Ф. Д. ЛИВШИЦ

# СЧЕТНАЯ ЛИНЕЙКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ

ГОССТАТИЗДАТ
1954

Ф. Д. ЛИВШИЦ

# СЧЕТНАЯ ЛИНЕЙКА
## ДЛЯ
# ЭКОНОМИСТОВ

*Пособие для работников статистики, учета и планирования*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ СТАТИСТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
Москва 1954

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая работа предназначается широкому кругу экономистов: статистикам, плановикам, работникам учета, калькуляторам, аналитикам хозяйственной деятельности, а также учащимся экономических техникумов и вузов.

Принято думать, что счетная линейка пригодна только при технических вычислениях, призвана быть вычислительным орудием только в руках инженера и техника. Между тем линейка может найти широчайшее применение при экономических вычислениях. Однако экономисты до сих пор мало пользуются линейкой.

Многие статистические вычисления и плановые расчеты производятся особенно удобно именно на линейке — и притом быстрее, чем на счетах, по таблицам или на вычислительных машинах. Однако экономисты часто недостаточно знакомы с огромными вычислительными возможностями линейки и поэтому недооценивают ее.

Распространено мнение, что счетная линейка недостаточно точна для экономических вычислений. Между тем для значительнейшей части этих вычислений степень точности ответов на линейке практически вполне достаточна. Однако это мало известно экономистам и потому они «не доверяют» линейке.

Всем этим и обусловлены задачи и содержание предлагаемого пособия.

В главе I выясняются важные преимущества счетной линейки, излагаются принципы ее устройства и выясняется степень возможной точности вычислений на линейке. В главах II и V поясняются принципы и описывается техника математических действий на линейке. В главах III, IV и VI систематически излагается применение линейки в важнейших областях экономических вычислений.

Одновременно шесть глав нашего пособия образуют три последовательные части: вводную (глава I); первый концентр — экономические вычисления, требующие только четырех арифметических действий (главы II—IV); второй концентр — более сложные экономические вычисления, для которых необходимы квадратные и кубические степени и корни и логарифмы (главы V и VI).

Автор стремился избегать рецептурно-догматического изложения приемов вычислений на линейке, добиваясь пусть несколько более медленного овладения ими, зато более глубокого и прочного понимания читателем каждого вычислительного шага на линейке. Невозможно снабдить экономиста, особенно статистика, рецептами на все случаи вычислений, какие встречаются на практике, — необходимо развить в нем понимание того, как «уложить на линейке» то или иное, иногда довольно сложное, вычисление.

Вопрос о степени точности вычислений на линейке сохраняется в поле зрения читателя на протяжении всего пособия. Элементарное теоретическое изложение вопроса дано в § 4. Однако наглядное числовое сопоставление результатов часто более убедительно, чем теоретические доводы. Поэтому наряду с приближенными ответами, получаемыми на линейке, автор в большинстве случаев приводит вполне точные (там, где они возможны) или более точные ответы, которые могли бы быть получены иным путем — на бумаге, на конторских счетах, при помощи таблиц или на вычислительных машинах. Автор надеется, что в результате изучения этого пособия читатель убедится в том, что степень точности, достигаемая на линейке (разумеется, достигаемая опытным вычислителем), практически вполне достаточна для значительнейшего большинства экономических вычислений.

Тем самым будет устранено главное предубеждение и преодолено главное препятствие к широкому внедрению линейки в практику экономических вычислений, — и замечательнейший вычислительный прибор, созданный математической мыслью, по праву станет постоянным спутником повседневной работы советских экономистов.

*Автор*

*ГЛАВА I*

# УСТРОЙСТВО ЛИНЕЙКИ

## § 1. ПРЕИМУЩЕСТВА И НЕДОСТАТКИ СЧЕТНОЙ ЛИНЕЙКИ

Логарифмическая счетная линейка, называемая короче *логарифмическая линейка, счетная линейка, линейка,* — полезнейший вычислительный прибор, который занимает выдающееся место среди современных средств вычисления.

Основу этого прибора составляют несколько сопряженных логарифмических шкал — неподвижных и подвижных, — чем и объясняется его наименование[1].

Познакомимся с важными преимуществами счетной линейки и отметим ее недостатки в сравнении с другими средствами вычислений.

### 1. Виды вычислений, возможных на линейке

При помощи счетной линейки можно производить до полутора десятка различных видов вычислений, а именно:

1) умножение (например: $24{,}6 \cdot 1{,}328 \approx 32{,}7$);
2) деление (например: $276{,}9 : 328{,}1 \approx 0{,}843$);
3) возведение в квадрат (например: $6{,}52^2 \approx 42{,}5$);
4) извлечение квадратного корня (например: $\sqrt{762{,}1} \approx 27{,}6$);
5) возведение в куб (например: $1{,}273^3 \approx 2{,}06$);
6) извлечение кубического корня (например: $\sqrt[3]{2697{,}3} \approx$ $\approx 13{,}92$);
7) вычисление обратных чисел (например: $\frac{1}{846} = 0{,}001182$);
8) получение синусов (например: $\sin 49°12' \approx 0{,}757$);
9) получение тангенсов (например: $\operatorname{tg} 14°28' \approx 0{,}258$);
10) логарифмирование чисел (например: $\lg 37{,}41 \approx 1{,}573$);
11) потенцирование, т. е. получение чисел по их логарифмам (например: если $\lg N = 0{,}425$, то $N = 2{,}66$);

[1] О шкалах линейки будет подробно сказано далее, на стр. 20—21, 23—27 и др.

12) решение квадратных уравнений;

13) решение кубических уравнений,

а также некоторые другие, более специальные, вычисления.

Понятно, что при помощи линейки можно производить и целые сочетания названных вычислений. Например, если заданы числа $a, b, c, d$, то можно вычислить на линейке не только одночлены

$$ab;\ cd;\ ac;\ a^2;\ b^3;\ \sqrt{c};\ \sqrt[3]{d};\ \frac{a}{d};\ \frac{b}{c};\ \frac{1}{a}$$

и т. п., но и более сложные одночленные выражения, как

$$abc;\ abcd;\ \frac{ab}{cd};\ \frac{a^2 b}{c^2};\ \frac{ad^3}{c^2 b};\ \frac{b\sqrt{a}}{c^2};\ \sqrt{\frac{ab}{c}};\ \sqrt[3]{\frac{c}{bd}}$$

и т. п.

Таким образом, линейка — почти универсальный вычислительный прибор, на котором недоступны только действия первого порядка — сложение и вычитание; в случае необходимости, эти действия производят вне линейки (см. далее п. 4).

## 2. Простота устройства и удобство пользования

Все виды вычислений на линейке предельно механизированы. Линейка освобождает вычислителя от счета в уме и требует от него крайне незначительного напряжения — при установке исходных чисел, прочтении ответа и определении места запятой в ответе. Выполнение самих действий сводится к механическому передвижению подвижных частей линейки — ее *движка* (средней, подвижной части линейки) и *бегунка* (аллюминиевой рамки, свободно скрепленной с линейкой). Число таких передвижений бывает крайне невелико — обычно в пределах полудесятка.

Поэтому умение вычислять на линейке (особенно умение производить на ней два главных действия — умножение и деление) достигается быстро и легко. Хотя техника любого вычисления на линейке основана на свойствах логарифмов, но эту технику может усвоить — правда, усвоить чисто механически — любой вычислитель, даже не знакомый ни с сущностью и свойствами логарифмов, ни с правилами логарифмирования. Однако существенное преимущество вычислителя, знакомого с логарифмами, — в том, что он работает на счетной линейке не чисто механически, а сознательно.

Хотя линейка представляет собой, в сущности, миниатюрный «счетный агрегат», пользование ею практически необычайно удобно.

Линейка обычного типа имеет небольшие размеры: длину — около 28 *см*, ширину—4 *см*, толщину—1,2 *см*. Поэтому она весьма портативна, и вычислитель может всегда иметь ее при себе. Работа на линейке не требует физических усилий и совершенно бесшумна, чем выгодно отличается от работы на вычислительных машинах (например, на арифмометре). В сравнении с вычислительными машинами она очень дешева, не выбывает из строя из-за порчи механизмов и не требует запасных частей.

### 3. Быстрота вычислений

Огромное преимущество счетной линейки — необыкновенная быстрота, с которой возможны вычисления на ней. У достаточно опытного вычислителя на линейке время, затрачиваемое на умножение или деление одного числа на другое, исчисляется несколькими секундами, а такие действия, как возведение в квадрат или в куб, извлечение квадратного или кубического корня, отыскание логарифма числа или числа по логарифму, — производятся почти мгновенно.

Это становится возможным (как будет подробно пояснено в дальнейшем) благодаря удачному сопряжению отдельных шкал линейки. Так, если на линейке навести *волосок* (тонкую темную нить в бегунке), на число 2,5 шкалы *Н* (второй снизу—см. рис. 1),

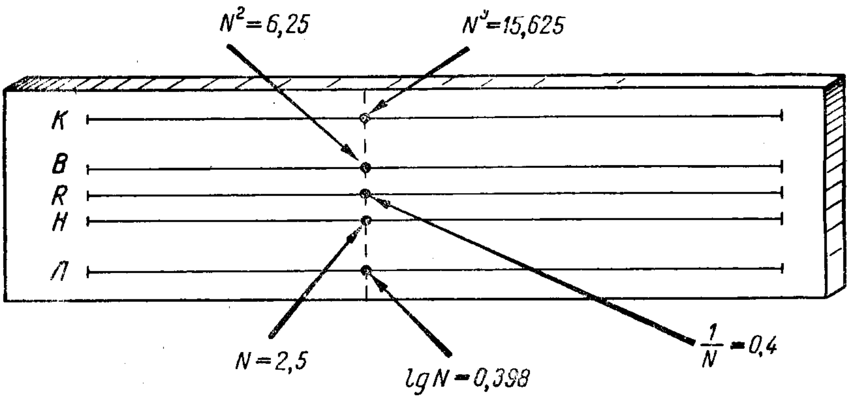


Рис. 1.

Отложив на линейке число (2,5), мы можем одновременно прочитать его квадрат (6,25), куб (15,625), мантиссу его логарифма (0,398) и обратное число (0,4).

то одновременно на расположенной выше шкале В волосок отметит квадрат этого числа, т. е. 6,25, на крайней верхней шкале К — куб этого числа, т. е. 15,625, на крайней нижней шкале Л — мантиссу логарифма этого числа — 398 тысячных, а на обратной шкале R — обратное число 0,4. Следовательно, одной установкой волоска мы, в сущности, производим на линейке сразу и мгновенно четыре вычисления: возведение в квадрат, возведение в куб, получение логарифма и обратного числа. Вот почему длительность таких вычислений на линейке, как:

$$17{,}34^2 \cdot 0{,}563; \quad \frac{8{,}93^2}{15{,}05^2}; \quad \frac{\sqrt[3]{175{,}6}}{\sqrt{27{,}59}},$$

исчисляется буквально секундами.

Понятно, что такая быстрота совершенно недостижима ни при каком ином способе вычисления — ни на счетах, ни по таблицам, ни с помощью вычислительных машин.

## 4. Недостатки линейки

Наряду с огромными преимуществами счетной линейки, поясненными в пп. 1—3, необходимо указать на два недостатка линейки как вычислительного прибора, суживающие возможности ее применения.

Прежде всего, на линейке нельзя производить действия первого порядка — сложение и вычитание. Поэтому, если в повседневной практике вычислителя эти действия встречаются достаточно часто, он должен всегда иметь под рукой, кроме линейки, еще и конторские счеты. Если же, по самому характеру вычислений, сложение и вычитание могут встретиться крайне редко, слагаемые и вычитаемые не особенно многозначны, а число их в каждом действии не очень велико, — можно, в общем ходе вычислений, производить сложение и вычитание в уме или на бумаге.

Так, при вычислении выражения

$$1{,}28\sqrt{15{,}04 + 4{,}38^2}$$

можно поступить следующим образом:

а) вычислить на линейке $4{,}38^2 \approx 19{,}18$;

б) сложить в уме $15{,}04 + 19{,}18 = 34{,}22$;

в) извлечь на линейке квадратный корень $\sqrt{34{,}22} \approx 5{,}85$;

г) найденный результат умножить на линейке на 1,28 и получить искомый ответ: $5{,}85 \cdot 1{,}28 \approx 7{,}49$.

Гораздо более существен другой недостаток счетной линейки. Устанавливать на ней исходные числа и прочитывать получаемые результаты вычислений можно лишь с ограниченной степенью точности. Как мы увидим далее (см. § 3), на линейке обычного размера (25 *см*) можно устанавливать лишь 3—4 первые значащие цифры числа (3 цифры — в правой, 4 цифры — в левой части линейки) и получать результаты только с такой же степенью точности. Так, например, произвести на линейке совершенно точно умножение

$$41,6 \cdot 13,42 = 558,272$$

или

$$56,43 \cdot 27,169 = 1\,533,14667$$

невозможно. При первом умножении оба сомножителя возможно установить вполне точно — как 41,6 и 13,42, однако результат можно прочитать лишь приближенно — как *558* целых единиц. При втором умножении придется уже и самые сомножители установить приближенно — как 56,4 и 27,2 и лишь приближенно прочитать результат—как *1 534* целых единиц. С подобным же обстоятельством мы встречаемся и при иных вычислениях на линейке.

Вследствие этого у большинства вычислителей-экономистов возникло мнение, что естественное предназначение линейки — *обслуживать только область технических вычислений, где вполне* допустимы приближенные расчеты, и будто она не пригодна для планово-экономических расчетов и учетно-статистических вычислений. Такое мнение необосновано и глубоко ошибочно. В § 4 и во всем дальнейшем изложении мы убедимся, что для значительнейшей части хозяйственных вычислений, производимых экономистом, плановиком, статистиком, аналитиком, степень точности, достигаемая на линейке, практически вполне достаточна. Мы увидим также, что есть возможность значительно повышать степень точности линейки, — например, получать не 3—4 надежные цифры ответа, а 4—5 таких цифр. Для этого достаточно увеличить вдвое длину шкал обычной линейки (с 25 *см* до 50 *см*), что и достигается применением так называемых *прецизионных* линеек, т. е. линеек с разрезными шкалами[1].

## Выводы

*На основании* сказанного мы можем сделать следующие выводы о применении счетной линейки к экономическим вычислениям.

1. За исключением сложения и вычитания, остальные шесть алгебраических действий могут быть механизированы при помощи линейки.

2. Счетная линейка фактически заменяет целый набор вычислительных таблиц (трехзначных, а частично — и четырехзначных): таблиц умножения, деления, возведения в квадрат и в куб, квадратных и кубических корней, таблиц обратных чисел, логарифмов и антилогарифмов, синусов и тангенсов.

3. Техника работы на линейке несложна, сама работа на ней неутомительна, вычисления на ней производятся быстрее, чем при помощи конторских счетов, вычислительных таблиц и машин.

[1] Конструкция таких линеек и приемы вычисления на них (незначительно измененные по сравнению с приемами на обычных линейках) описываются в специальных пособиях. — См., например: М. М. Фивейская, Логарифмические линейки с разрезными шкалами. Прецизионные линейки. ОНТИ. М.—Л. 1935.

4. Только по степени точности ответов линейка уступает другим средствам вычислений; однако и достигаемая на ней степень точности (3—4 цифры числа) практически достаточна для значительнейшей части экономических вычислений.

5. Поэтому счетную линейку можно применять в подавляющем большинстве случаев экономических вычислений, в первую очередь:

при процентных вычислениях любого вида;

при вычислениях с пропорциональными величинами (прямая и обратная пропорциональность, пропорциональное деление и т. д.);

при вычислении скорости оборота средств, скидок и накидок;

при статистических вычислениях (простые и взвешенные средние, любые относительные величины, меры вариации, базисные и цепные индивидуальные индексы, агрегатные индексы, уровни динамики, темпы роста и прироста, расчеты, касающиеся выборки, и т. д.);

при плановых прикидках и расчетах (сметные расчеты, нормативы оборотных средств, индексы плановых заданий, индексы выполнения плана, планирование средних темпов роста и прироста, плановые уровни и т. д.);

при анализе хозяйственной деятельности;

при калькуляционных вычислениях, не требующих особенно высокой точности.

## § 2. ПРИНЦИПЫ УСТРОЙСТВА ЛИНЕЙКИ

### 1. Равномерная шкала

Взяв отрезок прямой $AB$ длиной в 10 *см* (см. рис. 2), последовательно отложим от его начала $A$, принятого за нуль, десять отрезков $(A-1)$, $(A-2)$, $(A-3)$, ... $(A-10)$, соответственно равных 1 *см*, 2 *см*, 3 *см*, ... 10 *см*. Эти отрезки графически выражают, в определенном масштабе, первые десять натуральных чисел 1, 2, 3, ... 10. В некотором условном смысле эти же числа выражаются и точками 1, 2, 3, ...10, которыми заканчиваются отложенные отрезки. Так, например, можно сказать, что точка 4, находящаяся в 4 *см* от начала $A$ (от нуля), графически «выражает» число 4.

Разделим каждое из десяти сантиметровых делений $(A-1)$, $(1-2)$, $(2-3)$, ... $(9-10)$ на десять равных миллиметровых делений и обозначим границы этих новых мелких делений точками. Теперь на протяжении отрезка $AB = 10$ *см* окажутся сто точек (не считая нулевой точки $A$), а от точки $A$ (от нуля) окажутся отложенными сто отрезков длиной в 0,1 *см*, 0,2 *см*, 0,3 *см*, ... 10 *см*. Новые отрезки и соответствующие им конечные точки будут графически выражать сто чисел:

$$0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3;\ \dots\ 9{,}9;\ 10.$$

Мысленно продолжая дробление делений отрезка $AB$, мы можем получить тысячу, десять тысяч, сто тысяч, миллион и т. д. отрезков и столько же соответствующих им конечных точек, которые будут графически выражать то или иное число. В пределе мы можем представить себе бесконечное количество отрезков и точек, которые графически выразят бесконечное количество всевозможных чисел, какие только могут встретиться на интервале от 0 до 10. Обратно, для любого из этих чисел можно найти на прямой $AB$ отрезок и точку, которые графически выразят данное число.

Линию (прямую или кривую), которая вычерчена так, что каждая ее точка и соответствующий этой точке отрезок строго определенным образом выражают определенное число, называют *функциональной шкáлой*, короче *шкáлой*. На рис. 2 изображена простейшая из функциональных шкал — именно, *прямолинейная равномерная шкала* (называемая также *натуральной*). Как легко

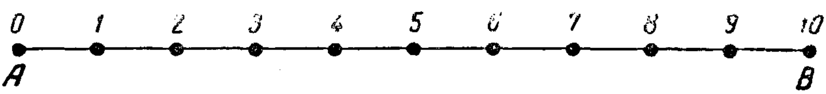


Рис. 2.
Прямолинейная равномерная шкала.

понять, равномерной ее называют потому, что равным нарастаниям чисел (например: 1, 2, 3, 4, ... ) в ней соответствуют равные нарастания отрезков, графически выражающих эти числа (в нашем случае: 1 *см*, 2 *см*, 3 *см*, 4 *см*, ... ); иначе говоря, точки, выражающие эти числа на шкале, равноотстоят одна от другой.

Длину отрезка, графически выражающего одну единицу числа, называют *модулем* шкалы и обычно обозначают буквой $M$[1]. В равномерной шкале, изображенной на рис. 2, каждой единице любого числа соответствует *1 см;* следовательно, модуль этой шкалы равен *1 см* ($M=1$ *см*).

## 2. Графическое сложение и вычитание

Имея две тождественные (во всем совершенно одинаковые) равномерные шкалы I и II, мы можем с их помощью производить графически действия сложения и вычитания. Схема этих действий показана на рис. 3.

Закрепим нижнюю шкалу I, сделав ее неподвижной; подвижную верхнюю шкалу II будем по мере надобности передвигать вдоль шкалы I. Графически сложить числа 2 и 5 — значит: к отрезку прямой, выражающему число 2, присоединить отрезок, выражающий число 5, и при помощи модуля (графической единицы измерения) измерить новый полученный отрезок.

[1] Модуль — буквально: мера, единица измерения.

Все это можно очень просто и быстро выполнить при помощи наших двух шкал: установим начало 0 шкалы II против числа 2 шкалы I, тогда против второго слагаемого 5 на шкале II мы прочитаем на нижней шкале I искомую сумму 7. Фактически мы произвели таким образом графическое сложение отрезка (0 — 2) длиной 2 *см* на шкале I с отрезком (0 — 5) длиной 5 *см* на шкале II и получили общий отрезок (0 — 7) длиной 7 *см* на шкале I.

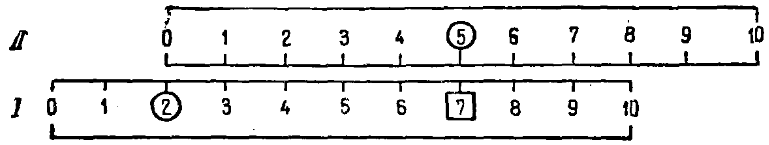


Рис. 3.
Равномерные шкалы. Графическое сложение и вычитание.
$2+5=7;$
$7-5=2.$

Нетрудно сообразить, как производится **графическое вычитание**, — например, вычитание 7—5 = 2: его путь обратен пути сложения. Против уменьшаемого 7 на неподвижной шкале I устанавливаем вычитаемое 5 на подвижной шкале II, тогда против начала 0 этой шкалы на нижней шкале I окажется разность 2. Фактически мы из отрезка (0 — 7) длиной 7 *см* на нижней шкале I вычли отрезок (0 — 5) длиной 5 *см* на верхней шкале II и получили разность в виде отрезка (0 — 2) длиной в 2 *см* на нижней шкале I.

Если бы пришлось складывать или вычитать не целые, а дробные числа, для которых соответственные точки на наших двух шкалах не помечены, то пришлось бы устанавливать исходные числа (слагаемые, уменьшаемые, вычитаемые) глазомерно, «на-глаз», **между пометками** для целых чисел, и точно так же «на-глаз» прочитывать получаемые дробные результаты (суммы, разности).

**Упражнения.** Изготовив из плотной белой бумаги две тождественные шкалы, подобные шкалам на рис. 3 (с модулем $M = 1$ *см*), произведите с их помощью следующие вычисления:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1) 2+3 | 4) 2,5 +6 | 7) 3 +5,75 | 10) 8 —3 | 13) 6 —2,75 |
| 2) 4+2 | 5) 3,5 +4,5 | 8) 1,75+4,5 | 11) 9,5—6 | 14) 7,5 —2,5 |
| 3) 3+1,5 | 6) 2,75+4 | 9) 5,5 +3,75 | 12) 7 —4,5 | 15) 9,75—4,25 |

### 3. Графическое умножение и деление

Естественно, возникает немаловажный вопрос: можно ли построить такие шкалы, при помощи которых были бы возможны **графическое умножение и деление**? — Такие шкалы возможны, и мы попытаемся сами построить их. Однако такие шкалы уже не будут равномерными.

Для того, чтобы при помощи двух шкал I и II можно было производить умножение, например:

$$\begin{array}{l} \text{(I) (II) (I)} \\ 2\cdot 1 = 2 \\ 2\cdot 2 = 4 \\ 2\cdot 3 = 6 \\ 2\cdot 4 = 8 \\ 2\cdot 5 = 10 \end{array}$$

и так далее,

необходимо, чтобы после установки начала подвижной шкалы II над множимым 2, взятым на неподвижной шкале I (см. рис. 4), оказалось бы следующее взаимное расположение чисел на этих шкалах:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| против | множителя | 1 | на | шкале | II— | произведение | 2 | на | шкале | I |
| » | » | 2 | » | » | » | » | 4 | » | » | » |
| » | » | 3 | » | » | » | » | 6 | » | » | » |
| » | » | 4 | » | » | » | » | 8 | » | » | » |
| » | » | 5 | » | » | » | » | 10 | » | » | » |

и т. д. Такие шкалы и представлены на рис. 4.

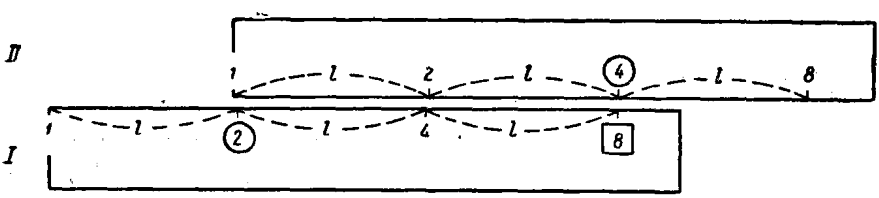


Рис. 4.

Неравномерные шкалы. Графическое умножение и деление.

$2\cdot 1 = 2;\ 2\cdot 2 = 4;\ 2\cdot 4 = 8;$

$2:1 = 2;\ 4:2 = 2;\ 8:4 = 2.$

Расстояния между числами (точками) 1 и 2, 2 и 4, 4 и 8 — равны.

Внимательно вглядевшись в эти тождественные шкалы, мы замечаем следующее:

а) обе они начинаются с числа (точки) 1, а не с нуля (продумайте сами, почему они не могут начинаться с нуля?);

б) расстояния между числами (точками) 1 и 2, между 2 и 4, между 4 и 8 — одинаковы;

в) следовательно, обе шкалы неравномерны: действительно, в равномерной шкале (сравн. рис. 2) число 2 не могло бы находиться точно посредине между числами 1 и 4, число 4 — точно посредине между числами 2 и 8, и т. д.;

г) построить две неравномерные шкалы для умножения на 2 крайне легко: последовательно откладывая от начала каждой шкалы один и тот же отрезок $l$ (произвольной длины), помечаем начало шкалы числом 1, а следующие точки — последовательно удваиваемыми числами — 2, 4, 8 и т. д.

Графическое умножение на таких шкалах производится точно так же, как графическое сложение на равномерных шкалах, а графическое деление — точно так же, как графическое вычитание на равномерных шкалах. Так, для умножения $2 \cdot 4 = 8$ (см. рис. 4) устанавливаем начало 1 подвижной шкалы II против множимого 2 на неподвижной шкале I, после чего под множителем 4 шкалы II читаем искомое произведение 8 на шкале I. Та же установка шкал дает возможность произвести, но только обратным путем, деление числа 8 (на шкале I) на число 4 (на шкале II) и получить частное 2 (на шкале I).

На шкалах I и II рис. 4 мы проставили только по четыре числа первого десятка — именно: 1, 2, 4 и 8. В каких же точках следует проставить остальные шесть недостающих чисел — 3, 5, 6, 7, 9 и 10? Так как шкалы неравномерны, то число 3 не может стать точно посредине между числами 2 и 4, числа 5, 6 и 7 не могут стать на одинаковых расстояниях между числами 4 и 8, и т. д. В действительности, все десять точек-чисел должны расположиться так, как это показано в шкалах на рис. 5; однако, чтобы точно нанести их, необходимо выяснить закон их расположения на шкале.

## 4. Логарифмическая шкала

Докажем, что неравномерная шкала для умножения и деления должна быть *логарифмической шкалой.*

Как известно, десятичным логарифмом данного числа называют показатель степени, в которую надо возвести число 10, чтобы получить данное число.

Введем следующие обозначения, которыми будем пользоваться в дальнейшем изложении. Будем обозначать числа прописными буквами:

$$N_1;\ N_2;\ N_3;\ \ldots,$$

а их десятичные логарифмы — строчными буквами:

$$n_1;\ n_2;\ n_3;\ \ldots$$

Таким образом,

$$n_1 = \lg N_1;\ n_2 = \lg N_2;\ n_3 = \lg N_3;\ \ldots,$$

и обратно:

$$N_1 = 10^{n_1};\quad N_2 = 10^{n_2};\quad N_3 = 10^{n_3};\ \ldots$$

Следовательно, в то время как числа $N$ изменяются (например, возрастают) в интервалах:

$$(1 - 10);\ (10 - 100);\ (100 - 1\,000) \text{ и т. д.,}$$

их логарифмы изменяются (возрастают) в интервалах:

$$(0 - 1);\ (1 - 2);\ (2 - 3) \text{ и т. д.}$$

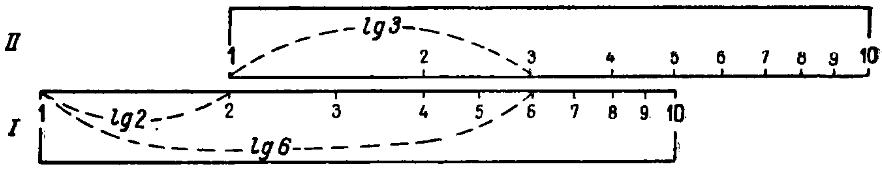


Рис. 5.
Логарифмические шкалы.
$\lg 2 + \lg 3 = \lg 6$, т. е. $2 \cdot 3 = 6$;
$\lg 6 - \lg 3 = \lg 2$, т. е. $6 : 3 = 2$.

Известно, что логарифм произведения равен сумме логарифмов сомножителей, а логарифм частного — разности логарифмов делимого и делителя:

$$\lg N_1 N_2 = \lg N_1 + \lg N_2 = n_1 + n_2;$$

$$\lg \frac{N_1}{N_2} = \lg N_1 - \lg N_2 = n_1 - n_2.$$

Возьмем теперь две шкалы I и II (см. рис. 5) и начнем откладывать от их начальных точек, в одном и том же масштабе, не натуральные числа

$$N = 1;\ 2;\ 3;\ \ldots\ 10,$$

а их десятичные логарифмы $\lg N$, или $n$:

$$0;\ 0{,}301;\ 0{,}477;\ \ldots\ 1,$$

помечая, однако, конец каждого отложенного логарифмического отрезка соответствующим ему *числом* $N$, т. е. 1, 2, 3, ... 10. В результате такой операции числа $N = 1, 2, 3, \ldots 10$ окажутся отложенными на шкалах I и II не в свою натуральную величину, а *в логарифмическом масштабе*, т. е. в виде своих логарифмов $n$. Шкалы, подобные I и II, являются *логарифмическими шкалами*: каждая точка на такой шкале выражает определенное число, но расстояние (отрезок) от начала шкалы 1 до этой точки $N$ равно логарифму этого числа, т. е. равно $\lg N = n$.

Нетрудно понять, что именно при помощи логарифмических шкал умножение и деление самих чисел $N$ можно свести к графическому сложению и вычитанию отрезков, выражающих логарифмы этих чисел, т. е. величины $n$. Так, умножение чисел:

$$2 \cdot 3 = 6$$

может быть сведено к графическому сложению логарифмов:

$$\lg 2 + \lg 3 = \lg 6,$$

которое и показано на рис. 5. Взяв на шкале I отрезок (1 — 2), равный lg2, графически прибавляем к нему отрезок (1 — 3) шкалы II, равный lg3; сумма этих отрезков может быть прочитана на шкале I как отрезок (1—6), т. е. как lg6. За графическим сложением логарифмических отрезков $\lg 2 + \lg 3 = \lg 6$ скрывается фактическое умножение самих чисел, т. е. $2 \cdot 3 = 6$. Самое правило такого умножения на логарифмических шкалах может быть практически выражено так: к числу *2* (множимому) на шкале I подводим начало шкалы II и против числа *3* (множителя) на шкале II читаем на шкале I произведение — число *6*.

Теперь нетрудно понять и ход обратного действия — деления — на логарифмических шкалах, например, деления $6:3=2$ (см. рис. 5). К делимому *6*, взятому на шкале I, подводим делитель 3,

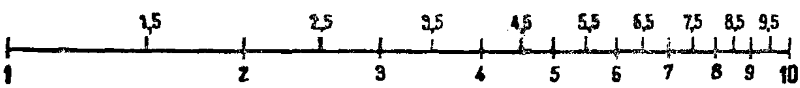


Рис. 6.
Логарифмическая шкала с делениями по 0,5.

взятый на шкале II, и против начала этой шкалы читаем на шкале I частное *2*. Деление самих чисел $6:3=2$ оказалось сведенным к графическому вычитанию логарифмических отрезков:

$$\lg 6 - \lg 3 = \lg 2.$$

### 5. Особенности логарифмической шкалы

По сравнению с равномерной (натуральной) шкалой, логарифмическая шкала обладает рядом существенных особенностей.

1. Деления равномерной шкалы одинаковы по своей длине (см. рис. 7,а). Деления логарифмической шкалы неодинаковы (см. рис. 7,б) и при этом становятся все меньше по мере отдаления от начала шкалы вправо (см. рис. 7, б и в). Эта особенность логарифмической шкалы непосредственно вытекает из неравномерного, постепенно замедляющегося, нарастания логарифмов последовательных чисел 1, 2, 3 ... 10, 11, 12 ...