected value
bedingter	conditional
Exzeß	Excess
Faltung	Convolution
Freiheitsgrade	Degrees of freedom
F-Verteilung	F-distribution
Gesetz der großen Zahlen	Law of large numbers
Grundgesamtheit	Population
Gütefunktion	Power function
Häufigkeitsverteilung	Frequency distribution
Hotellings-Verteilung	Hotelling's distribution
Hyperebene	Hyperplane

Hyperfläche	Hypersurface
Hypergeometrische Verteilung	Hypergeometric distribution
Hypothese	Hypothesis
einfache	simple
zulässige	admissible
zusammengesetzte	composite
Komplexwertige Funktion	Complex-valued function
Konfidenzbereich	Confidence region
regulärer	unbiased
trennscharfer	most selective oder shortest
Konfidenzintervall	Confidence interval
Konfidenzkoeffizient	Confidence level
Konsistenz	Consistence
Konsumentenrisiko	Consumer's risk
Konvergenz	Convergence
Korrelation	Correlation
Korrelationskoeffizient	Coefficient of correlation
multipler	multiple
partieller	partial
Korrelierte Variable	Correlated variables
Kovarianz	Covariance
Kumulanten	Cumulants
Likelihood-Funktion	Likelihood function
-Gleichung	equation
-Quotiententest	ratio test
Matrix	Matrix
inverse	reciprocal
symmetrische	symmetric
Maximum Likelihood Schätzfunktion	Maximum likelihood estimator
Mediane	Median
Mehrstufenstichprobenverfahren	Multi-stage sampling
Minimalstreuung	Minimum variance
Mittelwert	Mean
Modalwert	Mode
Moment	Moment
absolutes	absolute
Multinomialverteilung	Multinomial distribution
Nichtparametrischer Test	Non-parametric test
Normalverteilung	Normal distribution

Null-Hypothese	Null-hypothesis
Parameter	Parameter
Permutation	Permutation
Poisson Verteilung	Poisson distribution
Positiv definite Form	Positiv definite form
Problem der zwei Stichproben	Two-sample problem
Produzentenrisiko	Producer's risk
Proportionales Stichprobenverfahren	Proportionate sampling
Prüfverfahren	Test of significance
Quadratische Form	Quadratic form
Randverteilung	Marginal distribution
Ranginvariant	Rank invariant
Region	Region
ähnliche	similar
kritische	critical
vom Typ A, B, C, D	of type A, B, C, D
Regression	Regression
Regressionskurve	curve
Residualterm	Residual
Schätzfunktion	Estimator
erschöpfende	sufficient
erwartungstreue	unbiased
konsistente	consistent
wirksame	efficient
Schiefe	Skewness
Semidefinite Form	Semidefinite form
Sequentialanalyse	Sequential analysis
Sicherheitsschranke	Significance limit
Sicherheitswahrscheinlichkeit	level
Spannweite	Range
Standardabweichung	Standard deviation
Standardisierte Variable	Standardised variable
Stetiger Typ	Continuous type
Stichprobe	Sample
geschichtete	stratified
zufällige	random
Stichprobenfunktion	Statistic
geordnete	Order statistic
Stichprobenraum	Sample space