Georg S. Greschner

# Maxwellgleichungen

## Das elektromagnetische Feld in Physik und Chemie

**Band 3:** Mathematische Hilfsmittel

$$\nabla^2 U = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi^1} & \frac{\partial}{\partial \xi^2} & \frac{\partial}{\partial \xi^3} & 0 \\ g_{11} & g_{12} & g_{13} & \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial U}{\partial \xi^1} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial U}{\partial \xi^2} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial U}{\partial \xi^3} \end{vmatrix}$$

Hüthig & Wepf

G. S. Greschner

# Maxwellgleichungen

## Das elektromagnetische Feld in Physik und Chemie

### Band 3: Angewandte Mathematik

Vektor- und Tensoralgebra
Differentialgeometrie
Vektoranalysis
Matrizenkalkül
Deltafunktional
Integralgleichungen

Hüthig & Wepf Verlag Basel · Heidelberg · New York

**CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek**

**Greschner, Georg S.:**
Maxwellgleichungen: d. elektromagnet. Feld in
Physik u. Chemie / G. S. Greschner. – Heidelberg:
Hüthig und Wepf
ISBN 3-7785-0619-6
Bd. 3. Angewandte Mathematik. – 1981.
ISBN 3-7785-0615-3

Georg S. Greschner · Maxwellgleichungen
Das elektromagnetische Feld in Physik und Chemie

Dem Andenken meiner Eltern gewidmet.

# V o r w o r t

Das vorliegende Buch, das eine Einführung mittleren Umfangs in die Vektor- und Matrizenrechnung darstellt, wurde zur mathematischen Unterstützung des vom Autor abgefaßten, den MAXWELL-Gleichungen und der Theorie der Lichtstreuung an Molekülen gewidmeten Lehrbuches geschrieben. Zwar gibt es unter den deutschen mathematischen Lehrtexten sowohl im Bereich der Vektorrechnung als auch auf dem Gebiet des Matrizenkalküls hervorragende Werke - zum Beispiel die beiden Lehrbücher LAGALLY "Vektoren" und ZURMÜHL "Matrizen" . Trotzdem schien es dem Autor lohnend, diese Thematik unter anderen Gesichtspunkten in kompakter Form neu darzustellen, um den Sachverhalt insbesondere naturwissenschaftlich orientierten Lesern leichter zugänglich zu machen. Aus diesem Grunde sind auch fast alle Anwendungsbeispiele der mathematischen Theorie aus dem Bereich der Physik gewählt.

Beim Schreiben des Textes ging der Verfasser davon aus, daß es grundfalsch wäre, die Darstellung eines mathematischen Stoffes davon abhängig zu machen, ob er für Mathematiker oder für Nichtmathematiker geschrieben wird. Man kann allenfalls bei der Gliederung des Stoffes in Axiome, Definitionen, Sätze und Beweise eine weniger straffe Form wählen.

Der Stoff ist in sieben Kapitel gegliedert. Im ersten Kapitel werden die Grundbegriffe der Vektor- und Tensoralgebra eingeführt und untersucht. Das zweite und das dritte Kapitel befassen sich mit dem Begriff des Linienelements und des Flächenelements in krummlinigen Koordinaten. Sie stellen somit eine Basis für das Rechnen mit Kurvenintegralen und mit Oberflächenintegralen dar.

Die in diesen drei Kapiteln entwickelte Theorie wird im vierten Kapitel angewendet, das der Vektoranalysis gewidmet ist und sich auf die Sätze von GAUSS und STOKES stützt. Dementsprechend werden hier auch die drei Operatoren grad, div und rot einheitlich mit Hilfe von Flüssen eingeführt, anschließend in kartesischen Koordinaten ausgedrückt und später auf beliebige krummlinige Koordinaten transformiert.

Das fünfte Kapitel stellt eine Einführung in den Matrizenkalkül und in die Theorie der Jacobiane dar. Da manche Untersuchungen der Physik, der Chemie und der Technik zu der oft recht schwierigen Aufgabe der numerischen Auflösung einer FREDHOLM-schen Integralgleichung e r s t e r Art führen, wurde diesem Kapitel ein Abschnitt beigefügt, der auf die Problematik schlecht konditionierter linearer Gleichungssysteme eingeht.

und mit der Lichtstreuung durch Beugung (LSB) an makroskopisch isotropen Teilchen.

Unter der Annahme von nunmehr dynamischen elastischen Stößen der Photonen des Primärlichtes mit einem fluktuierenden Molekülsystem werden die wichtigsten Streufunktionen der IELS berechnet, ausgehend von den MAXWELL-schen Gleichungen, dem DOPPLER-Effekt und der WIENER-schen Theorie der Zeitreihen. Am Schluß dieser auf PECORA zurückgehenden Theorie der LS wird der Zusammenhang der IELS mit der FGLS festgestellt und kurz der Einfluß der Polymolekularität auf die Streukurven der IELS analysiert.

Im letzten Abschnitt des Buches wird die Lichtstreuung durch Beugung von elektromagnetischen Wellen an großen Teilchen beliebiger Form untersucht und der wichtige Fall der LSB, die MIE-Streuung an leitenden Kugeln, mit Hilfe einer speziellen GREEN-Funktion ausführlich behandelt. Anschließend wird kurz die LSB an Zylindern und an Rotationsellipsoiden untersucht. Der mathematische Apparat wird im Falle der IELS und der LSB etwas detaillierter dargestellt, um auch weniger geübten Lesern die Aufarbeitung des etwas komplizierteren Stoffes zu erleichtern.

Alle in diesem Buch vorkommenden Gleichungen stützen sich auf das sehr vorteilhafte SI-System, wie es von der Conférence Générale des Poids et Mesures 1960 empfohlen wurde. Nur wird hier als chemische Grundeinheit nicht die SI-Größe mol verwendet, sondern die Größe kmol (1 kmol $CO_2$ = 44 kg $CO_2$, während 1 mol $CO_2$ = 44 g $CO_2$ ist); demzufolge ist hier die LOSCHMIDT-sche Zahl $N_L = 6{,}023 \cdot 10^{26}$ kmol$^{-1}$ zu setzen.

Zur mathematischen Unterstützung des physikalischen Stoffes wurde vom Verfasser ein mathematisches Lehrbuch geschrieben[1], das u.a. auch den benötigten Formalismus der Differentialgeometrie und der Funktionalanalysis enthält.

Für kritisches Durchlesen des Manuskriptes und für einige Diskussionen, die zum gegenwärtigen Stand des Buches beigetragen haben, ist der Verfasser den Herren Dr. O. Bodmann und Prof. Dr. B. A. Wolf, Institut f. Physikalische Chemie der Universität Mainz, sehr dankbar. Mein Dank gebührt auch Herrn Dr. J. Raczek aus dem gleichen Institut für die eingehende Diskussion einiger Teile der Theorie der IELS. Meinen besonderen Dank möchte ich dem HÜTHIG-Verlag aussprechen, nicht nur für die Ausstattung des Buches, sondern auch für die in jeder Hinsicht angenehme Zusammenarbeit.

Mainz / Zermatt, im Frühling 1981

Georg S. Greschner

INHALTSVERZEICHNIS. Seite:

VORWORT.

# KAPITEL 1. EINFÜHRUNG IN DIE VEKTORALGEBRA.

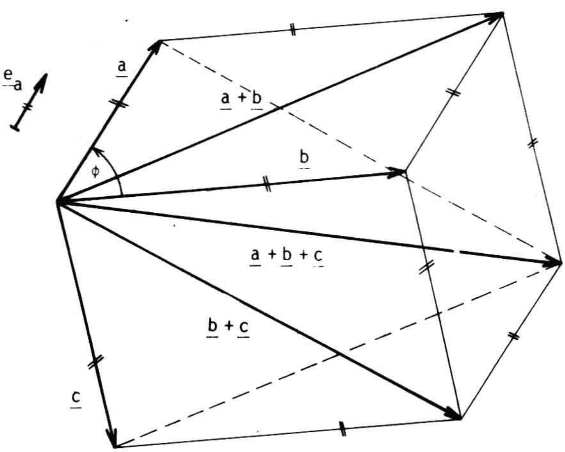
## §1. AXIOME DER VEKTORRECHNUNG. LINEARKOMBINATION VON VEKTOREN.

Vom geometrischen Standpunkt aus gesehen, stellt ein *Vektor* eine gerichtete Größe dar, die durch eine mit einem Pfeil versehene Strecke abgebildet wird, welche im *Angriffspunkt* des Vektors fußt. Der *Absolutbetrag* dieser Größe wird durch die Länge der Strecke angegeben, während ihre *Wirkungsrichtung* durch den Pfeil angedeutet wird. Ein *Nullvektor* $\underline{0}$ hat eine verschwindende Länge und eine unbestimmte Richtung. Für jeden anderen Vektor läßt sich ein Quotient aus diesem Vektor und dessen Länge bilden, der die gleiche Richtung und die Länge Eins hat; er heißt *Einheitsvektor* der gegebenen Richtung und wird oft mit dem Buchstaben $\underline{e}_\xi$ bezeichnet.

Es mögen drei beliebige Vektoren vorliegen, die wir mit unterstrichenen kleinen Buchstaben bezeichnen wollen:

$$\underline{a} = a\,\underline{e}_a \qquad \underline{b} = b\,\underline{e}_b \qquad \underline{c} = c\,\underline{e}_c\ .$$

Dann wird eine *Vektorsumme* $\underline{a} + \underline{b}$ mit den folgenden, axiomatisch eingeführten Eigenschaften definiert (vgl. FIG. A1):

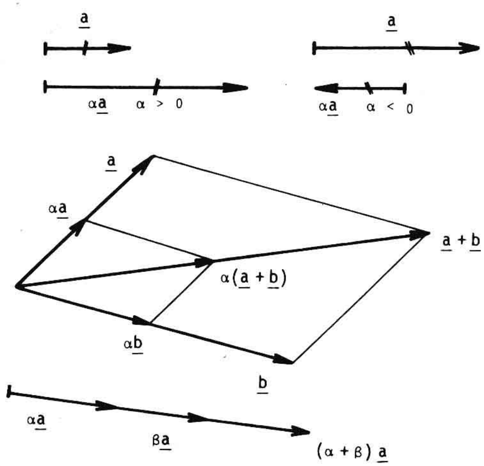



$$\begin{aligned}
\underline{a} + \underline{b} &= \underline{b} + \underline{a} \\
\underline{a} + \underline{0} &= \underline{a} \\
\underline{a} + (-\underline{a}) &= \underline{0} \qquad\qquad (A1)\\
(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} &= \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}) \\
|\,\underline{a} + \underline{b}\,| &\leqq a + b \\
|\,\underline{a} - \underline{b}\,| &\geqq a - b
\end{aligned}$$

(Gleichheit für $\phi = 0$ in FIG. A1).

FIG. A1. Zu den Axiomen der Vektorsummation.

Eine Größe, die keine Richtung hat, heißt S k a l a r . Es seien zwei solche Skalare $\alpha$ und $\beta$ gegeben. Dann wird eine S k a l a r m u l t i p l i - k a t i o n eines Vektors $\alpha \underline{a}$ mit den folgenden, ebenfalls axiomatisch eingeführten Eigenschaften definiert (vgl. FIG. A2):




$$\alpha \underline{a} = \underline{a} \alpha$$

$$1 \underline{a} = \underline{a} \qquad \text{(A2)}$$

$$(-1) \underline{a} = - \underline{a}$$

$$(\alpha + \beta) \underline{a} = \alpha \underline{a} + \beta \underline{a}$$

$$\alpha(\underline{a} + \underline{b}) = \alpha \underline{a} + \alpha \underline{b}$$

$$| \alpha \underline{a} | = | \alpha | a .$$

FIG. A2. Zu den Axiomen der Skalarmultiplikation eines Vektors.

Durch Zusammenfassung dieser beiden Begriffe wird eine L i n e a r - k o m b i n a t i o n v o n V e k t o r e n eingeführt. Sind n Vektoren $\underline{a}_i$ und n Skalare $\alpha_i$ gegeben, so versteht man unter der Linearkombination dieser Vektoren die n-gliedrige Vektorsumme

$$\underline{b} = \alpha_1 \underline{a}_1 + \alpha_2 \underline{a}_2 + \ldots + \alpha_n \underline{a}_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{a}_i . \qquad \text{(A3)}$$

Man sagt, die Vektoren $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n$ sind l i n e a r u n a b - h ä n g i g , wenn die folgende Äquivalenz gilt :

$$\underline{b} = \underline{0} \iff \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0 . \qquad \text{(A4)}$$

Nach den Axiomen (A1) und (A2) macht sich die lineare Unabhängigkeit der Vektoren dadurch bemerkbar, daß unter ihnen keine zwei vorkommen, die parallel sind, und keine drei, die in ein und derselben Ebene liegen. Ein System von n linear unabhängigen Vektoren mit dem gleichen Angriffspunkt bildet somit ein n-faches divergentes Vektorbündel.

## §2. DAS SKALAR- UND VEKTORPRODUKT. GEMISCHTE UND TENSORIELLE PRODUKTE VON VEKTOREN

Wir führen nun drei verschiedene Grundprodukte von zwei Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$ ein. Das Produkt

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = ab \cos(\underline{a}, \underline{b}) \tag{A5}$$

heißt Skalarprodukt der Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$. Denn die rechte Seite der Definition (A5) zeigt, daß es sich um einen Skalar handelt, der den Winkel der beiden Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$, und im Falle $\underline{b} = \underline{a}$ die Länge eines der Vektoren angibt:

$$\cos(\underline{a}, \underline{b}) = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{ab} \qquad a = \sqrt{\underline{a} \cdot \underline{a}} = |\underline{a}| . \tag{A6}$$

Dagegen stellt das Vektorprodukt

$$\underline{a} \times \underline{b} = ab \sin(\underline{a}, \underline{b})\, \underline{e}_c \qquad \underline{e}_c \perp \underline{a} \text{ und } \underline{e}_c \perp \underline{b} \tag{A7}$$

der Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$ einen Vektor dar, dessen Länge der Fläche des von den Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$ eingeschlossenen Parallelogramms gleich ist, und der auf dieser Fläche senkrecht steht; dabei bilden die drei Vektoren $\underline{a}$, $\underline{b}$ und $\underline{a} \times \underline{b}$ ein Rechtssystem (vgl. FIG. A3):

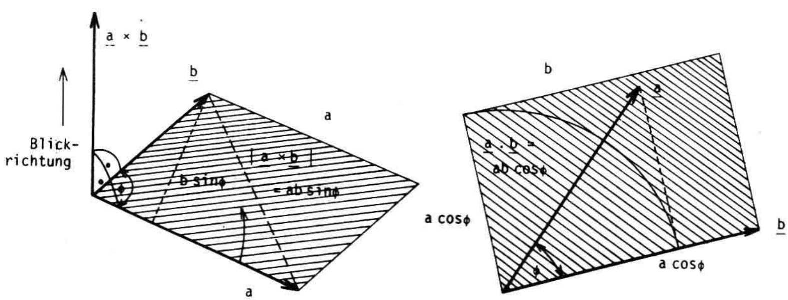



Fig. A3. Zur Definition des Vektor- und Skalarproduktes von zwei Vektoren.