АКАДЕМИЯ НАУК СССР

А. А. ЗИНОВЬЕВ

ФИЛОСОФСКИЕ ПРОБЛЕМЫ МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ

МОСКВА · 1960

А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р

Институт философ

А. А. ЗИНОВЬЕВ

ФИЛОСОФСКИЕ ПРОБЛЕМЫ МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
Москва · 1960

ОТВЕТСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР
доктор философских наук
П. В. Таванец

ПРЕДИСЛОВИЕ

В связи с возникновением и развитием многозначной логики был поставлен ряд интересных философских проблем, обсуждение которых пока еще находится в начальной стадии. Ниже мы рассмотрим группу проблем такого рода, не претендуя на исчерпывающую полноту их охвата и безусловную категоричность предлагаемого их решения. Философские проблемы многозначной логики принадлежат к числу трудных философских проблем, достаточно полное и убедительное решение их может быть достигнуто лишь в результате широкой дискуссии в кругах логиков и философов, занимающихся философскими вопросами современной науки.

Изложение будет построено следующим образом. В первой главе даны краткие замечания о двухзначной логике и о системе записи. Во второй главе будут рассмотрены условия возникновения первых многозначных логических систем и особенности этих систем. Это полезно сделать хотя бы уже потому, что в нашей философской и логической литературе характеристика их почти полностью отсутствует. Однако предварительная характеристика многозначных систем будет иметь не только и даже не столько информационную цель. По мере изложения ее мы будем стремиться к тому, чтобы подвести читателя к некоторым философским обобщениям.

Вплоть до шестой главы речь будет идти исключительно об исчислении высказываний. Если в пятой главе (и частично в четвертой) будет говориться о структуре высказываний, то это само по себе еще ни в какой мере не затрагивает исчисления предикатов, для которого характерно расчленение простых высказываний на предикаты и (если воспользоваться термином традиционной логики) субъекты, а также использование кванторов общности и существования. На исчислении предикатов мы кратко остановимся в шестой главе. Это объясняется тем, что необходимо разобраться в философских вопросах многозначных исчислений высказываний, прежде чем браться за исчисления предикатов (не говоря уже о том, что рассматриваемые в данной работе философские вопросы являются для них общими).

В ходе разбора различных логических систем мы, разумеется, будем брать лишь их основы, отдельные фрагменты, отдельные выводы или свойства.

В целом ряде случаев нам придется касаться общих философских вопросов логики. Однако рассуждения подобного рода мы постараемся свести до необходимого минимума и сосредоточим основное внимание на том, что специфически относится к многозначной логике.

Данная работа рассчитана на широкий круг философов и логиков, интересующихся философской и логической проблематикой современной науки. Поэтому чисто специальные вопросы многозначной логики (например, доказательства непротиворечивости, полноты и т. д. систем аксиом) будут либо опущены совсем, либо изложены упрощенно, в качестве иллюстрации общих идей и методов логики.

Глава первая

Предварительные замечания

§ 1. Двухзначная логика

Читателя, не знакомого с двухзначной логикой, отсылаем к многочисленным работам, имеющимся на русском языке, в частности—к [7], [14], [21]. Правда, само понятие «двухзначная (классическая, аристотелевская, хризиппова) логика» не является однозначным. В пятой главе мы это разъясним. Пока же под двухзначной логикой будем иметь в виду логические системы, в которых высказываниям приписывается одно и только одно из двух возможных значений истинности (истинностных значений, логических значений), обозначаемых обычно терминами «истинно» и «ложно» или соответствующими им знаками 1 и 0, 1 и 2, v и f и т. п.

Другими словами, под двухзначной логикой будем иметь в виду логические теории, исходящие из следующего предположения: множество высказываний разбивается на два непересекающихся подмножества, исчерпывающие множество высказываний; одно из этих подмножеств соответствует множеству истинных высказываний, второе — ложных; ни одно истинное высказывание при этом не является ложным, ни одно ложное — истинным [41].

В качестве формального выражения двухзначной логики будем брать классическое исчисление высказываний, понимаемое не только как фрагмент классической логики в целом, но и как экспликация общих законов логики, в особенности — законов исключенного третьего и противоречия. Причина выделения этих законов, надо думать, понятна: дискуссия вокруг них составляет ядро дискуссии как по вопросу об отношении формальной логики вообще и неформальной логики (диалектической в нашей литературе), так и по вопросу об отношении классической и неклассической логики в рамках логики формальной.

Будем пользоваться так называемой польской системой записи, которая нам представляется наиболее удобной с самых различных точек зрения. Простые (рассматриваемые в целом, без расчленения на составные части) переменные высказывания будем обозначать малыми буквами латинского алфавита, а операторы, превращающие их в новые высказывания (например, знак отрицания) и связывающие их в сложные высказывания (вообще говоря, функции высказываний), будем обозначать большими буквами латинского алфавита. Чтобы не усложнять изложение, различие между функциями истинности и функциями высказываний (как это сделано, например, в работе [60]) проводить не будем: поскольку смысл высказываний безразличен для определения типов функций высказываний, последние можно рассматривать и как функции истинности. Основные функции исчисления высказываний, с которыми нам в дальнейшем постоянно придется иметь дело, в польской записи имеют следующий вид:

Nx — отрицание (не-x)
Kxy — конъюнкция (x и y)
Axy — нестрогая дизъюнкция (x или y)
Cxy — материальная импликация (если x, то y)
Rxy — равнозначность.

При чтении сложных символов следует придерживаться следующих правил:

1) знак N относится только к одному ближайшему справа от него высказыванию;

2) прочие операторы K, A, C и т. д. относятся к двум и только двум ближайшим высказываниям справа от них. Например, в выражении $KNRxAxNyz$ второй по порядку написания оператор N относится только к y, A соединяет x и Ny, R соединяет x и $AxNy$, первое отрицание относится к $RxAxNy$, оператор K соединяет $NRxAxNy$ и z. Расставив для наглядности скобки, получим $K\{N[Rx(Ax\{Ny\})]\}z$.

Основные законы (тавтологии, всегда истинные высказывания) имеют следующий вид:

Rxx — закон тождества

$RNNxx$ — закон двойного отрицания
$AxNx$ — закон исключенного третьего
$NKxNx$ — закон противоречия
$RNKxyANxNy$ — правило де Моргана
$RNAxyKNxNy$ — правило де Моргана
$RKxAyzAKxyKxz$ — первый дистрибутивный закон
$RAxKyzKAxyAxz$ — второй дистрибутивный закон
$RCNxyCNyx$ — правило контрапозиции
$RRxyKCxyCyx$ — разложение равнозначности
$RCxyANxy$ — разложение импликации
$CCxNxNx$ — приведение к абсурду.

Нет необходимости излагать подробнее, поскольку это достаточно хорошо изложено, например, в [7]. Там же характеризованы и различия в способах построения исчисления.

Определим еще строгую дизъюнкцию, с которой нам точно так же придется сталкиваться. Ее можно определить через нестрогую таким образом: $Bxy = KAxyANxNy$, поскольку тавтологией является $RBxyKAxyANxNy$. Строгая дизъюнкция двух или более высказываний истинна тогда и только тогда, когда истинно только одно из этих высказываний, а остальные все ложны. Поскольку в польской записи строгая дизъюнкция трех и более высказываний принимает громоздкий вид (в силу того, что для нее не имеет силы ассоциативный закон, то есть неравнозначными будут высказывания $BBxyz$, $BBxzy$ и т. д.), будем писать ее в форме $xByB...Bz$. Например, для трех высказываний вместо $AAKKxNyNzKKNxyNz$ $KKNxNyz$ будем иметь запись $xByBz$, которая читается так: «либо x, либо y, либо z». В некоторых случаях для наглядности таким же образом будем записывать конъюнкцию и нестрогую дизъюнкцию.

Закон исключенного третьего, если быть верным традиционной логике (и если отвлечься от структуры высказывания), должен иметь вид $BxNx$. Но поскольку имеет место $RBxNxAxNx$, то есть строгая дизъюнкция высказывания и его отрицания равнозначна их нестрогой дизъюнкции, в качестве закона исключенного третьего принимается $AxNx$. Этот закон, как и закон противоречия, можно рассматривать как своего рода уточнение законов традиционной логики: «либо x, либо не-x» и «не может быть, чтобы было x и не-x».

Способ определения основных функций двухзначной логики и доказательства ее законов охарактеризуем в следующем параграфе.

§ 2. Способ определения функций

Для определения функций высказываний (функций истинности) помимо табличной записи, к которой будем прибегать в исключительных случаях, будем пользоваться равенствами типа $a = b$ и $a = \alpha$, где знак равенства означает соответственно следующее:

1) значение истинности высказывания a равно (является таким же, тождественно) значению истинности высказывания b; это равенство может иметь место в силу определения или в силу доказанного, что в каждом случае будем оговаривать (во всяком случае, из контекста будет ясно, что имеется в виду);

2) значение истинности высказывания a равно α, где α есть какое-либо число или вообще знак значения истинности, а также алгебраическая сумма значений истинности; в частности, α может быть числом 1, 2,..., суммой значений истинности высказываний b и c, разностью значений истинности высказываний b и c и т. д.; например, $a = n - b + c$ будет означать: значение истинности высказывания a равно n минус значение истинности высказывания b и плюс значение истинности высказывания c.

Вообще-то говоря, здесь следовало бы употреблять дополнительные знаки, чтобы показать, что речь идет не о приравнивании, сложении и вычитании высказываний, а об этих операциях с их значениями. Но это очень усложнило бы запись. И раз мы условились относительно употребления знаков равенства, сложения и вычитания, прибегать к этой усложненной форме нет необходимости. Будем пользоваться также знаками неравенства (больше и меньше) и на тех же основаниях, что и знаком равенства.

Знак равенства (как и неравенства, сложения и вычитания) не есть знак функции истинности. Это — знак языка, посредством которого мы описываем функции истинности и их взаимоотношения. Поскольку мы, естественно, пользуемся языком двухзначной логики, то в классическом исчислении высказываний этому знаку соответствует знак R. Так что иногда для наглядности знак равнозначности будем заменять знаком равенства, что к путанице не приведет. Например, приведенные в первом параграфе законы, содержащие знак R, можно записать в форме $NNx = x$, $Cxy = ANxy$, $NKxy = ANxNy$. Аналогично для прочих законов. В трех и более значной логике, однако, такого рода замена не всегда допустима, и строгое различение знаков строящегося исчисления и знаков используемого при этом языка является совершенно необходимым.

Приведенные в первом параграфе функции двухзначной логики в принятой форме записи определятся так, если истинности будет соответствовать число 1, а ложности — число 0:

$Kxy = min\,(x, y)$, то есть значение истинности Kxy равно меньшему из значений истинности x и y;

$Axy = max\,(x, y)$, то есть значение истинности Axy равно большему из значений истинности x и y;

$Cxy = max\,(Nx, y)$; в другой форме $Cxy = 1$, если $x \leqslant y$, $Cxy = 0$, если $x > y$;

$Nx = 1 - x$; в другой форме $Nx = 1$, если $x = 0$, $Nx = 0$, если $x = 1$.

$Bxy = 1$, если $x > y$ или $y > x$, $Bxy = 0$, если $x = y$; $Bxy = min\,[max\,(x, y),\ max\,(1 - x,\ 1 - y)]$;

$Rxy = 1$, если $x = y$; $Rxy = 0$, если $x > y$ или $y > x$.

Помимо экономичности сравнительно с табличной формой записи, эта форма записи удобна и как средство доказательства утверждений. Приведем несколько примеров. Для доказательства равнозначности высказываний $NKxy$ и $ANxNy$ потребовалось бы строить целый ряд таблиц, тогда как в данной форме достаточно следующего рассуждения: $NKxy = ANxNy$, $1 - min\,(x, y) = max\,(1 - x,\ 1 - y)$, $max\,(1 - x,\ 1 - y) + min\,(x, y) = 1$, что верно для всех комбинаций значений x и y. Аналогично имеем: $NNx = 1 - Nx = 1 - 1 + x = x$, $NKxNx = 1 - KxNx = 1 - min\,(x,\ 1 - x) = 1$, поскольку одно из x и $1 - x$ равно нулю; $CCxNxNx = max\,(NCxNx,\ Nx) = max\,(1 - CxNx, 1 - x) = max\,[1 - max\,(Nx, Nx), 1 - x] = max\,(1 - Nx, 1 - x) = max\,(1 - 1 + x,\ 1 - x) = max\,(x,\ 1 - x) = 1$, поскольку одно из x и $1 - x$ равно единице.

Надо сказать, что форма определений функций будет меняться в зависимости от выбора способа обозначения значений истинности. Так, если истинность обозначим через 1, а ложность — через 2, то получим такие определения: $Nx = 3 - x$, $Kxy = max(x, y)$, $Axy = min(x, y)$, $Cxy = min(3 - x, y)$. Однако это не влияет на законы логики (например, и в этой записи $NNx = 3 - Nx = 3 - 3 + x = x$ и т. п.). Кроме того, всегда можно установить соответствие различных способов обозначения, так что их различие принципиального значения не имеет: законы логики есть нечто инвариантное для них.

Глава вторая

Первоначальные многозначные системы

§ 1. Понятие многозначной логики

С того момента, когда в логике был провозглашен принцип: «каждое высказывание либо истинно, либо ложно», всегда находились люди, подвергавшие этот принцип сомнению [60]. Эти сомнения имели вполне здравый и реальный смысл. В частности, в рамках приведенного только что принципа возникали затруднения при оценке значения истинности высказываний о будущих событиях, высказываний, в которых не указано время или место событий, высказываний, получаемых при условии взаимоисключающих опытов, и т. п. Аналогичные трудности возникали при попытках строить модальную логику. На эти факты указывается в работах [48], [40], [54], [60] и многих других. Но поскольку сомнения такого рода не реализовались в форме целостных логических систем, они имели ценность исторических фактов, но не более. Требовалось создание определенных условий внутри самой логики, чтобы они смогли сыграть роль стимулов к построению многозначных логических систем.

Условимся прежде всего, что мы будем понимать под многозначной логикой. Многозначная логика есть прежде всего совокупность логических исчислений (исчислений высказываний и предикатов), в которых высказываниям может приписываться более двух истинностных значений, а в общем случае — любое конечное или счетное бесконечное множество значений, так что традиционные «истинно» и «ложно» оказываются лишь частными случаями таких значений. Естественно, потребовалось накопление опыта построения логических исчислений в рамках классической логики, прежде чем обобщить его на случай трех и более истинностных значений. Другими словами, потребовалась разработка современной методики логического исследования (матричный метод, аксиоматический метод, способность полностью отвлекаться от содержательного смысла употребляемых знаков, то есть способность чисто формального подхода к логической задаче, и т. п.), чтобы отважиться посягнуть на освященное веками всевластие классической логики. Не случайным поэтому является то обстоятельство, что многозначная логика начала свое существование и развитие сравнительно недавно, а именно — начиная с двадцатых годов нашего столетия. Основателями ее являются Лукасевич (1920 г.) и Пост (1921 г.), а также отчасти Броуэр (1924 г.), заложивший идейную базу для логики интуиционизма (работы Гейтинга).

Многозначная логика как отрасль научного исследования не сводится, естественно, к совокупности исчислений. Она охватывает и общие проблемы построения и обоснования исчислений, их взаимоотношений, их отношений к двухзначной логике и т. д., — короче говоря, охватывает теоретические исследования, предметом которых являются сами многозначные исчисления.

Договоренность относительно смысла самого термина «многозначная логика» очень важна. В дальнейшем мы увидим, что аксиоматики классического исчисления высказываний могут интерпретироваться в многозначных матрицах, многие функции многозначных логик будут определяться аналогично двухзначным, многозначные аксиоматики будут удовлетворять двухзначным матрицам и т. д. Все это делает грань между классической и неклассической логикой совершенно неопределенной, если упустить из виду главное, а именно — число возможных значений истинности высказываний или число различных множеств, на которые разбивается множество всех высказываний.

§ 2. Система Лукасевича

Исторически первой многозначной логической системой (исчисление высказываний) является система, построенная Лукасевичем [50, 51, 52, 53]. Исходя из анализа модальных высказываний, Лукасевич пришел к выводу, что двухзначная логика недостаточна для описания взаимоотношения и свойств этих высказываний, что здесь нужна логика, в которой помимо классических истинностных значений *«истинно»* и *«ложно»* фигурирует третье значение «возможно», «нейтрально» (среднее, нейтральное значение). При этом следует иметь в виду, что «возможно» не есть модальный функтор, входящий в структуру высказывания. Это — оценка высказывания по отношению его к действительности, лежащая вне самого высказывания, не входящая в структуру его, подобно тому, как оценка высказываний терминами «истинно» и «ложно» не входит в структуру оцениваемых высказываний. Конечно, сами термины «истинно», «ложно» и «возможно» могут быть предикатами *высказываний типа «высказывание* x истинно (ложно, возможно)», но это не меняет сути дела: если x есть какое-то высказывание, то оценка его *этими* терминами есть образование нового высказывания, в котором название высказывания x является лишь субъектом.

Трактуя многозначность как деление множества высказываний не на два, а на три и более непересекающихся подмножества (деление предполагается исчерпывающим), в системе Лукасевича мы имеем три класса высказываний [41], [65]: 1) истинные, 2) ложные и 3) нейтральные, так что относительно каждого высказывания будет иметь силу принцип: «высказывание либо истинно, либо ложно, *либо нейтрально».*

О том, что двухзначная логика недостаточна для описания модальных высказываний, говорит хотя бы такой факт. Конъюнкция высказываний «возможно, что x» и «возможно, что не-x» (здесь «возможно» есть модальный функтор, знак модальности) в двухзначной логике должна считаться ложной, если их рассматривать по аналогии с утверждением и отрицанием, тогда как даже с чисто содержательной точки зрения ее правомерность не вызывает сомнений: некоторое событие, фиксируемое высказыванием x, *может быть (случиться)* и *может* не быть.

В работах Лукасевича недостаточность двухзначной логики для описания модальных высказываний показана следующим образом. Примем обозначения:

1) Mx — возможно, что x,

2) NMx — невозможно, что x,

3) MNx — возможно, что не-x,

4) $NMNx$ — невозможно, что не-x (необходимо, что x), где после слова «что» излагается содержание x.

К модальным высказываниям относятся высказывания, характеризующиеся следующими утверждениями:

1) $CNMxNx$ — если невозможно, что x, то не-x,

2) $CNxNMx$ — если не-x, то невозможно, что x,

3) $\Sigma xKMxMNx$ — существует x, для которого возможно, что x, и возможно, что не-x.

Лукасевич доказал, что в рамках двухзначной логики мы, учитывая эти утверждения, придем к противоречию. В частности, выводятся утверждения $CMxx$ и $CMNxNx$ (если возможно, что x, то x; если возможно, что не-x, то не-x); если же одновременно истинными будут Mx и MNx, то значит будут истинными одновременно x и Nx. что противоречиво; последний вывод делается на основе *modus ponens*

$$\frac{\begin{matrix} CMxx \\ Mx \end{matrix}}{x} \qquad \frac{\begin{matrix} CMNxNx \\ MNx \end{matrix}}{Nx},$$

а согласно третьему утверждению конъюнкция этих заключений для некоторых x правомерна.

Аналогично — в табличном построении. В двухзначной логике возможны четыре одноаргументные функции x:

x	U^1_x	U^2_x	U^3_x	U^4_x
1	0	1	0	1
0	0	0	1	1

Mx должна быть тождественна одной из них. Но утверждения 1—3 исключают это. Первое имеет место (истинно) только в случае, если $Mx = x$ или $Mx = U^4x$, второе — в случае, если $Mx = x$ или $Mx = U^1x$, третье — в случае, если $Mx = U^4x$. Третье утверждение верифицируется на основе положения $\Pi x\alpha(x) = K\alpha(0)\alpha(1)$, где Π — квантор общности, а α— какая-то функция. Согласно этому положению третье утверждение равнозначно $KM0M1$, поскольку $\Sigma xKMxMNx = N\Pi xNKMxMNx$, что возможно лишь в случае, если $M0 = M1 = 1$.

Проверка показывает, таким образом, что первое и второе утверждения истинны, если $Mx = x$, первое и третье — если $Mx = U^4x$, второе и третье несовместимы. Таким образом, нет функции для Mx, которая удовлетворяла бы утверждениям 1—3. Каким образом проблема решается в многозначной логике, покажем в пятой главе.

Подчеркиваем, что, говоря о недостаточности классической логики, в данном случае мы имеем в виду недостаточность ее лишь с определенной точки зрения, а не вообще; классическая логика не удовлетворяет как модель модальных высказываний. По мнению некоторых авторов, теория модальных высказываний может быть развита и в рамках классической логики (с известными ограничениями, конечно).

Ниже мы еще приведем иллюстрацию использования трехзначной логики для описания модальных высказываний. Здесь же заметим, что потребность описать взаимоотношения модальных высказываний в работах Лукасевича является исторически преходящим фактом. Существенным же является само доказательство возможности неклассической системы логики. Огромное значение этого последнего обстоятельства трудно переоценить, — по значению некоторые его сравнивают с открытием неэвклидовой геометрии [48].

Система Лукасевича строится так. Значения истинности обозначаются знаками 1 (истинно), 0 (ложно) и $^1/_2$ (третье значение). Отрицание Nx высказывания x и импликация Cxy высказывания x и y определяются соответственно матрицами

x	Nx
1	0
0	1
$^1/_2$	$^1/_2$

$x \backslash y$	1	0	$^1/_2$
1	1	0	$^1/_2$
0	1	1	1
$^1/_2$	1	$^1/_2$	1

Дизъюнкция Axy и конъюнкция Kxy могут быть определены через импликацию: $Axy = CCxyy$, $Kxy = NCCNxNyNy$ или $Kxy = NANxNy$ (здесь знаки N, A, K и C обозначают, разумеется, трехзначные функции; при соответствующих определениях и оговорках их будем использовать в логике с любым числом значений истинности). Однако дизъюнкцию и конъюнкцию можно определить матрицами соответственно

$x \backslash y$	1	0	$^1/_2$
1	1	1	1
0	1	0	$^1/_2$
$^1/_2$	1	$^1/_2$	$^1/_2$

$x \backslash y$	1	0	$^1/_2$
1	1	0	$^1/_2$
0	0	0	0
$^1/_2$	$^1/_2$	0	$^1/_2$

В таком случае приведенные выше их линейные определения будут выступать как утверждения о равнозначности высказываний, проверяемые матрицами.

В форме равенств рассмотренные функции запишутся так:

1) $Nx = 1 - x$

2) $Cxy = 1$, если $x \leqslant y$; $Cxy = 1 - x + y$, если $x > y$; $Cxy = min(1,\ 1 - x + y)$

3) $Axy = max(x, y)$

4) $Kxy = min(x, y)$.

Здесь обнаруживается еще одно удобство этой формы записи: в ней легко осуществить обобщение на любое конечное или счетное бесконечное множество значений, как это и сделал Лукасевич. Например, рассматривая значения истинности как действительные числа от 0 до 1, мы получим следующие отношения: если $x = {}^3/_7$, то $Nx = 1 - {}^3/_7 = {}^4/_7$; если $x = {}^3/_7$ и $y = {}^2/_7$, то $Cxy = min(1,\ 1 - {}^3/_7 + {}^2/_7) = min(1,\ {}^6/_7) = {}^6/_7$.

Поскольку конъюнкция и дизъюнкция определяются с помощью импликации и отрицания, система Лукасевича (Лукасевича — Тарского, точнее, поскольку Тарский аксиоматизировал ее) известна как система $N - C$, то есть как система с основными операторами N и C (с основными функциями Nx и Cxy). Если за истинные значения принять целые положительные числа от 1 до n, то определения N и C посредством равенств значений будут по форме выглядеть несколько иначе, что не меняет сути дела: как говорилось в первой главе, законы логики не зависят от формы записи.