

Georg S. Greschner

Maxwellgleichungen

Das elektromagnetische Feld
in Physik und Chemie

Band 3: Mathematische Hilfsmittel

$$\nabla^2 U =$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi^1} & \frac{\partial}{\partial \xi^2} & \frac{\partial}{\partial \xi^3} & 0 \\ g_{11} & g_{12} & g_{13} & \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial U}{\partial \xi^1} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial U}{\partial \xi^2} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial U}{\partial \xi^3} \end{vmatrix}$$

Hüthig & Wepf

G. S. Greschner

Maxwellgleichungen

Das elektromagnetische Feld
in Physik und Chemie

Band 3: Angewandte Mathematik

Vektor- und Tensoralgebra

Differentialgeometrie

Vektoranalysis

Matrizenkalkül

Deltafunktional

Integralgleichungen

Hüthig & Wepf Verlag Basel · Heidelberg · New York

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Greschner, Georg S.:

Maxwellgleichungen: d. elektromagnet. Feld in
Physik u. Chemie/G. S. Greschner. – Heidelberg:
Hüthig und Wepf

ISBN 3-7785-0619-6

Bd. 3. Angewandte Mathematik. – 1981.

ISBN 3-7785-0615-3

© 1981 Hüthig & Wepf Verlag Basel: Heidelberg
Printed in Germany

Georg S. Greschner · Maxwellgleichungen
Das elektromagnetische Feld in Physik und Chemie

Dem Andenken meiner Eltern gewidmet.

V o r w o r t

Das vorliegende Buch, das eine Einführung mittleren Umfangs in die Vektor- und Matrizenrechnung darstellt, wurde zur mathematischen Unterstützung des vom Autor abgefaßten, den MAXWELL-Gleichungen und der Theorie der Lichtstreuung an Molekülen gewidmeten Lehrbuches geschrieben. Zwar gibt es unter den deutschen mathematischen Lehrtexten sowohl im Bereich der Vektorrechnung als auch auf dem Gebiet des Matrizenkalküls hervorragende Werke - zum Beispiel die beiden Lehrbücher LAGALLY "Vektoren" und ZURMOHL "Matrizen". Trotzdem schien es dem Autor lohnend, diese Thematik unter anderen Gesichtspunkten in kompakter Form neu darzustellen, um den Sachverhalt insbesondere naturwissenschaftlich orientierten Lesern leichter zugänglich zu machen. Aus diesem Grunde sind auch fast alle Anwendungsbeispiele der mathematischen Theorie aus dem Bereich der Physik gewählt.

Beim Schreiben des Textes ging der Verfasser davon aus, daß es grundfalsch wäre, die Darstellung eines mathematischen Stoffes davon abhängig zu machen, ob er für Mathematiker oder für Nichtmathematiker geschrieben wird. Man kann allenfalls bei der Gliederung des Stoffes in Axiome, Definitionen, Sätze und Beweise eine weniger straffe Form wählen.

Der Stoff ist in sieben Kapitel gegliedert. Im ersten Kapitel werden die Grundbegriffe der Vektor- und Tensoralgebra eingeführt und untersucht. Das zweite und das dritte Kapitel befassen sich mit dem Begriff des Linienelements und des Flächenelements in krummlinigen Koordinaten. Sie stellen somit eine Basis für das Rechnen mit Kurvenintegralen und mit Oberflächenintegralen dar.

Die in diesen drei Kapiteln entwickelte Theorie wird im vierten Kapitel angewendet, das der Vektoranalysis gewidmet ist und sich auf die Sätze von GAUSS und STOKES stützt. Dementsprechend werden hier auch die drei Operatoren grad, div und rot einheitlich mit Hilfe von Flüssen eingeführt, anschließend in kartesischen Koordinaten ausgedrückt und später auf beliebige krummlinige Koordinaten transformiert.

Das fünfte Kapitel stellt eine Einführung in den Matrizenkalkül und in die Theorie der Jacobiane dar. Da manche Untersuchungen der Physik, der Chemie und der Technik zu der oft recht schwierigen Aufgabe der numerischen Auflösung einer FREDHOLM-schen Integralgleichung erster Art führen, wurde diesem Kapitel ein Abschnitt beigelegt, der auf die Problematik schlecht konditionierter linearer Gleichungssysteme eingeht.

und mit der Lichtstreuung durch Beugung (LSB) an makroskopisch isotropen Teilchen.

Unter der Annahme von nunmehr dynamischen elastischen Stößen der Photonen des Primärlichtes mit einem fluktuierenden Molekülsystem werden die wichtigsten Streufunktionen der IELS berechnet, ausgehend von den MAXWELL-schen Gleichungen, dem DOPPLER-Effekt und der WIENER-schen Theorie der Zeitreihen. Am Schluß dieser auf PECORA zurückgehenden Theorie der LS wird der Zusammenhang der IELS mit der FGLS festgestellt und kurz der Einfluß der Polymolekularität auf die Streukurven der IELS analysiert.

Im letzten Abschnitt des Buches wird die Lichtstreuung durch Beugung von elektromagnetischen Wellen an großen Teilchen beliebiger Form untersucht und der wichtige Fall der LSB, die MIE-Streuung an leitenden Kugeln, mit Hilfe einer speziellen GREEN-Funktion ausführlich behandelt. Anschließend wird kurz die LSB an Zylindern und an Rotationsellipsoiden untersucht. Der mathematische Apparat wird im Falle der IELS und der LSB etwas detaillierter dargestellt, um auch weniger geübten Lesern die Aufarbeitung des etwas komplizierteren Stoffes zu erleichtern.

Alle in diesem Buch vorkommenden Gleichungen stützen sich auf das sehr vorteilhafte SI-System, wie es von der Conférence Générale des Poids et Mesures 1960 empfohlen wurde. Nur wird hier als chemische Grundeinheit nicht die SI-Größe mol verwendet, sondern die Größe kmol ($1 \text{ kmol CO}_2 = 44 \text{ kg CO}_2$, während $1 \text{ mol CO}_2 = 44 \text{ g CO}_2$ ist); demzufolge ist hier die LOSCHMIDT-sche Zahl $N_L = 6,023 \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1}$ zu setzen.

Zur mathematischen Unterstützung des physikalischen Stoffes wurde vom Verfasser ein mathematisches Lehrbuch geschrieben¹, das u.a. auch den benötigten Formalismus der Differentialgeometrie und der Funktionalanalysis enthält.

Für kritisches Durchlesen des Manuskriptes und für einige Diskussionen, die zum gegenwärtigen Stand des Buches beigetragen haben, ist der Verfasser den Herren Dr. O. Bodmann und Prof. Dr. B. A. Wolf, Institut f. Physikalische Chemie der Universität Mainz, sehr dankbar. Mein Dank gebührt auch Herrn Dr. J. Raczek aus dem gleichen Institut für die eingehende Diskussion einiger Teile der Theorie der IELS. Meinen besonderen Dank möchte ich dem HOTHIG-Verlag aussprechen, nicht nur für die Ausstattung des Buches, sondern auch für die in jeder Hinsicht angenehme Zusammenarbeit.

Mainz / Zermatt, im Frühling 1981

Georg S. Greschner

Feldtheorie

von Gerhard Wunsch

Diese Darstellung der Theorie elektromagnetischer Felder dürfte in ihrer Ausführlichkeit und Vollständigkeit in der gesamten modernen Lehrbuchliteratur kaum ihresgleichen finden. Das zweibändige Werk ist aus Vorlesungen über die Maxwellsche Theorie des elektromagnetischen Feldes entstanden, die der Autor vor Studenten der Grundstudienrichtung Elektroingenieurwesen hält.

Band 1: Mathematische Grundlagen

2., bearb. Aufl. 1974, 200 S., 61 Abb., geb., DM 34, –

ISBN 3-7785-0303-0

Vertriebsgebiet: BRD u. Westberlin

Inhaltsübersicht

Felder und Feldintegrale: Vektorfelder • Feldintegrale

Theorie der Felder: Differentialoperatoren und Integralsätze I • Differentialoperatoren und Integralsätze II

Elektromagnetische Felder: Allgemeine Grundeigenschaften • Wirbelfreie Felder • Wirbelfelder

Band 2: Elektromagnetische Felder

1976, 178 S., 129 Abb., geb., DM 32, –

ISBN 3-7785-0247-6

Vertriebsgebiet: BRD u. Westberlin

Inhaltsübersicht

Elektrostatik: Felder ohne Randbedingungen (Newton-Potentiale) • Felder mit konstanten Randbedingungen • Harmonische Potentiale • Ebene Felder • Felder bei nichtleitenden Grenzflächen • Kapazität, Energie und Kraft

Wirbelfelder: Feldpotentiale • Elektromagnetische Potentiale

Stationäre Felder: Strömungsfelder • Stationäre Magnetfelder • Induktivität, Energie und Kraft

Nichtstationäre Felder: Quasistationäre Felder • Wellenfelder

Dr. Alfred Hüthig Verlag • Postfach 102869 • 6900 Heidelberg 1

Matrizen und Determinanten in elektronischen Schaltungen

von Horst Rühl

1977, 284 S., 73 Abb., 7 Tab., Kunststoffeinband, DM 28,50
ISBN 3-7785-0402-9

Die mathematischen Grundlagen der Matrizenrechnung werden so abgehandelt, wie sie innerhalb der Elektrotechnik und speziell der Elektronik benötigt werden. Die mathematischen Grundlagen werden präzise erklärt, wobei die Probleme der Transformationen, Eigenwertprobleme und Matrizenfunktionen über die Grundvorlesungen hinaus berücksichtigt werden. Bei den elektrotechnischen Anwendungen wurden ausschließlich passive und aktive Netzwerke der Elektronik bevorzugt. Da die mathematischen Zusammenhänge durch viele Beispiele dargestellt sind, kann das Taschenbuch auch jederzeit zum Nachschlagen verwendet werden, was besonders für bereits in der Praxis stehende Ingenieure interessant ist. Für das Verständnis des Buches genügt der Stoff der mathematischen und elektrotechnischen Grundvorlesungen einer Fachhochschule bzw. einer technischen Hochschule.

Zweipole und Vierpole in elektronischen Schaltungen

von Horst Rühl

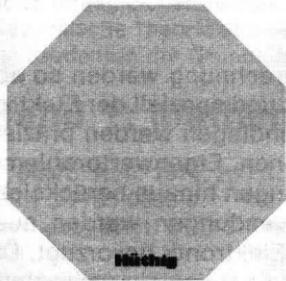
1975, 272 S., 110 Abb., 3 Bildtaf., 5 Tab., Kunststoffeinband, DM 21,80
ISBN 3-7785-0337-5

Die Theorie der Netzwerke ist die Grundlage jedes Studiums an Technischen Hochschulen und Fachhochschulen. Der Autor führt in die mathematischen Grundlagen der Netzwerktheorie ein, indem er die Darstellung mit vielen Beispielen auf anwendungsbezogene Studiengänge ausrichtet. Neben der Definition der wichtigsten Netzwerkgrößen wird die umfassende mathematische Darstellungsmöglichkeit der Zusammenhänge durch die Matrizenrechnung erläutert.

D. Braun · H. Cherdron · W. Kern

Praktikum der makromolekularen organischen Chemie

3. überarbeitete und erweiterte Auflage



Praktikum der makromolekularen organischen Chemie

**von Prof. Dr. Dietrich Braun,
Prof. Dr. Harald Cherdron
und Prof. Dr. Werner Kern**

3., überarb. und erw. Aufl. 1979, 333 S.,
35 Abb., geb., DM 68,50
ISBN 3-7785-0539-4

An einer Reihe von Universitäten werden bereits Polymer-Praktika für Chemiker angeboten. Trotzdem erfahren viele Chemiker während ihres Studiums noch immer sehr wenig über dieses Gebiet und haben vor allem keine Gelegenheit, sich durch eigene Versuche mit den experimentellen Methoden der makromolekularen Chemie vertraut zu machen. Hier soll das „Praktikum der makromolekularen organischen Chemie“ helfen. Ausführliche Beschreibungen der allgemeinen Arbeitsmethoden zur Darstellung und Untersuchung von Polymeren, ergänzt durch über 100 gut ausgearbeitete Versuchsvorschriften mit ausreichenden theoretischen Erläuterungen ermöglichen es, Synthese, Reaktionen und Eigenschaften makromolekularer Stoffe kennenzulernen.

Inhaltsübersicht

Grundbegriffe der makromolekularen Chemie · Arbeitsmethoden der Polymerchemie · Theoretische und praktische Grundlagen der Synthesen von makromolekularen Stoffen durch Polymerisation, Polykondensation und Polyaddition · Chemische Umsetzungen mit makromolekularen Stoffen

Dr. Alfred Hüthig Verlag · Postfach 102869 · 6900 Heidelberg 1

Mathematik für Elektrotechniker

von Viktor Fetzer

Band 1: Grundlagen-Lehrbuch

2., durchges. und erw. Aufl. 1978, 246 S., 89 Abb., geb., DM 48, –
ISBN 3-7785-0504-1

Der Autor hat sich bemüht, nicht nur die Elementarmathematik, sondern auch Vektorrechnung, komplexe Zahlenrechnung, Determinanten und Analysis so darzustellen, daß sie auch für Elektrotechniker, die nur Fachschulen absolvieren, verständlich sind. Die immer komplexer werdende Schaltungstechnik erfordert heute unbedingt Kenntnisse der sog. „Höheren Mathematik“.

In dem überarbeiteten Band 1 wurde weitgehend der Einsatz von elektronischen Taschenrechnern berücksichtigt und daher der Abschnitt über das Rechenschieberrechnen herausgenommen. An Stelle dieses Abschnittes wurden weitere Gebiete der Arithmetik, die heute bei den Elektronikern wichtig geworden sind, behandelt.

Band 2: Formeln und Aufgabensammlung

1968, 324 S., 139 Abb., zahlr. Tab., geb., DM 48, –
ISBN 3-7785-0145-3

Ergänzungsband: Ausgewählte Kapitel aus der höheren Mathematik

1970, 141 S., 26 Abb., kart., DM 16,80
ISBN 3-7785-0146-1

Inhaltsübersicht

Differentialgleichungen • Matrizenrechnung • Grundlagen der mathematischen Statistik • Lösungen der Aufgaben

Dr. Alfred Hüthig Verlag • Postfach 102869 • 6900 Heidelberg 1

INHALTSVERZEICHNIS.

Seite:

VORWORT.

| | | |
|-------|---|-----|
| | KAPITEL 1. EINFÜHRUNG IN DIE VEKTORALGEBRA | 1 |
| §1. | Axiome der Vektorrechnung. Linearkombinationen von Vektoren ... | 1 |
| §2. | Das Skalar- und Vektorprodukt. Gemischte und tensorielle Produkte von Vektoren | 3 |
| §3. | Koordinatendarstellungen von Vektoren und Tensoren. Kovarianz und Kontravarianz | 11 |
| | KAPITEL 2. DAS LINIELEMENT IN KRÜMMLINIGEN KOORDINATEN | 24 |
| §4. | Geometrische und arithmetische Vektoren. Der Begriff der Metrik | 24 |
| §5. | Das Linielement in RIEMANN-schen Räumen | 27 |
| §6. | Geodätische Linien und CHRISTOFFEL-sche Symbole | 33 |
| | KAPITEL 3. DAS FLÄCHENELEMENT IN KRÜMMLINIGEN KOORDINATEN | 44 |
| §7. | GAUSS-Koordinaten einer Fläche | 44 |
| §8. | Die Flächennormale und die erste GAUSS-Form | 45 |
| | KAPITEL 4. EINFÜHRUNG IN DIE VEKTORANALYSIS | 53 |
| §9. | Klassifizierung von Feldern | 53 |
| §10. | Vektorfunktion einer Skalarvariablen. Die schwache Ableitung eines Vektors nach einem Skalar | 54 |
| §11. | Vektorfunktion eines Skalarfeldes | 56 |
| 11.1. | Der Gradient als lokaler Fluß. GAUSS-scher Satz | 57 |
| 11.2. | Der Begriff der Richtungsableitung | 60 |
| 11.3. | Der Satz von STOKES | 63 |
| 11.4. | Grundoperationen mit der Größe grad | 66 |
| §12. | Skalarfunktion eines Vektorfeldes | 76 |
| 12.1. | Die Divergenz als lokaler Fluß | 79 |
| 12.2. | Grundoperationen mit der Größe div | 80 |
| 12.3. | Die Sätze von GREEN | 81 |
| §13. | Vektorfunktion eines Vektorfeldes | 86 |
| 13.1. | Die Rotation als lokaler Fluß | 87 |
| 13.2. | Grundoperationen mit der Größe rot | 91 |
| 13.3. | Die vektorielle TAYLOR-Reihe | 93 |
| §14. | Die Operatoren grad , rot , div und ∇^2 in RIEMANN-schen Räumen | 105 |

| | | |
|-------|--|-----|
| 14.1. | Transformation von grad und rot | 105 |
| 14.2. | Die starke Ableitung eines Vektors nach einem Skalar. Das Lemma von RICCI | 107 |
| 14.3. | Übertragung in RIEMANN-schen Räumen | 109 |
| 14.4. | Transformation von div und ∇^2 | 112 |
| | KAPITEL 5. GRUNDLAGEN DER MATRIZENRECHNUNG | 121 |
| §15. | Der Begriff der Matrix | 121 |
| §16. | Grundoperationen mit Matrizen | 123 |
| §17. | HERMITE-sche Konjugation und Transposition von Matrizen | 128 |
| §18. | Der Begriff der Kehrmatrix | 130 |
| 18.1. | Klassifizierung von quadratischen Matrizen. Spur, Determinante und Rang | 130 |
| 18.2. | Die Grundeigenschaften von Determinanten | 134 |
| 18.3. | Die Inverse und ihre Eigenschaften | 137 |
| 18.4. | Berechnung der Inversen. Adjungierte Matrix | 140 |
| 18.5. | Der GAUSS-Algorithmus | 144 |
| 18.6. | Komplexe lineare Gleichungssysteme | 148 |
| 18.7. | Unitäre, orthogonale und involutorische Matrizen | 151 |
| §19. | Transformationen von Matrizen | 154 |
| §20. | Das Eigenwertproblem | 156 |
| 20.1. | Die charakteristische Matrix und ihre Determinante | 156 |
| 20.2. | Rang der charakteristischen Matrix | 159 |
| 20.3. | Potenzieren von Matrizen | 172 |
| 20.4. | Der RAYLEIGH-Quotient und seine Verwendung | 174 |
| 20.5. | Das Eigenwertproblem von komplexen Matrizen | 178 |
| §21. | Störungen linearer Gleichungssysteme | 183 |
| 21.1. | Beispiel eines schlecht konditionierten Gleichungssystems | 183 |
| 21.2. | Vektor- und Matrixnormen. Konditionszahlen | 187 |
| 21.3. | Anwendungsbeispiel | 196 |
| §22. | Funktionalmatrizen und Jacobiane | 207 |
| | KAPITEL 6. DAS DELTAFUNKTIONAL | 229 |
| §23. | Abbildungen von metrischen Räumen | 232 |
| §24. | Das stetige lineare Funktional | 242 |
| §25. | Das Deltafunktional | 247 |
| §26. | Eigenschaften des Deltafunktional | 250 |

| | |
|--|-----|
| §27. Das Deltafunktional und die GREEN-sche Funktion | 257 |
| §28. Das Deltafunktional in mehrdimensionalen Räumen | 258 |
| | |
| KAPITEL 7. FREDHOLM-SCHE INTEGRALGLEICHUNGEN ERSTER ART | 261 |
| §29. Kompakte Operatoren in HILBERT-Räumen | 262 |
| §30. FREDHOLM-sche Integralgleichungen 1. Art in HILBERT-Räumen | 266 |
| §31. Numerische Lösung von FREDHOLM-schen Integralgleichungen 1. Art | 271 |
| §32. Zwei Methoden zur numerischen Inversion der LAPLACE-Transformation .. | 289 |
| | |
| LITERATURVERZEICHNIS | 296 |
| SACHVERZEICHNIS | 297 |

KAPITEL 1. EINFÜHRUNG IN DIE VEKTORALGEBRA.

§1. AXIOME DER VEKTORRECHNUNG. LINEARKOMBINATION VON VEKTOREN.

Vom geometrischen Standpunkt aus gesehen, stellt ein Vektor eine gerichtete Größe dar, die durch eine mit einem Pfeil versehene Strecke abgebildet wird, welche im Angriffspunkt des Vektors fußt. Der Absolutbetrag dieser Größe wird durch die Länge der Strecke angegeben, während ihre Wirkungsrichtung durch den Pfeil angedeutet wird. Ein Nullvektor $\underline{0}$ hat eine verschwindende Länge und eine unbestimmte Richtung. Für jeden anderen Vektor läßt sich ein Quotient aus diesem Vektor und dessen Länge bilden, der die gleiche Richtung und die Länge Eins hat; er heißt Einheitsvektor der gegebenen Richtung und wird oft mit dem Buchstaben \underline{e}_ξ bezeichnet.

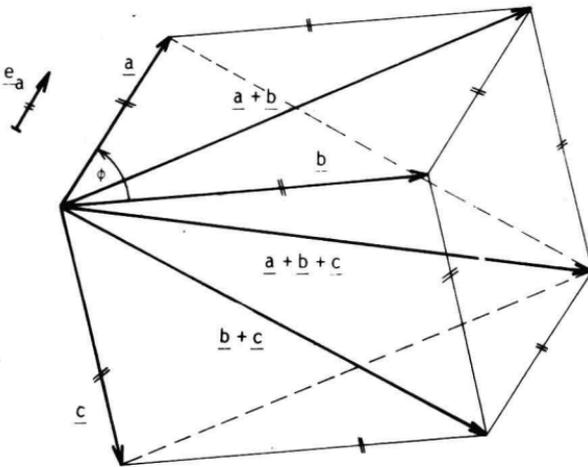
Es mögen drei beliebige Vektoren vorliegen, die wir mit unterstrichenen kleinen Buchstaben bezeichnen wollen:

$$\underline{a} = a \underline{e}_a$$

$$\underline{b} = b \underline{e}_b$$

$$\underline{c} = c \underline{e}_c .$$

Dann wird eine Vektorsumme $\underline{a} + \underline{b}$ mit den folgenden, axiomatisch eingeführten Eigenschaften definiert (vgl. FIG. A1):



$$\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$$

$$\underline{a} + \underline{0} = \underline{a}$$

(A1)

$$\underline{a} + (-\underline{a}) = \underline{0}$$

$$(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$$

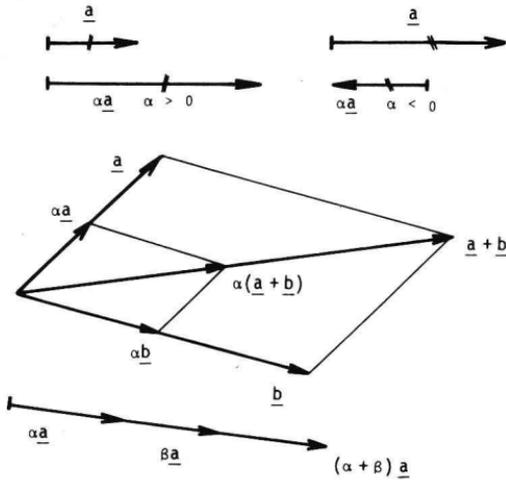
$$|\underline{a} + \underline{b}| \leq a + b$$

$$|\underline{a} - \underline{b}| \geq a - b$$

(Gleichheit für $\phi = 0$ in FIG. A1).

FIG. A1. Zu den Axiomen der Vektorsummation.

Eine Größe, die keine Richtung hat, heißt Skalar. Es seien zwei solche Skalare α und β gegeben. Dann wird eine Skalarmultiplikation eines Vektors $\alpha \underline{a}$ mit den folgenden, ebenfalls axiomatisch eingeführten Eigenschaften definiert (vgl. FIG. A2):



$$\alpha \underline{a} = \underline{a} \alpha$$

$$1 \underline{a} = \underline{a} \quad (A2)$$

$$(-1) \underline{a} = -\underline{a}$$

$$(\alpha + \beta) \underline{a} = \alpha \underline{a} + \beta \underline{a}$$

$$\alpha(\underline{a} + \underline{b}) = \alpha \underline{a} + \alpha \underline{b}$$

$$|\alpha \underline{a}| = |\alpha| |\underline{a}|$$

FIG. A2. Zu den Axiomen der Skalarmultiplikation eines Vektors.

Durch Zusammenfassung dieser beiden Begriffe wird eine Linearkombination von Vektoren eingeführt. Sind n Vektoren \underline{a}_i und n Skalare α_i gegeben, so versteht man unter der Linearkombination dieser Vektoren die n -gliedrige Vektorsumme

$$\underline{b} = \alpha_1 \underline{a}_1 + \alpha_2 \underline{a}_2 + \dots + \alpha_n \underline{a}_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{a}_i \quad (A3)$$

Man sagt, die Vektoren $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ sind linear unabhängig, wenn die folgende Äquivalenz gilt:

$$\underline{b} = \underline{0} \iff \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0 \quad (A4)$$

Nach den Axiomen (A1) und (A2) macht sich die lineare Unabhängigkeit der Vektoren dadurch bemerkbar, daß unter ihnen keine zwei vorkommen, die paral-

Teil sind, und keine drei, die in ein und derselben Ebene liegen. Ein System von n linear unabhängigen Vektoren mit dem gleichen Angriffspunkt bildet somit ein n -faches divergentes Vektorbündel.

§2. DAS SKALAR- UND VEKTORPRODUKT. GEMISCHTE UND TENSORIELLE PRODUKTE VON VEKTOREN

Wir führen nun drei verschiedene Grundprodukte von zwei Vektoren \underline{a} und \underline{b} ein. Das Produkt

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = ab \cos(\underline{a}, \underline{b}) \quad (A5)$$

heißt Skalarprodukt der Vektoren \underline{a} und \underline{b} . Denn die rechte Seite der Definition (A5) zeigt, daß es sich um einen Skalar handelt, der den Winkel der beiden Vektoren \underline{a} und \underline{b} , und im Falle $\underline{b} = \underline{a}$ die Länge eines der Vektoren angibt:

$$\cos(\underline{a}, \underline{b}) = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{ab} \quad a = \sqrt{\underline{a} \cdot \underline{a}} = |\underline{a}|. \quad (A6)$$

Dagegen stellt das Vektorprodukt

$$\underline{a} \times \underline{b} = ab \sin(\underline{a}, \underline{b}) \underline{e}_c \quad \underline{e}_c \perp \underline{a} \text{ und } \underline{e}_c \perp \underline{b} \quad (A7)$$

der Vektoren \underline{a} und \underline{b} einen Vektor dar, dessen Länge der Fläche des von den Vektoren \underline{a} und \underline{b} eingeschlossenen Parallelogramms gleich ist, und der auf dieser Fläche senkrecht steht; dabei bilden die drei Vektoren \underline{a} , \underline{b} und $\underline{a} \times \underline{b}$ ein Rechtssystem (vgl. FIG. A3):

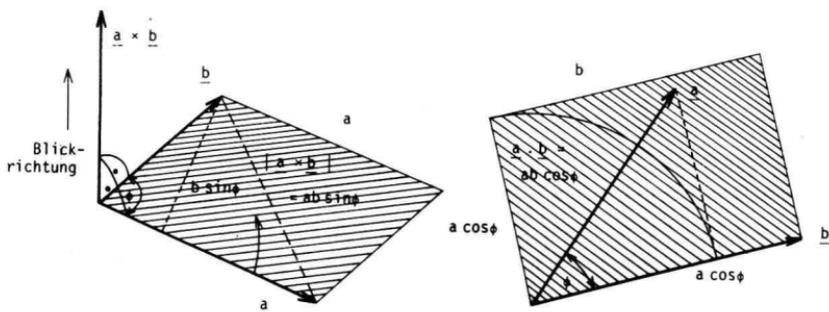


Fig. A3. Zur Definition des Vektor- und Skalarproduktes von zwei Vektoren.