

工業統計学

東京理科大学教授 理学博士

國澤清典

NHK 総合技術研究所

鈴木良夫

NHK 総合技術研究所

山内慎二

共著

基礎工業数学講座 3

朝倉書店

工業統計学

國澤清典
鈴木良夫 著
山内慎二

基礎工業
数学講座

3

朝倉書店

著者略歴

國澤 清典

大正 4 年 高知県に生まれる
昭和 14 年 大阪帝国大学理学部
数学科学卒業

現 在 東京理科大学教授
理学博士

鈴木 良夫

昭和 2 年 横須賀市に生まれる
昭和 26 年 早稲田大学第一理工学
部電気通信科学卒業

現 在 日本放送協会総合技術
研究所情報処理班部長

山内 慎二

昭和 15 年 東京に生まれる
昭和 37 年 東京教育大学理学部
数学科学卒業

現 在 日本放送協会総合技
術研究所研究員

基礎工業数学講座 3

工業統計学

昭和 47 年 4 月 30 日 初版第 1 刷

昭和 55 年 4 月 15 日 第 8 刷

著者承認
検印省略

著 者

くに
すけ
やまの
山

さわ
き
うち
内

きよ
よし
しん
慎

のり
お
じ
二

発行者

朝 倉 鑛 造

東京都新宿区新小川町 2-10

発 行 所

株式 朝 倉 書 店
会社

東京都新宿区新小川町 2-10

郵便番号 162

電話 東京 (260) 0141

振替口座東京 6-8673 番

自然科学書協会会員

© 1972

中央印刷・渡辺製本

無断複写・転載を禁ず

3341-111203-0032

刊行のことば

あらためて述べるまでもないことであるが、近時科学技術の発展は極めていちじるしいものがあり、これにともなって教育面では理工科学生が増員され、民間の会社においても研究に力がそそがれるようになった。これらの教育や研究のためには、まず基礎的な素養を身につける必要があり、以上のような需要のほか、経済学・心理学などの文化科学的な部門においても、数学が手段として有効であることが強くみとめられるようになった。数学が科学の言葉として適切な部門であることは古くから知られていることであるが、最近に至って、その必要性を強く認める層が急速に増大していることを感じさせられるのである。

本講座はこのような時代の要求に応ずる目的で計画されたものである。

講座の名称が示しているように、その各巻は工学的な研究や教育に特に基礎的と考えられる六つの部門をえらんで、教科書または参考書として使用に適するように極めて理解し易い形式でそれぞれの方面の専門家によって執筆されたものである。講座の程度としては、大学理工学系の教養部学生・工業短大の学生の教科書として適するように書かれ、会社・工場の技術者、工業高校のこの方面に関心をもたれる教官などのための参考書としてもよい伴侶であることを期した。

読者諸氏が本講座の各巻の解説や演習問題に習熟せられることによって、十分に各自の目的を達せられるようであれば、企画者達の喜びはこれに過ぎるものがない。

1963 年 1 月

淡 中 忠 郎

小 松 勇 作

ま え が き

本書は主として大学初年級ならびに工業高等専門学校の教科書ならびに参考書として上梓したものである。そのために、平易を旨として、実際的な応用例を主体にして解説した。というのは統計学は実際の応用例をモデルとして勉強するのが理解しやすく、またこのようなモデルを介して統計学のいろいろな手法の使い方も会得することができる。これが統計学の勉強方法としてもっとも手取り早いものである。このために本書は例題の配置、構成にもっとも苦心をした。

本書は主として工科系の読者を対象としているために、例題の内容についても勿論であるがまた各章末の問題についても理論的なものと、具体的な工科系の内容に富んだモデルを取り入れて配列した。読者は統計学の本質が数学を勉強するのと根本的に異なる点に注意し、数学はあくまで純粋な論理の展開からおこる絶対性を追求するに対し、統計学では資料から何を求めようとしているかをはっきりさせて、資料に対する処理の感覚を本書から学びとることが大切である。

これを要するに本書は統計学の本質が理解できるように、工学的応用例を多数配して、平易な解説によって自然に学習できるように努めたのである。

終わりにのぞみ、読者諸賢の御叱正を得て、本書をより完全なものにしていきたいことを念願としている。また朝倉書店の諸氏の忍耐強い温い御援助がなければ本書は完成しなかったであろう。これらの諸氏に対し、衷心より感謝の辞をささげたい。

1972年3月

國 澤 清 典

目 次

第 1 章 確率の基礎

§ 1. 集合と事象, 標本空間	1
§ 2. 確 率	5
§ 3. 確率の諸性質	7
§ 4. 事象の独立性	11
§ 5. 全確率の公式とベイズの定理	15
問 題 1	19

第 2 章 資料のまとめ

§ 6. 度数分布	20
§ 7. 相対度数分布	26
§ 8. 分布の代表値Ⅰ 中心的位置	27
§ 9. 分布の代表値Ⅱ ばらつき	32
§ 10. 関係の分析	38
問 題 2	42

第 3 章 確 率 変 数

§ 11. 確率変数とその分布	44
§ 12. 母 集 団	49
§ 13. 期 待 値	51
§ 14. 積 率	55
問 題 3	59

第 4 章 確 率 分 布

§ 15. 超幾何分布	60
-------------	----

§ 16. 二項分布と多項分布	65
§ 17. 正規分布(ガウス分布)	69
§ 18. ポアソン分布と指数分布	75
§ 19. 一様分布	81
§ 20. ガンマ分布とベータ分布	83
問 題 4	86

第 5 章 標 本 分 布

§ 21. 度数分布の確率分布へのあてはめ	87
§ 22. 標本平均の分布	91
§ 23. 確率変数の変換	95
§ 24. 正規母集団に関する統計量の分布	99
問 題 5	106

第 6 章 母 数 推 定

§ 25. 不偏推定量	107
§ 26. 最尤推定量	111
§ 27. 推定量の性質	113
§ 28. 区 間 推 定	115
問 題 6	121

第 7 章 仮 説 検 定

§ 29. 統計的仮説	123
§ 30. 分散の検定 I	124
§ 31. 分散未知のときの平均値の検定	126
§ 32. 平均の差の検定	127
§ 33. 分散の検定 II	128
§ 34. 尤度比検定	129

§ 35. 分割表の検定(独立性の検定)	133
§ 36. 百分率に関する検定	135
問 題 7	137
第 8 章 相関と回帰	
§ 37. 二変数正規分布と相関係数	139
§ 38. 回 帰 直 線	142
§ 39. 予想の問題	148
§ 40. 最小二乗法	151
問 題 8	154
第 9 章 抜取検査と品質管理	
§ 41. 抜 取 検 査	156
§ 42. 品 質 管 理	171
問 題 9	177
第 10 章 多変量解析の基礎	
§ 43. 分散分析法	179
§ 44. 判別分析法	193
問 題 10	199
問 題 の 答	201
付 表	207
索 引	219

第1章 確率の基礎

統計的方法というのは、本質的に不確実な事柄について、繰返し観察して得られたデータを処理することによって、その性質を明らかにしようとするものということができる。たとえば、工場におけるある製品の製造工程を考えてみると、全く不良品の生じない工程をつくるのはきわめてむずかしく、ある程度の不良品の発生は避けられないであろう。このような工程の良否を考えるためには、その工程の製品を一つ一つ繰返し検査したデータを処理して結論を求めようとすることになる。

こうした問題を取扱ってゆくときの数学的な基礎の一つが確率の考え方で、これは簡単にいえば不確実な事柄に関する確からしさの程度を示す測度である。

§1. 集合と事象、標本空間

A, B を集合とすると、 B のどの元も同時にまた A の元になっているとき、 B を A の部分集合 といい、これを $B \subset A$ で表す。たとえば、

$$A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$$

のとき、集合 $\{\omega_1\}$, $\{\omega_2, \omega_4\}$, $\{\omega_1, \omega_2, \omega_4\}$, $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ などは、いずれも集合 A の部分集合である。

集合 A に含まれる元と、集合 B に含まれる元との全体がつくる集合を、 A, B の和集合 といい、これを

$$A \cup B$$

で表す。たとえば、

$$A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\},$$

$$B = \{\omega_3, \omega_4, \omega_5\}$$

ならば、

$$A \cup B = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$$

である(図1を参照。このような図を

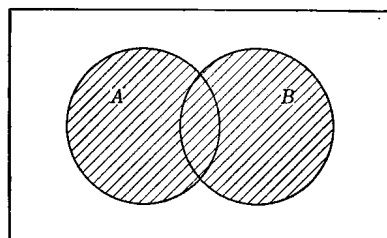


図1 和集合 $A \cup B$

ベン(Venn)図表という).

つぎに集合 A, B のどちらにも含まれる元の全体がつくる集合を A, B の積集合といい, これを

$$A \cap B$$

で表わす. たとえば,

$$A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}, \quad B = \{\omega_3, \omega_4, \omega_5\}$$

ならば,

$$A \cap B = \{\omega_3, \omega_4\}$$

である(図2を参照).

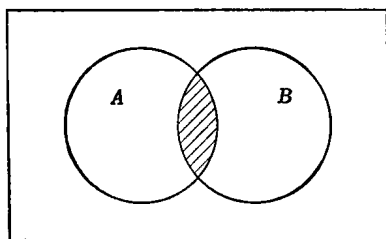


図2 積集合 $A \cap B$

和集合, 積集合の考え方は, 三つ以上の集合についても拡張することができ, 集合 $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots$ に含まれる元全体の集合を $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots$ の和集合といい,

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_i \cup \dots$$

で表わすか, または簡単に

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

と表わすこともある. 同様に集合 $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots$ のいずれにも含まれる元全体の集合を $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots$ の積集合といい,

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_i \cap \dots$$

または

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

と表わす.

二つの集合 A, B に共通元のないとき, これらの集合の積集合は元を一つももたない集合となるが, このような集合を空集合といい,

$$A \cap B = \phi$$

で表わす.

また集合 A が集合 Ω の部分集合であるとき, Ω の元であって A に含まれない元の全体がつくる部分集合を A の補集合といい, $\bar{A}$ で表わす.

いま, 集合 A, B, C がいずれも集合 Ω の部分集合であるとき, 次の諸関係が成り立つことは容易に知られる.

- $$\begin{aligned}
 (1.1) \quad & \bar{\Omega} = \phi, \\
 (1.2) \quad & A \cap \Omega = A, \\
 (1.3) \quad & A \cup \Omega = \Omega, \\
 (1.4) \quad & \Omega \cap \bar{A} = \Omega - A, \\
 (1.5) \quad & A \cup A = A, \\
 (1.6) \quad & A \cap A = A, \\
 (1.7) \quad & A \cup B = B \cup A, \quad (\text{交換法則}) \\
 & A \cap B = B \cap A, \\
 (1.8) \quad & A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C, \quad (\text{結合法則}) \\
 & A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C, \\
 (1.9) \quad & A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad (\text{分配法則}) \\
 & A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \\
 (1.10) \quad & \overline{(\bar{A})} = A, \\
 (1.11) \quad & \overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}, \\
 (1.12) \quad & \overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}.
 \end{aligned}$$

さて, たとえば真空管, 蛍光灯などにはそれぞれの寿命があり, 故障してしまえばもう使うことはできないが, 個々の寿命は一定せず, 新品の真空管の正確な寿命を知ることはできない. 確率論では, このように, その結果が一意的に決まらない事柄について, そのおこりやすさを問題にする.

いま, ある工場における 1 カ月間の機械の事故数を調べたとしよう. 事故数は月により, 機械により 0 回, 1 回, 2 回, … というように変化するであろう. これらの可能と思われる回数全体の集合を考えて, この工場における月間機械事故数のつくる標本空間とよぶことにする. したがってこの場合の標本空間は $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ である.

一般に偶然に支配され、その結果が一意的に決定されない事柄を観察したり、実験したりする操作を試みといい、試みによって生ずる事柄を事象という。たとえば上述の月間機械事故数を観察することが一つの試みであり、月間の事故数が0回、1回、…となっていることは、それぞれこの試みによって生ずる事象である。

さらにこれらの試み T によって生ずる事象のうち、どれか一つはその試みの結果必ず生ずるが、どの二つについても、二つ以上は同時に生ずることのない可能なすべての事象の集合をこの試みの標本空間といい、その要素を標本点とよぶ。これらの事象を $\omega_1, \omega_2, \dots$ とすれば標本空間 Ω は、

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$$

とかくことができる。

試み T によって生ずる任意の事象 A は標本空間 Ω の部分集合となっており、このような二つの事象 A, B について、和集合 $A \cup B$ を和事象、積集合 $A \cap B$ を積事象とよび、また、余集合 $\bar{A}$ を余事象という。

和事象 $A \cup B$ は事象 A, B のうち少なくとも一つは生ずることを、積事象 $A \cap B$ は事象 A, B が同時に生ずることを、また余事象 $\bar{A}$ は事象 A の生じないことを意味している。

例 1. 工場における1週間の機械事故数を考えると、

$$0, 1, 2, 3, \dots$$

などが考えられる。これらが標本空間 Ω をつくる。すなわち、

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

となる。いま1週間の事故数が3以上であるという事象 A を考えると、

$$A = \{3, 4, 5, \dots\}$$

となる。

事象 $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots$ のどの二つをとっても共有点をもっていない場合、これらの事象は互いに排反であるという。なお、空集合に対応する事象を空事象とよび、なにも成立しないということの意味している。これを ϕ で表わすことにする。

例 2. トランプのカードを 1 枚ひいて、その数字(A, 2, 3, ..., 10, J, Q, K の 13 通り)と模様(クラブ(C), ダイヤ(D), ハート(H), スペード(S)の 4 通り)とを調べることを考えよう. この場合の標本空間は $13 \times 4 = 52$ 点からなっている. またひいたカードの数字が 4 であるという事象と 7 であるという事象とは排反であり, クラブであるという事象とハートであるという事象についても排反である. しかし, 数字が 4 であるという事象と, ハートであるという事象とは排反ではない.

問 1. 小学校のあるクラスの生徒数が 40 人で, そのうち早生まれのもの(Y)が 11 人, 女生徒(F)が 19 人, 遅生まれ(O)の男生徒(M)が 15 人いる. 遅生まれの男生徒という集合(O $\cap$ M)を集合算の記号で Y, F を用いて表わせ. また (i) 男生徒, (ii) 早生まれの男生徒, (iii) 遅生まれの女生徒についても Y, F で表わし, その人数を求めよ.

問 2. 10 円と 5 円の硬貨を同時に投げたときの硬貨の表裏に関する標本空間を示せ.

§2. 確 率

さて, 一つの試み T の結果として得られる標本空間 Ω の部分集合 A に対して, 実数値 $P(A)$ が対応づけられていて,

$$\text{公理 (1)} \quad 1 \geq P(A) \geq 0,$$

$$\text{公理 (2)} \quad P(\Omega) = 1,$$

$$\text{公理 (3)} \quad A_1, A_2, \dots \text{ が互いに排反のとき,}$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$$

が満足されているならば, あたえられた標本空間 Ω 上に確率が定義されているといい, $P(A)$ を事象 A の確率という.

たとえば, さいころを投げたとき出る目の数は, 1, 2, 3, 4, 5, 6 のいずれかである. このときの標本空間 Ω は $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ である. いま Ω の各元に, $1/6$ という数値を対応させると, これは上の (1), (2), (3) の公理を満たしているので, Ω 上に確率が定義されたことになる.

$1/6$ の確率をあたえることが妥当であるかどうかは, これだけではわからない. われわれは, 上記の公理 (1), (2), (3) によって確率の概念を明示したのであり, それが正しい確率をあたえるかどうかは, さらに他の情報を必要とす

る。たとえば、同程度のおこりやすさにもとづいた確率とは、標本空間、 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ の各元 $\omega_i (i=1, 2, \dots, n)$ に対し、等しい確率をあたえる場合であって、

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \dots = P(\omega_n)$$

が満足されていることを意味する。これと確率の公理 (2) $P(\Omega) = 1$ と (3) $P(\Omega) = P(\omega_1 \cup \omega_2 \cup \dots \cup \omega_n) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + \dots + P(\omega_n)$ より、

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \dots = P(\omega_n) = \frac{1}{n}$$

となる。このように、確率の公理 (1), (2), (3) に、同程度のおこりやすさという事実を付け加えるだけで、確率は具体的な数値をもつこととなる。

さらに、標本空間の要素である各事象を、それらのおこりやすさが同程度であるように定めれば、これらの事象の和事象の確率は、標本空間とその部分集合に属する要素の数を計算し、その比率を求めることにより知ることができる。

例題 1. 2 枚の硬貨を投げて 2 枚とも表の出る確率を求めよ。

この場合に等しい確からしさでおこるのは

(表, 表), (表, 裏), (裏, 表), (裏, 裏)

の四つの事象であるから、求める確率は $1/4$ となる。

例題 2. 2 個のさいころを投げて、目の数の和が 6 になる確率を求めよ。

目の出方は次の 36 通りが考えられる。

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

このうち、目の数の合計が 6 になるのは、破線で囲んだ五つの場合であるから、求める確率は $5/36$ となる。

例題 3. 1 組のトランプから、札を任意に 3 枚ひいたとき、そのうちの 2 枚がダイヤである確率は何ほどか。

トランプの1組は52枚であるから、その中から3枚をひくときの取出し方は $\binom{52}{3}$ 通りあり、任意にひいたときには、これらが同じ確からしさでおこると考えられる。

$$\binom{52}{3} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 22100.$$

一方、確率を求めようとする事象は、3枚のうち2枚がダイヤで、1枚がダイヤ以外の札であるような部分集合である。まずダイヤの札は全部で13枚あるからその中から2枚をひく取出し方は $\binom{13}{2}$ 通りである。またダイヤ以外の札は39枚あり、その中から1枚をひく取出し方は $\binom{39}{1}$ 通りある。したがって、2枚がダイヤで1枚がダイヤ以外であるような取出し方は、

$$\binom{13}{2} \cdot \binom{39}{1} = \frac{13 \cdot 12}{1 \cdot 2} \cdot \frac{39}{1} = 3042,$$

したがって求める確率は

$$\frac{3042}{22100} = 0.138$$

となる。

問 1. 硬貨を3枚同時に投げたとき、2枚が表になる確率を求めよ。

問 2. 1組のトランプから5枚のカードをひいたとき、4枚が同じ数字である確率を求めよ。

§3. 確率の諸性質

前節に述べた公理に従って定義された確率について、直ちに導かれるいくつかの性質について述べてみよう。

(i) **確率の単調性** 二つの事象 A, B があたえられ、 A がおこるならば B もまた必ずおこるとき、 $A \subset B$ なる記号で表わす。これは、集合として A に属する任意の元が B に属していること (A が B の部分集合であること) と同等である。このとき次の定理が成り立つ。

定理 3.1. 二つの事象 A, B の間に

$$A \subset B$$

なる関係があるならば、

$$(3.1) \quad P(A) \leq P(B)$$

である。これを確率の単調性という。

また、このとき、

$$(3.2) \quad P(B-A) = P(B) - P(A)$$

である。

証明。 $A \subset B$ であるので、

$$B = A \cup (B-A)$$

とおくことができ、しかも $A \cap (B-A) = \phi$ であるから、確率の基本性質 (3) より、

$$P(B) = P(A) + P(B-A)$$

となり、したがって、

$$P(B) - P(A) = P(B-A),$$

また $P(B-A) \geq 0$ であるから、

$$P(B) \geq P(A)$$

となる。

また、上述のように $A \subset B$ ならば、

$$P(B-A) = P(B) - P(A)$$

である。

(証明終)

(ii) **余事象の確率** 事象 A のおこらない、したがって A の余事象 $\bar{A}$ のおこる確率について次の定理が成り立つ。

定理 3.2. 事象 A の余事象 $\bar{A}$ について

$$(3.3) \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

証明。 $\bar{A} \cup A = \Omega$

であり、しかも $\bar{A}$ と A とは排反であるから、

$$P(\Omega) = P(\bar{A}) + P(A) = 1$$

となり、したがって、

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

が得られる。

(証明終)

とくに, $A=\Omega$ ならば, $\bar{A}=\phi$, $P(\Omega)=1$ であるから,

$$(3.4) \quad P(\phi)=0$$

となり, 空事象の確率は 0 となる.

(iii) **確率の加法定理** 二つの事象 A, B が互いに排反であるならば, 和事象の確率は公理 (3) から明らかに,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

である.

これに対し, A, B が任意の二つの事象であるとき, 和事象の確率については次の確率の加法定理が成立する.

定理 3.3. A, B を任意の二つの事象とすると,

$$(3.5) \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

となる.

証明. まず図 3 からわかるよう

に,

$$\begin{aligned} A \cup B &= A \cup (\bar{A} \cap B) \\ &= A \cup (B - A \cap B) \end{aligned}$$

とかくことができ, しかも A と $(B - A \cap B)$ とは排反であるから, 公理 (3) により,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - A \cap B)$$

となる. ここで $B \supset A \cap B$ であるから式 (3.2) より,

$$P(B - A \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

であり, したがって,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

が得られる.

(証明終)

(iv) **条件付確率と乗法定理** いまここに m 個の鋳造品があり, その内訳が表 1 のようであるとしよう. この m 個の鋳造品の中から 1 個を選び出し, それが

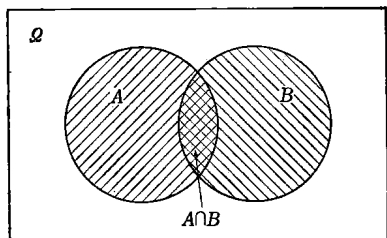


図 3 確率の加法定理