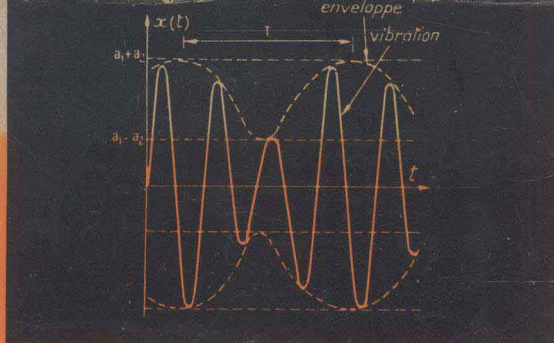
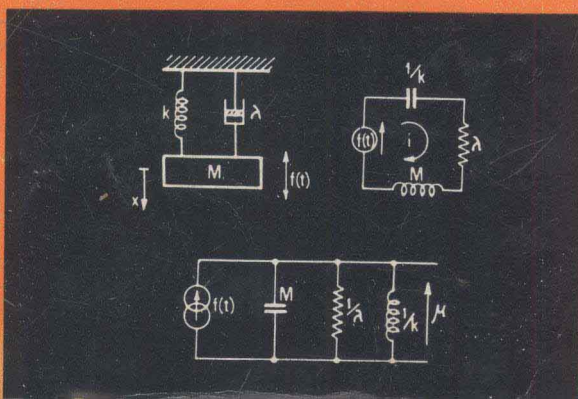
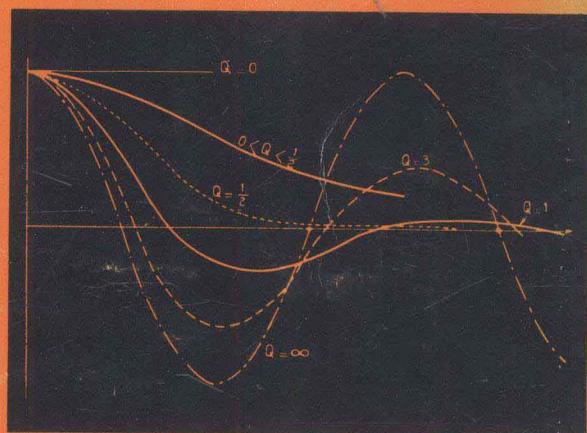




COURS DE PHYSIQUE DES VIBRATIONS

Oscillations Propagation



PAR A. FOUILLÉ
ET P. DÉRÉTHÉ

Préface de
F. MILSANT

Eyrolles
EDITEUR-PARIS

COLLECTION E.E.A.

sous la direction de F. MILSANT

COURS DE PHYSIQUE DES VIBRATIONS

Oscillations - Propagation

à l'usage des Ingénieurs

par

André FOUILLÉ

*Professeur honoraire
de l'E.N.S.
des Arts et Métiers*

Patrick DÉRÉTHÉ

*Professeur agrégé à l'E.N.S.
de l'Electronique et
de ses Applications*

et

PRÉFACE DE
Francis ~~MILSANT~~

ÉDITIONS ~~EYROLLES~~

61, boulevard Saint-Germain - 75005 PARIS

1977

DU MEME AUTEUR

Chez DUNOD, éditeur

Electricité fondamentale. Electrostatique. Electrocinétiq.

Electrotechnique à l'usage des Ingénieurs.

Tome 1 — Electromagnétisme. Courants alternatifs.

Tome 2 — Machines électriques à courants alternatifs.

Tome 3 — Machines à courant continu, Commande électronique.

Problèmes d'Electrotechnique à l'usage des Ingénieurs.

Tome 1 — Electricité fondamentale.

Tome 2 — Machines électriques.

Cours-problèmes d'électricité fondamentale à l'usage des techniciens supérieurs.

Chez DESFORGES, éditeur.

Précis d'électricité fondamentale à l'usage des techniciens supérieurs.

Aux Editions Techniques et Scientifiques Françaises.

Précis des machines électriques à l'usage des techniciens supérieurs.

«La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les «copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective» et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, «toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite» (alinéa 1er de l'article 40)».

«Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal».

© 1977 EYROLLES

COURS DE PHYSIQUE DES VIBRATIONS

Oscillations - Propagation

COLLECTION E.E.A.

(Electronique, Electrotechnique, Automatique)
sous la direction de Francis MILSANT

A l'usage de l'Enseignement Supérieur :
Ecoles d'Ingénieurs, Facultés, CNAM...

EN VENTE aux ÉDITIONS EYROLLES

Cours d'Électronique, (en quatre volumes), par Francis MILSANT :

Tome I. — *Circuits à régime variable* (1975).

Tome II. — *Composants électroniques* (1976).

Tome III. — *Amplification. Circuits intégrés* (1976).

Tome IV. — *Contre-réaction, oscillation, alimentation* (1975).

Problèmes d'Électronique, par Francis MILSANT :

Tome I. — *Circuits à régime variable* (1977).

Tome II. — *Composants électroniques* (1976).

Mesures d'Électronique, par Henry CATELIN et Pierre JOUBERT :

Tome I. — *Circuits à régime variable* (1972).

Asservissements linéaires, par Francis MILSANT :

Tome I. — *Analyse* (1975).

Tome II. — *Synthèse* (1976).

Solutions de problèmes sur les asservissements linéaires, par L. BALMER et C.P. LEWIS, traduit de l'anglais par Sylvain THELLIEZ (1975).

Automatismes à séquences, par Maurice MILSANT (1976).

Commande électronique des moteurs à courant continu, par Robert CHAUPRADE (1975).

Problèmes d'Electrotechnique avec leurs solutions, par Michel BORNAND (1976):
Moteurs à courant continu et leur commande par thyristor.

110 Études pratiques de l'amplificateur opérationnel, par R. MARSTON, traduit de l'anglais par Francis MILSANT (1977):

Générateurs, lignes, récepteurs, par C.E. MOORHOUSE, traduit de l'anglais par Francis MILSANT (1977).

Solutions de problèmes sur les circuits logiques, par D. ZISSOS, traduit de l'anglais par Maurice MILSANT.

EN PRÉPARATION

Mesures d'Electronique, par Henry CATELIN et Pierre JOUBERT :

Tome II. — *Composants électroniques.*

PREFACE

La Physique des vibrations a pris, dans la formation de l'Ingénieur une importance croissante, car elle a sa place dans les techniques nouvelles appliquées aux automatismes (Electronique appliquée, asservissements, etc.)

C'est pourquoi il nous a paru nécessaire de faire figurer ce sujet dans la collection E.E.A.

A cet effet, nous avons demandé à M. FOUILLÉ, auteur bien connu par ses ouvrages à l'usage des Ingénieurs (1), de collaborer avec M. DÉRÉTHÉ, professeur agrégé de physique enseignant les Sciences appliquées à l'ENSEA de Clichy, pour rédiger ce cours de Physique des Vibrations avec un double souci :

— d'une part de se conformer qu programme récent de Physique de l'E.N.S. d'Arts et Métiers;

— d'autre part de développer largement les conceptions les plus modernes qui ont pour objet, en tirant parti des analogies électriques et mécaniques, de faciliter l'étude des ensembles mécaniques les plus complexes en leur substituant les montages électriques — généralement électroniques — correspondants.

Ce double souci me paraissant satisfait, je ne doute pas que ce cours de Physique des Vibrations obtienne le succès qu'il mérite.

F. MILSANT

(1) En particulier la *Physique des Vibrations* (ouvrage épuisé) publiée par les éditions Dunod qui nous ont permis — et nous les en remercions ici — d'utiliser quelques-unes de leurs illustrations.

I.T.Q.A. — BOURGES

Dépôt légal : 4e trimestre 1976

N° d'Editeur : 3130

TABLE DES MATIERES

PREFACE	v
CHAPITRE PREMIER — Généralités sur les phénomènes vibratoires. Rappel de notions essentielles — Grandeur sinusoïdale.	1
1.1 Grandeurs périodiques — Période — Fréquence	1
1.2 Mouvement harmonique ou sinusoïdal.	2
1.3 Généralisation. Grandeur sinusoïdale	7
1.4 Composition des mouvements sinusoïdaux	10
1.5 Décomposition des mouvements	23
CHAPITRE 2 — Oscillations pendulaires libres et entretenues. Oscillations de relaxation	32
2.1 Définition du pendule. Problème proposé.	32
2.2 Mouvement pendulaire non amorti	33
2.3 Mouvement pendulaire amorti	48
2.4 Oscillations de relaxation	63
2.5 Comparaison entre les oscillations pendulaires entretenues et les oscillations de relaxation	70
CHAPITRE 3 — Oscillations forcées des systèmes à un degré de liberté. ...	80
3.1 Définitions	80
3.2 Etude analytique	81
CHAPITRE 4 — Systèmes à plusieurs degrés de liberté.	106
4.1 Systèmes à deux degrés de liberté sans amortissement	106
4.2 Oscillations forcées avec amortissement	117
4.3 Systèmes à plus de deux degrés de liberté	120
4.4 Analogies électro-mécaniques	121
CHAPITRE 5 — Etude expérimentale des mouvements vibratoires	130
5.1 Méthodes avec enregistrement graphique	130
5.2 Méthodes sans enregistrement quantitatif	135
CHAPITRE 6 — Propagation d'une vibration dans un milieu illimité.	143
6.1 Présentation générale.	143
6.2 Etude de quelques cas particuliers.	145
6.3 Généralisation	159

6.4 Etude énergétique.	162
6.5 Phénomènes liés à des déplacements	167
6.6 Propagation en milieu dispersif.	173
CHAPITRE 7 — Propagation avec changement de milieu — Interférences —	
Diffraction.	180
7.1 Présentation du problème	180
7.2 Onde plane — Acoustique — Dioptre plan	181
7.3 Phénomènes liés à la réflexion d'une onde	189
7.4 Interférences	199
7.5 Diffraction	206

CHAPITRE PREMIER

GÉNÉRALITÉS SUR LES PHÉNOMÈNES VIBRATOIRES

Rappel de notions essentielles - Grandeur sinusoïdale

1.1 GRANDEUR PERIODIQUE. PERIODE. FREQUENCE

1.11 Phénomène périodique dans le temps Période. Fréquence

Un phénomène est dit *périodique dans le temps* quand il se reproduit identiquement à lui-même à intervalles de temps égaux. Soit $g(t)$ la grandeur associée au phénomène. $g(t)$ sera périodique si :

$$\exists \theta > 0 \text{ tel que } \forall t, g(t + \theta) = g(t)$$

S'il existe une valeur θ , il en existe une infinité parmi lesquelles tous les multiples entiers de θ .

Soit T la plus petite valeur de l'ensemble des θ , $T = \inf. [\theta]$
par définition T est la *période* de la grandeur. Elle s'exprime en secondes. Le nombre de périodes par unité de temps s'appelle la *fréquence* f . Elle s'exprime en *hertz*.

Entre la période T et la fréquence f , on a la relation $\boxed{f T = 1}$

1.12 Mouvement périodique

Pour mieux fixer le langage dans l'établissement des définitions,

nous étudierons tout d'abord, en tant que phénomène périodique, le mouvement périodique. La grandeur associée sera le déplacement.

Un mouvement est périodique quand le mobile, parcourant la même trajectoire, se retrouve, à intervalles de temps égaux, dans la même position à la même vitesse.

1.2 MOUVEMENT HARMONIQUE OU SINUSOIDAL

1.21 Définition cinématique

1.211 Rappel du mouvement circulaire uniforme.

Le mouvement circulaire uniforme est celui d'un mobile qui, à vitesse constante, se déplace sur un cercle. Désignons par :

M_0 la position du mobile à l'instant zéro;

M la position du mobile à l'instant t ;

ω = vitesse angulaire (numériquement égale à l'angle dont a tourne OM dans 1 s);

T = période = temps de parcours de la circonférence.

Entre ces grandeurs et le rayon R de la circonférence parcourue, nous avons les relations évidentes :

$$\boxed{V = R \omega}$$

m/s m rd/s

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$$

rd/s s

$$\boxed{\alpha = \omega t}$$

rd rd/s s

Si un deuxième mobile est animé, sur la même circonférence, d'un mouvement uniforme de même vitesse, on rapportera son mouvement à celui du premier mobile :

a) Soit par le temps θ qui sépare les instants de passage des deux mobiles en M_0 ;

b) Soit plus généralement (fig. 1) par l'angle $\varphi = M_0 \hat{O} M'_0$ (M'_0 = position du deuxième mobile à l'instant zéro).

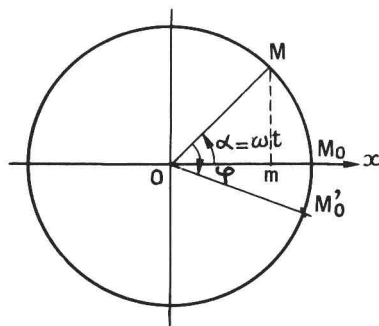


Fig. I. 1

Le temps θ est appelé *avance* ou *retard* du deuxième mobile par rapport au premier : l'angle φ désigne le déphasage entre leurs mouvements. Comme l'angle φ est balayé par le rayon dans le temps θ , on établit immédiatement la relation entre φ (radians) et θ (secondes) :

$$\frac{\theta}{T} = \frac{\omega\theta}{\omega T} = \frac{\varphi}{2\pi} \quad \text{soit} \quad \varphi = 2\pi \frac{\theta}{T}.$$

Lorsqu'on a (K désignant un nombre entier) :

$\varphi = 0$ ou $\varphi = 2K\pi$, les mouvements sont dits *en phase*;

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ ou plus généralement $\varphi = (2K + 1)\frac{\pi}{2}$ les mouvements sont en *quadrature*;

$\varphi = \pi$ ou plus généralement $\varphi = (2K + 1)\pi$ les mouvements sont en *opposition de phase*. (Résoudre E 11.)

1.212 Mouvement rectiligne sinusoïdal : projection d'un mouvement circulaire uniforme.

Soit m (fig. 2) la projection de la position M du mobile sur le rayon vecteur initial OM_0 . Par définition, le mouvement de m sur la droite OM_0 est appelé mouvement *harmonique*.

On l'appelle aussi sinusoïdal parce que l'*élongation* $Om = x$ du point m est une fonction sinusoïdale du temps :

$$Om = x = OM \cos \alpha = a \cos \omega t$$

($OM = a =$ rayon du cercle).

1.22 Définition mathématique

1.221 Equation en cosinus.

Nous avons écrit : $x = a \cos \omega t$.

Dans cette équation, x désigne l'*élongation* (abscisse du mobile à l'instant t); a l'*amplitude* du mouvement, c'est-à-dire l'élongation maximale, ω la pulsation; a et x s'expriment en unités de même nom; ω s'exprime en radians par seconde.

Mais l'équation précédente n'est pas générale. Si à l'origine des temps, le mobile ne se trouve pas au point M_0 d'abscisse $x = a$, nous devons écrire :

$$x = a \cos (\omega t + \varphi)$$

φ désignant le déphasage du mobile par rapport au *repère mobile* qui, animé d'un mouvement de même période et de même amplitude sur la même droite, se trouverait en M_0 à l'origine des temps. Le sens de rotation de M sur le cercle étant le sens trigonométrique direct, le déphasage φ sera :

positif, si le mobile considéré est *en avance* par rapport au repère mobile;

négatif, si le mobile considéré est *en retard* par rapport au repère mobile.

On voit qu'un mouvement sinusoïdal est défini par ses trois constantes a , ω , φ .

Remarque. — L'équation en cosinus est parfois écrite sous la forme :

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t,$$

on peut la ramener à la forme précédente en écrivant :

$$x = A \left(\cos \omega t + \frac{B}{A} \sin \omega t \right),$$

et en posant $\frac{B}{A} = -\operatorname{tg} \varphi$ avec $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$

$$x = A (\cos \omega t - \operatorname{tg} \varphi \sin \omega t) = \frac{A}{\cos \varphi} (\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi),$$

$$x = \frac{A}{\cos \varphi} \cos (\omega t + \varphi),$$

grandeur sinusoïdale dont l'amplitude est :

$$x = \frac{A}{\cos \varphi} = A \times \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = A \times \sqrt{1 + \frac{B^2}{A^2}} = \sqrt{A^2 + B^2}.$$

1.222 Equation différentielle.

La vitesse du mobile m à l'instant t est :

$$v = \frac{dx}{dt} = -a\omega \sin \omega t.$$

L'accélération du mobile à l'instant t a donc pour expression :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -a\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 x.$$

Nous pourrions donc écrire :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Réciproquement, cette équation différentielle a pour solution générale $x = a \cos(\omega t + \varphi)$; les deux constantes d'intégrations a , et φ , sont déterminées à partir des conditions initiales.

Une équation différentielle de la forme $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ définit donc un mouvement sinusoïdal.

1.23 Définition dynamique

Le mouvement sinusoïdal est celui d'un point matériel attiré vers un point fixe par une force proportionnelle à la distance du point matériel au centre fixe.

Soit en effet M le point matériel de masse m mobile sur la droite $x'x$; O le centre fixe; x la distance OM . La force de rappel exercée par O sur le point M s'exprimera par :

$$F = -Kx \quad (K = \text{constante positive}),$$

le signe $(-)$ s'expliquant par le fait que la force F de rappel est toujours de signe contraire à l'élongation. Appliquons la loi fondamentale de la dynamique $\vec{F} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ où $\vec{P}$ est la quantité de mouvement. En mécanique classique (non relativiste) $\vec{P} = m\vec{v}$ d'où $\vec{F} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{\Gamma}$ en projection sur $\vec{Ox}$: $-Kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$

ou : $m \frac{d^2x}{dt^2} + Kx = 0$ soit $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m} x = 0$

C'est l'équation différentielle d'un mouvement sinusoïdal. Par identification avec l'équation déjà établie, nous écrivons :

$$\omega^2 = \frac{K}{m} \quad \text{ou} \quad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

et la période de ce mouvement a pour expression :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$$

Remarque I. — La force $F = -Kx$ dérive d'un potentiel E_p tel que

$$dE_p = -F dx = +Kx dx$$

d'où $E_p = -\int F dx = \int +Kx dx = \frac{1}{2} Kx^2 + C^te.$

L'expression de l'énergie potentielle élastique (nulle pour $x = 0$) est donc $\frac{1}{2} Kx^2$.

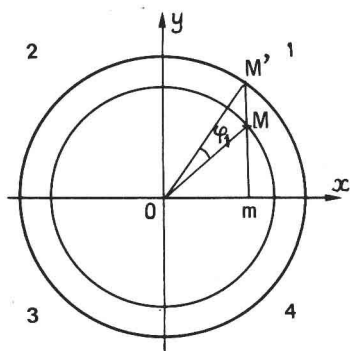


Fig. I. 2

mobile m animé sur la droite $x'x$ d'un mouvement d'équation :

$$x = Om = OM \cos \omega t = a \cos \omega t.$$

Sa vitesse à l'instant t ayant pour expression :

$$v = \frac{dx}{dt} = -a\omega \sin \omega t = \omega \times (-a \sin \omega t) = -\omega \times \overline{Mm},$$

si, brusquement, à cet instant, la vitesse prend la valeur $v + \epsilon$ (au cours de ce passage brusque l'élongation n'a pas changé), le point M est brusquement reporté, sur la droite mM , en un point M' tel que :

$$\overline{M'm} = \frac{v + \epsilon}{\omega}.$$

Si, après l'impulsion, le mouvement conserve sa période T , m sera la projection sur $x'x$ du mobile M' décrivant la circonférence de rayon OM' avec la vitesse angulaire ω . L'impulsion a donc fait passer l'amplitude de OM à OM' et, par rapport au mouvement primitif, a provoqué un déphasage $\varphi_1 = M\hat{O}M'$.

L'intégration de l'équation précédente donne $\frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}Kx^2 =$ constante

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Kx^2 = \text{constante}.$$

La somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique du système (mobile et centre attractif) est constante.

Remarque II. — Effets d'une brusque variation de vitesse sur l'amplitude et sur la phase. — Soit un

On voit ainsi que, si l'impulsion a lieu au passage du mobile m en O , elle ne provoque aucun déphasage et que, suivant l'instant de la période auquel a lieu l'impulsion *de même signe que v* , cette impulsion peut produire un déphasage *avant* (M dans les quadrants 1 et 3) ou bien un déphasage *arrière* (M dans les quadrants 2 et 4).

1.3 GENERALISATION. GRANDEUR SINUSOÏDALE

Toutes les définitions que nous avons données, toutes les équations que nous avons obtenues et qui se rapportent au mouvement sinusoïdal peuvent évidemment s'appliquer à des grandeurs autres que des élongations. La lettre x par laquelle nous avons représenté une élongation peut représenter la valeur instantanée d'un angle, d'une pression, d'une force ou même d'autre chose qu'une grandeur mécanique, par exemple, un champ électrique ou magnétique, une densité de courant électrique, etc. La lettre a représentera alors la valeur maximale de cette grandeur.

1.31 Représentation cartésienne

Les temps t sont portés en abscisse et en ordonnée les valeurs instantanées x correspondantes (une certaine longueur représentant l'unité de la grandeur). La figure 3 est la représentation de :

$$x = a \cos (\omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$$

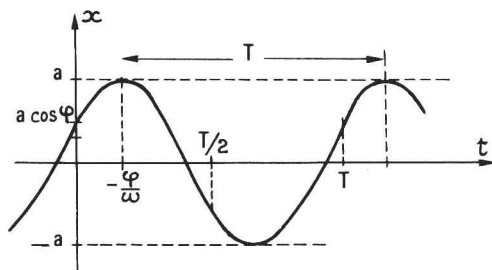


Fig. I. 3

1.32 Représentation vectorielle

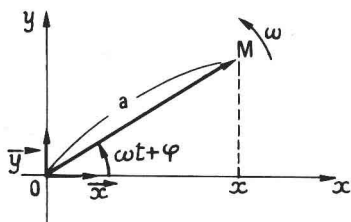


Fig. I. 4.

Dans un plan vectoriel E muni d'axes orthonormés représentons à l'instant t la grandeur sinusoïdale $x = a \cos(\omega t + \varphi)$ par un vecteur $\vec{V}$ tel que :

$$|\vec{V}| = a \quad (\vec{Ox}, \vec{V}) = \omega t + \varphi$$

On a en appelant $\vec{x}$ et $\vec{y}$ les vecteurs unitaires des axes :

$$\vec{V} = \vec{OM} = a \cos(\omega t + \varphi) \vec{x} + a \sin(\omega t + \varphi) \vec{y}$$

et l'élongation à l'instant t est représentée par la projection sur Ox du vecteur $\vec{OM}$ supposé tournant dans le sens trigonométrique direct avec la vitesse angulaire ω .

Lorsque cette représentation vectorielle est faite à l'instant $t = 0$ avec $(\vec{x}, \vec{V}) = \varphi$ la projection sur Ox du vecteur $\vec{V}$ représente l'élongation initiale $x_0 = a \cos \varphi$. La représentation vectorielle est alors la *représentation de Fresnel*.

Dans cette représentation le point M est déterminé :

— soit par ses coordonnées cartésiennes x et y avec $x = a \cos(\omega t + \varphi)$ et $y = a \sin(\omega t + \varphi)$

— soit par ses coordonnées polaires a et θ avec $a = |\vec{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\theta = \omega t + \varphi = (\vec{Ox}, \vec{OM})$.

Et la grandeur sinusoïdale $a \cos(\omega t + \varphi)$ est la coordonnée sur Ox de M .

Remarque. — Il existe une autre représentation polaire de M qui serait : $a' = -a$ et $\theta' = \theta + \pi$.

Nous n'en tiendrons pas compte ici, de façon à garder toujours des rayons polaires positifs, pour pouvoir les identifier à des amplitudes qui sont des grandeurs essentiellement positives.