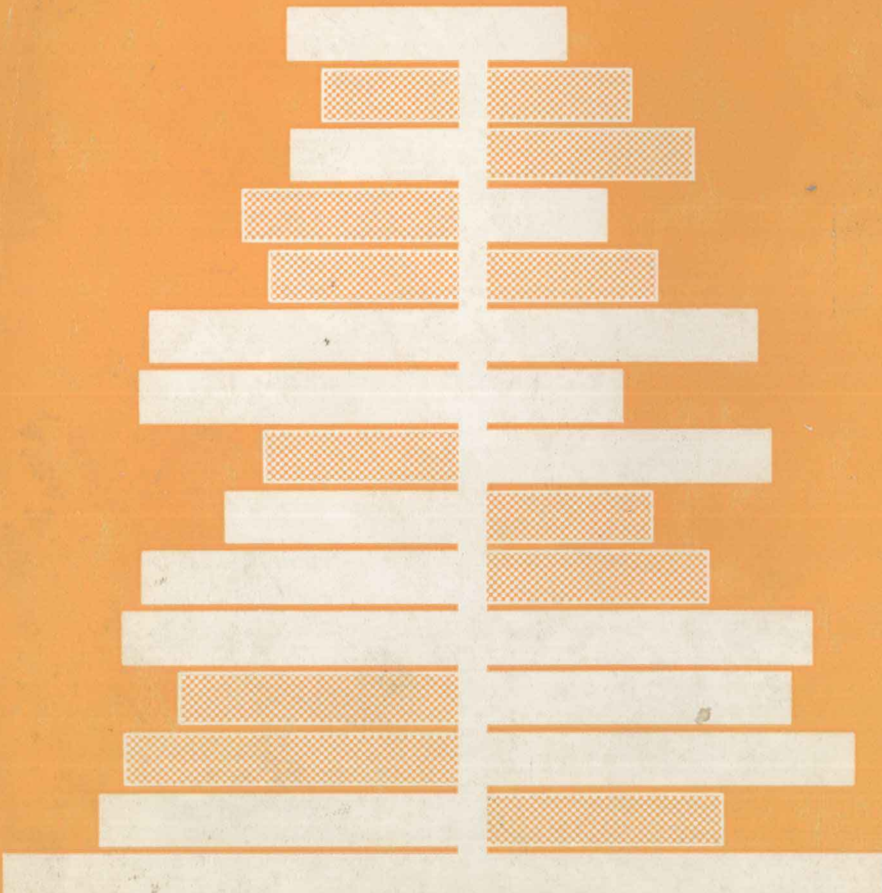
商・経系
基礎数学

小林竜一 著



共立出版株式会社

商・経系
基礎数学

小 林 竜 一 著

共立出版株式会社

小 林 竜 一（こばやし りゅういち）

1925年 東京に生れる
1954年 東京大学工学部応用数学科卒業
現在 立教大学教授

主要著書

社会科学のための数学概説	共立出版
OR 概論	共立出版
Basic FORTRAN	培風館
Basic FORTRAN 演習	培風館
相関回帰分析法入門	日科技連出版社
検定と推定	朝倉書店
需要予測の数学	至文堂
経営数学 基礎と応用	日本生産性本部
現代の統計	サイエンス社

1979

商・経系 基礎数学

定価 1300 円

1979年1月20日 初版1刷発行

著者 小 林 竜 一 ©

発行 共立出版株式会社／南條正男

東京都文京区小日向 4—6—19
電話東京 947 局 2511 番（代表）
郵便番号 112／振替口座東京 1-57035 番

印刷 藤本綜合印刷株式会社

製本 文麗社

社団法人
自然科学書協会
会員

検印廃止
NDC 410

3041-111200-1371

Printed in Japan

はしがき

本書の執筆の目的は，一口でいえば数学の勉強をする必要は感じているが，どちらかというと数学が苦手である，商学部，経済学部，経営学部系の短大や大学の学生に，数学の面白さを知ってもらうことである。したがって，数学の厳密さは犠牲にしても，数学的な考え方がそれとなくわかるような文章の展開をはかった。確率論や統計学はもちろんのこと，微分積分学，線形代数学は上記学部の学生にとっても，実社会に出て応用されることが多い。

この本を教科書として採用される先生方は，本書では意識的に触れなかった数学の厳密さについて，重点的に補足を行っていただければ幸いである。そのことによって，学生は数学の考え方と，厳密さの点の双方が理解されるのではないだろうか。

例題としては，なるべく経済や商科の分野並びに身近な問題，社会的事象に関連した事項を選ぶことに努めた。

なお，著者の気づかない誤りも多いかも知れないので，読者のご叱正をまって改善したいと考えている。

1978年12月

小林竜一

詳解演習シリーズ

詳解 **代数・幾何演習** ……福田安蔵他編／A 5・264頁・定価1300円
詳解 **ベクトルと行列演習** ……安岡善則他編／A 5・232頁・定価1300円
詳解 **微積分演習 I** ……鈴木七緒他編／A 5・384頁・定価1500円
詳解 **微積分演習 II** ……黒崎千代子他編／A 5・224頁・定価1200円
詳解 **応用解析演習** ……福田安蔵他編／A 5・264頁・定価1500円
詳解 **微分方程式演習** ……安岡善則他編／A 5・258頁・定価1300円
詳解 **FORTRAN 演習** ……中村明子他編／A 5・240頁・定価1700円
詳解 **現代物理学演習** ……西山敏之他編／A 5・418頁・定価2300円
詳解 **物理学演習 上** ……後藤憲一他編／A 5・452頁・定価2000円
詳解 **物理学演習 下** ……山崎修一郎他編／A 5・414頁・定価2000円
詳解 **力学演習** ……後藤憲一他編／A 5・372頁・定価1900円
詳解 **電磁気学演習** ……山崎修一郎他編／A 5・464頁・定価2100円
詳解 **物理化学演習** ……小野宗三郎他編／A 5・336頁・定価1800円
詳解 **材料力学演習 上** ……斎藤 渥他著／A 5・332頁・定価1900円
詳解 **材料力学演習 下** ……平井憲雄他著／A 5・340頁・定価1900円
詳解 **電気回路演習 上** ……大下真二郎著／A 5・400頁・近刊

理工系・例題解法

1 常微分方程式 ……後藤憲一訳／A 5・138頁・定価950円
2 力　学 ……山本邦夫・神吉 健訳／A 5・114頁・定価800円
3 ベクトル場 ……熊原啓作訳／A 5・110頁・定価800円
4 変分法 ……後藤憲一訳／A 5・114頁・定価950円
5 ベクトル ……竹之内脩訳／A 5・124頁・定価950円
6 線形代数 ……原 惟行訳／A 5・128頁・定価850円
7 フーリエ級数と境界値問題 ……竹之内脩訳／A 5・116頁・定価950円
8 電磁気学 ……山本邦夫・神吉 健・田口侑男訳／A 5・134頁・定価850円
9 統　計 ……田畑吉雄訳／A 5・136頁・定価950円
10 ラプラス変換 ……山本邦夫・神吉 健訳／A 5・136頁・定価950円
11 群 ……宇麼谷教明・野田隆三郎訳／A 5・136頁・定価950円
12 一変数の微積分 ……後藤憲一訳／A 5・128頁・定価900円
13 多変数の微積分 ……竹之内脩訳／A 5・114頁・定価950円
14 複素数 ……後藤憲一訳／A 5・130頁・定価950円
15 確率過程 ……石井恵一訳／A 5・122頁・定価950円
16 流体力学 ……西山敏之訳／A 5・144頁・定価950円

共立出版

目　　　次

第I部　線 形 代 数

第Ⅱ部　微 積 分 学

第Ⅲ部　確　率　論

第Ⅳ部 数学の実社会への応用

第 I 部

線　形　代　数

この第 I 部ではベクトルと行列と行列式を学ぶことにする。これらは数学の基礎であるのみでなく，社会科学の諸分野での応用が数多く考えられている。例えば線形計画法（後出）とか，産業連関分析（21 頁）などである。

第 1 章　行　　列

§ 1.　ベクトルと行列

n 個の数を横に並べたものを**行ベクトル**（または**横ベクトル**）という。n をベクトルの**次元**という。例えば

$$[3 \quad 4 \quad 5 \quad 6]$$

は 4 次元の行ベクトルである。n 個の数を縦に並べたものを**列ベクトル**（または**縦ベクトル**）という。例えば

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

は 3 次元の列ベクトルである。個々の数は**要素**とか**成分**とかいう。

（注） 数学では横に数が並んだものを**行**，縦に数が並んだものを**列**という。行とか列は別に科学的，物理的の意味があるわけではない。また，本書では数としては実数のみを考えることを原則とする。

$$\boldsymbol{a}=[3 \quad 4 \quad 5 \quad 6] \tag{1.1}$$

と $\boldsymbol{a}$ という記号でベクトル $[3\ 4\ 5\ 6]$ を表わす。この記号法は理論を展開するときに便利である。同じように

$$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

と書くことも理論的な展開に便利なことが多い。

4つの3次元列ベクトル

$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}4\\3\\2\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}5\\4\\3\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{d}=\begin{bmatrix}6\\5\\4\end{bmatrix} \tag{1.3}$$

を横に並べると

$$\begin{bmatrix}3&4&5&6\\2&3&4&5\\1&2&3&4\end{bmatrix} \tag{1.4}$$

となる。これを3行4列の**行列**（matrix）という。また 3×4 の行列などともいう。そして行列に$\boldsymbol{A}$という記号を与え

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&4&5&6\\2&3&4&5\\1&2&3&4\end{bmatrix} \tag{1.5}$$

というように $\boldsymbol{A}$ を定義して，数学的な理論の展開に使う。

また行列 $\boldsymbol{A}$ は3つの行ベクトル

$$\begin{matrix}[3\ \ 4\ \ 5\ \ 6]\\ [2\ \ 3\ \ 4\ \ 5]\\ [1\ \ 2\ \ 3\ \ 4]\end{matrix} \tag{1.6}$$

を縦に並べたものと考えることができる。

（注） 列ベクトルはn行1列の行列，行ベクトルは1行n列の行列と考えることができる。

m行n列（$m\times n$ とも書く）の行列 $\boldsymbol{A}$ とは

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots\cdots&a_{mn}\end{bmatrix} \tag{1.7}$$

であり，a_{ij} ($i=1,2,\cdots\cdots,m$; $j=1,2,\cdots\cdots,n$) を行列 $\boldsymbol{A}$ の**要素**（element）または**元**という。特にベクトルのときには

$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix} \tag{1.8}$$

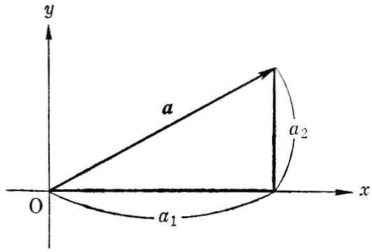


図 1.1　ベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ の幾何学的表わし方
（行ベクトル $[a_1\ a_2]$ でも同じ）

を n 次元列ベクトルといい，a_i $(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$ を**成分**（component）という。もちろん行ベクトルに対しても

$$\boldsymbol{a}=[a_1\, a_2 \cdots\cdots\, a_n] \tag{1.9}$$

を n 次元行ベクトルといい，a_i $(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$ を成分という。

A．ベクトルの和

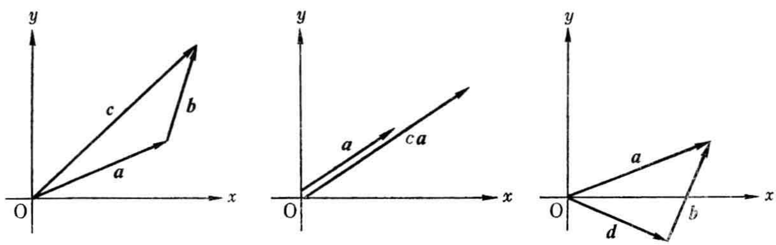
2つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の和 $\boldsymbol{c}$ は以下のようになる。

$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \text{のとき} \quad \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

とすると

$$c_1=a_1+b_1,\ c_2=a_2+b_2,\ \cdots\cdots,\ c_n=a_n+b_n$$

というように成分ごとに加えたものである。差についても同様に



ベクトルの和の幾何学的説明　　ベクトルの定数倍の幾何学的説明　　ベクトルの差の幾何学的説明

図 1.2

$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \text{のとき} \quad \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{d}=\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

とすると

$$d_1=a_1-b_1,\ d_2=a_2-b_2,\ \cdots\cdots,\ d_n=a_n-b_n$$

というように，成分ごとに差をとったものとなる。また，ベクトルの定数倍とは成分を全部定数倍したものをいう。

B．ベクトルの内積

2つの同次元のベクトルがあるとしよう。

$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

このとき相対応する成分を掛算し，それを全部加えたものをベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の**内積**という。記号で $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ と書くことにしよう（この慣習はかなりよく通用している)。

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \equiv a_1 b_1+a_2 b_2+\cdots\cdots+a_n b_n \tag{1.11}$$

である。

【例】 商品が n 種あるスーパーで客が買物をしたとする。第 i 番目の商品の価格を a_i としよう。ある客は第 i 番目の商品を b_i 個買ったとしよう（もちろん，かなり多くの商品は買わないからそれに対応する b_i は0である)。このときベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積は客の支払う金額となる。

［問］ 次のベクトルの内積を求めよ。

（イ）$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$　（ロ）$\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$　（ハ）$\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

［問］ ベクトルの内積の概念が実社会で役立つ例を探せ。

（注） ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ ともに列ベクトルのとき，行列の掛算ルール（8頁）で内積を表わすと $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b}$ または $\boldsymbol{b}'\boldsymbol{a}$ となる。

C．ベクトル，行列の転置

ベクトル，行列において，行を列に，列を行にすることを**転置** (transpose) という。例えば

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \quad [4\ \ 5\ \ 6\ \ 7] \quad \begin{bmatrix}1&4&7&10\\2&5&8&11\\3&6&9&12\end{bmatrix} \tag{1.12}$$

を転置すると

$$[1\ \ 2\ \ 3] \quad \begin{bmatrix}4\\5\\6\\7\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\\10&11&12\end{bmatrix} \tag{1.13}$$

となる。転置を示す記号はダッシュまたは右肩に小さく t を書くことが多い。つまり以下の例のように使用する。

$$\left.\begin{aligned}
&\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}' = [1\ \ 2\ \ 3]\\
&\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}^t = [1\ \ 2\ \ 3]\\
&\begin{bmatrix}1&4&7&10\\2&5&8&11\\3&6&9&12\end{bmatrix}' = \begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\\10&11&12\end{bmatrix}\\
&\begin{bmatrix}1&4&7&10\\2&5&8&11\\3&6&9&12\end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\\10&11&12\end{bmatrix}
\end{aligned}\right\} \tag{1.14}$$

また，行列

$$\begin{bmatrix}1&4&7&10\\2&5&8&11\\3&6&9&12\end{bmatrix}$$

の第1行とは [1 4 7 10] のことであり，第2列というと

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

のことである。

［問］ 次の行列，ベクトルの転置を行え。

（イ） $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 8 \\ 6 & -1 & 3 \end{bmatrix}$　（ロ） $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$　（ハ） $\begin{bmatrix} 1 & 5 & -7 \end{bmatrix}$

D．行列の和と差

実例をもって行列の和と差を示そう。もちろん同じ行数，同じ列数でなくては和や差を定義することはできない。

【例】 以下に示すのは 3×4 の行列の和の一例である。

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 & 7 \\ 2 & 0 & 5 & -8 \\ 3 & 0 & 6 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 & 7 \\ -1 & 9 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+0 & -1+4 & -4-2 & 7+7 \\ 2-1 & 0+9 & 5+1 & -8+4 \\ 3+2 & 0-3 & 6+5 & 9+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 & 14 \\ 1 & 9 & 6 & -4 \\ 5 & -3 & 11 & 17 \end{bmatrix} \qquad (1.15)$$

要するに，相対的に同じ位置にある要素を加え合わせればよい。

（注） 行列が等しいとは相対応するすべての要素が等しいことをいう（定義）。

【例】 以下に示すのは 2×3 の行列の差である。

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 9 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-1 & 7-2 & 9-4 \\ 6+1 & 8-9 & 10-5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 5 & 5 \\ 7 & -1 & 5 \end{bmatrix} \qquad (1.16)$$

［問］ 次の 2 つの行列の和と差を求めよ。

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & 5 \\ 2 & 7 & -6 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 9 & -7 \\ 8 & 3 & -2 \\ 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

［問］ 次の 3 つの行列の和を求めよ。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

E. 行列の定数倍

行列に定数を掛けるには以下のようにする。

$$3\times\begin{bmatrix}1 & 4\\2 & 5\\3 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 12\\6 & 15\\9 & 18\end{bmatrix} \tag{1.17}$$

つまり行列の要素をすべて3倍している。3倍とは同じものを3個加えることであることに注意せよ。

（注）行列式の定数倍（後出，29頁）とは違うので注意せよ。

【例】 **表1.1**と**表1.2**に昭和50年と昭和51年の東京都の1世帯平均（世帯人員別）家計簿を示す。表の数字の部分のみをそれぞれ $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ という行列とする。

$0.5\times(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$ は2年間の家計の平均を示す。また $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}$ は昨年の家計が1年前に対してどれだけ増したかを示す。

表 1.1　世帯員数別年平均1世帯について1ヵ月当りの用途別生計支出
昭和50年（東京都）

人数 / 費用	都平均	2　人	3　人	4　人	5　人	6人以上
食料費	58,168	43,455	51,671	60,293	66,384	77,976
住居費	32,218	29,600	37,873	37,171	17,050	21,073
光熱水費	7,329	5,719	6,656	7,271	8,240	11,063
被服費	19,537	14,841	18,553	21,166	20,149	20,682
雑費	84,494	73,647	78,488	85,395	97,652	91,085
その他実支出	14,164	23,701	24,019	24,002	24,190	26,460

表 1.2　世帯人員数別年平均1世帯について1ヵ月当りの用途別生計支出
昭和51年（東京都）

人数 / 費用	都平均	2　人	3　人	4　人	5　人	6人以上
食料費	61,257	45,769	53,254	64,471	72,913	81,060
住居費	32,200	24,847	26,965	44,685	22,153	14,743
光熱水費	8,213	5,769	7,315	8,342	10,378	11,433
被服費	21,055	16,773	19,158	22,758	24,287	19,352
雑費	96,107	75,709	86,870	100,898	118,500	93,776
その他実支出	32,046	27,624	29,961	33,928	36,723	26,801

［問］ 実社会の統計表などで，行列としての和や差が具体的に意味をもつ例を探せ。

F．行列と行列の乗算

行列同士の掛算を実例で示す。

【例】 2つの行列の積は次に示すように行う。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -3 & -6 \\ -4 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & -38 \\ -47 & -92 \end{bmatrix} \qquad (1.18)$$

（×の記号は省略することもある）。

これは次のような計算に基づいている。

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & -2 & -5 \\ & & & -3 & -6 \\ & & & -4 & -7 \\ \hline 1 & 2 & 3 & -20^{\text{イ)}} & -38^{\text{ロ)}} \\ 4 & 5 & 6 & -47^{\text{ハ)}} & -92^{\text{ニ)}} \end{array}$$

イ） $1\times(-2)+2\times(-3)+3\times(-4)=-20$

ロ） $1\times(-5)+2\times(-6)+3\times(-7)=-38$

ハ） $4\times(-2)+5\times(-3)+6\times(-4)=-47$

ニ） $4\times(-5)+5\times(-6)+6\times(-7)=-92$

［問］ 以下のように2つのベクトルがある。

$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b}=[4 \quad 5 \quad 6]$$

このとき行列の積のルールで $\boldsymbol{ab}$ と $\boldsymbol{ba}$ を計算してみよ。

（答）

$$\boldsymbol{ab}=\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{ba}=32 \qquad (1.19)$$

（注1） 1×1 の行列は実数である。$\boldsymbol{ba}$ はベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積にもなっている。

（注2） 行列の間では，左から掛けるのと右から掛けるのとでは一般に違う結果を与える。

［問］ 以下の2つの掛算を行え。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

【例】 **表1.3，表1.4** は商品 a，b，c が4つの倉庫 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ に在庫している状況と，1個1個の商品の価格と重量を示す。