exercices de mathématiques

oraux x-ens

analyse 1

Serge Francinou
Hervé Gianella
Serge Nicolas

CASSINI

SERGE FRANCINOU
HERVÉ GIANELLA
SERGE NICOLAS

Exercices de mathématiques des oraux de l'École polytechnique et des Écoles normales supérieures

Analyse. Tome I

常州大学山书馆
藏书章

Troisième édition corrigée

CASSINI

Serge Francinou, ancien élève de l'École normale supérieure et agrégé de Mathématiques est actuellement professeur en classe préparatoire au lycée Henri IV.

Hervé Gianella, ancien élève de l'École normale supérieure et agrégé de Mathématiques est actuellement professeur en classe préparatoire au lycée Blaise Pascal d'Orsay.

Serge Nicolas, ancien élève de l'École normale supérieure et agrégé de Mathématiques est actuellement professeur en classe préparatoire au lycée Henri IV.

ISBN 978-2-84225-213-7
(1re édition, 2003, ISBN 2-84225-032-X,
2e édition, 2007, ISBN-13 : 978-2-84225-135-2)

© Cassini, Paris, 2014.

EXERCICES DE MATHÉMATIQUES
ORAUX X-ENS

Enseignement des mathématiques

1. J.-Y. Ouvrard, *Probabilités I*
2. J. Hubbard, B. West, *Équations différentielles et systèmes dynamiques*
3. M. Cottrell, V. Genon-Catalot, Ch. Duhamel, Th. Meyre, *Exercices de probabilités*
4. F. Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*
5. J.-Y. Ouvrard, *Probabilités II*
6. G. Zémor, *Cours de cryptographie*
7. A. Szpirglas, *Exercices d'algèbre*
8. B. Perrin-Riou, *Algèbre, arithmétique et Maple*
10. S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices des oraux X-ENS, Algèbre 1*
11. S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices des oraux X-ENS, Analyse 1*
12. S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices des oraux X-ENS, Algèbre 2*
13. S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices des oraux X-ENS, Analyse 2*
14. S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices des oraux X-ENS, Algèbre 3*
15. H. Krivine, *Exercices de mathématiques pour physiciens*
16. J. Jacod, Ph. Protter, *L'essentiel en théorie des probabilités*
17. M. Willem, *Analyse fonctionnelle élémentaire*
18. É. Amar, É. Matheron, *Analyse complexe*
19. B. Randé, *Problèmes corrigés. Concours 2002 et 2003 (MP)*
20. D. Perrin, *Mathématiques d'école*
21. B. Randé, *Problèmes corrigés. Concours 2004 (MP)*
22. P. Bourgade, *Olympiades internationales de mathématiques 1976-2005*
23. V. Prasolov, *Problèmes et théorèmes d'algèbre linéaire*
24. R. Sá Earp, E. Toubiana, *Introduction à la géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann*
25. L. Di Menza, *Analyse numérique des équations aux dérivées partielles*
26. B. Candelpergher, *Calcul intégral*
27. J. Hubbard, B. West, *Équations différentielles et systèmes dynamiques, vol. 1*
28. J. Hubbard, B. West, *Équations différentielles et systèmes dynamiques, vol. 2*
29. S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices des oraux X-ENS, Analyse 3*
30. C. Zuily, *Problèmes de distributions et d'équations aux dérivées partielles*
31. B. Makarov *et al.*, *Problèmes d'analyse réelle*
32. S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices des oraux X-ENS, Analyse 4*

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

Introduction

Cet ouvrage est le premier tome d'analyse d'un recueil d'exercices de mathématiques destiné à la préparation des oraux des concours d'entrée aux Écoles normales supérieures et à l'École polytechnique. Il comportera sept tomes, trois d'algèbre et quatre d'analyse.

La vocation première des Écoles normales est de former des chercheurs ou des enseignants-chercheurs. Le concours d'entrée vise donc à détecter les qualités scientifiques du candidat, son aptitude à la recherche. À l'oral, on jugera avant tout la capacité de prendre des initiatives, d'utiliser une indication, de mener à bien une démarche. On ne sera pas surpris que les exercices posés aient un contenu mathématique riche, qu'ils soient très éloignés du simple exercice technique, d'application du cours, qu'ils soient souvent difficiles. Ils visent la plupart du temps à la démonstration d'un résultat mathématique significatif. Ils pourraient apparaître excessivement difficiles, si on perdait de vue le déroulement concret de l'épreuve. L'oral des ENS est un long dialogue (l'épreuve dure environ cinquante minutes, comme d'ailleurs à l'École polytechnique) entre le candidat et l'examinateur, qui tout au long de l'épreuve fournit des indications, quand c'est nécessaire, pour relancer la réflexion du candidat et tester ses réactions. Il est d'ailleurs impossible de rendre pleinement compte dans un recueil d'exercices du caractère oral de l'épreuve.

L'École polytechnique, quant à elle, est plus généraliste. Les exercices posés au concours sont de facture plus classique et, en règle générale, l'examinateur intervient moins. C'est au candidat de montrer sa maîtrise du programme dans la résolution d'un exercice dont la difficulté est cependant très variable. Certains sont proches des exercices d'ENS. Les énoncés circulent d'ailleurs d'un concours à l'autre, ou peuvent même être repris d'exercices d'Olympiades.

Les énoncés qui figurent dans ce recueil ont été donnés entre 1995 et 2013. Ils sont extraits pour l'essentiel des listes publiées chaque année par la RMS (*Revue des mathématiques de l'enseignement supérieur* aux éditions Vuibert jusqu'en 2003 et désormais *Revue de la filière Mathématiques* aux éditions e.net) dont nous remercions les auteurs pour l'aide précieuse qu'ils apportent ainsi aux élèves et aux professeurs des classes préparatoires. Il s'agit de versions communiquées par les étudiants, reflétant la compréhension que ceux-ci ont eue de l'exercice et le déroulement conjoncturel de leur oral, comme le montrent les variations d'une année à l'autre pour un même exercice. Nous n'avons pas hésité à les modifier, pour rectifier des erreurs, compléter un énoncé

quand manifestement l'exercice s'est arrêté avant que le résultat que l'examinateur avait en vue ne soit atteint, ou ajouter des indications.

Nous avons choisi de laisser quelques énoncés « bruts », ceux pour lesquels nous estimons qu'une démarche naturelle (qui peut être longue et ardue) permet de conduire à la solution. Pour d'autres exercices, nous avons pris la liberté de rajouter des questions intermédiaires, qui auraient pu être celles posées par l'examinateur. Quitte à perdre en concision, nous avons tenu à rédiger les solutions les plus pédagogiques possible, essayant d'exposer clairement les idées et démarches des raisonnements sans pour autant escamoter les détails ou calculs qui peuvent paraître évidents. On évite autant que possible l'introduction d'une astuce ou d'un objet *ad hoc* permettant d'atteindre rapidement la solution. S'il n'y a pas moyen d'expliquer l'origine de cette astuce, c'est que l'exercice est peu intéressant et que l'étudiant en tirera peu de profit.

À l'intérieur de chaque chapitre, les exercices ont été regroupés thématiquement, et à l'intérieur de chaque thème, souvent par ordre de difficulté croissante. Ainsi regroupés, ils apparaîtront plus accessibles, car plongés dans leur contexte mathématique, éclairés par d'autres exercices voisins. Les introductions historiques qui ouvrent chaque chapitre, outre leur intérêt propre, visent au même but. Enfin, nous avons agrémenté les énoncés de quelques remarques préliminaires. Sans faire de rappels de cours systématiques, nous avons énoncé, voire redémontré certains résultats : lemmes classiques, intervenant dans la résolution d'un grand nombre d'exercices, ou résultats au contraire à la lisière du programme, mais utiles, pour lesquels des éclaircissements étaient nécessaires. On trouvera aussi des remarques de synthèse ou des généralisations qui, nous l'espérons, pourront amener le candidat curieux à approfondir ses connaissances. Les quelques indications bibliographiques ont le même objectif.

Le lecteur ne tirera profit de ce livre d'exercices que s'il cherche des solutions personnelles avant d'en étudier les corrigés. Une bonne connaissance du cours est indispensable. En effet, les théorèmes du programme fournissent bon nombre de schémas de démonstration. Rappelons aussi quelques démarches générales qui peuvent faciliter l'appréhension des exercices difficiles :

▷ ne pas hésiter à faire des dessins pour visualiser les phénomènes : par exemple dans le domaine de la convexité, ou encore en représentant graphiquement l'évolution d'un système dynamique discret $u_{n+1} = f(u_n)$... ;

▷ établir le résultat pour un sous-ensemble et l'étendre par un argument de densité (par exemple pour passer de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$, de l'ensemble des fonctions polynomiales aux fonctions continues...) ;

▷ ne pas hésiter dans la phase exploratoire à faire des approximations

qui peuvent sembler grossières, en vue de déterminer une limite ou un équivalent, à faire des interversions de sommations en vue de réaliser un calcul formel. Dans un second temps, il s'agira bien sûr de justifier les conjectures.

Au-delà des étudiants en classe préparatoire, ces ouvrages intéresseront aussi les candidats au CAPES et à l'Agrégation, qui y trouveront matière à réviser les principales notions du programme, ainsi que des exemples pour nourrir un développement pour leur oral.

Voyons maintenant plus précisément le contenu de ce tome 1 d'analyse. Les thèmes développés sont les nombres réels et complexes, les suites, les séries et enfin les fonctions d'une variable réelle (limites, continuité, dérivabilité, convexité...). Hormis le troisième chapitre (qui porte sur les séries numériques), ces exercices s'adressent aussi aux élèves de première année. La matière des différents chapitres est assez classique, sauf peut-être pour le premier qui fait appel à des techniques délicates et des idées originales. Le second tome d'analyse portera sur les suites et séries de fonctions, notamment les séries entières et les séries de Fourier. Quant au troisième, il abordera la topologie, les équations différentielles et les fonctions de plusieurs variables.

Nous remercions André Bellaïche, René Cori, Rached Mneimné, Bernard Randé et Gilles Godefroy, ainsi que nos élèves, pour leur relecture approfondie de l'ouvrage et leurs nombreuses suggestions, tant sur le fond que sur la forme.

Dans cette troisième édition nous avons corrigé quelques erreurs signalées par nos lecteurs et nous tenons en particulier à remercier David Delaunay pour sa relecture exhaustive et ses nombreuses remarques.

Outre les notations habituelles, indiquons que $\mathrm{E}(x)$ désigne la partie entière du réel x.

Enfin, si vous souhaitez nous contacter pour nous faire part de vos remarques, vous pouvez envoyer un courriel à l'adresse *fgn.cassini@free.fr*.

Chapitre 1

Nombres réels et complexes
Topologie de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

Si la définition rigoureuse du corps des réels est récente, la manipulation de nombres réels remonte à la plus haute Antiquité. Elle est présente dans toute mesure de grandeur et apparaît dès la mise en place d'un système de numération capable de noter les valeurs approchées des nombres réels (mathématiques babyloniennes). La mathématique grecque s'est intéressée essentiellement aux nombres entiers ; une fraction est moins considérée comme un nombre que comme un rapport, une relation entre deux entiers. On lui doit cependant quelques résultats essentiels pour les réels. La découverte de nombres irrationnels date de la fin du V^e^ *siècle avant notre ère. On attribue à l'école pythagoricienne la démonstration de l'irrationalité de* $\sqrt{2}$. *Dans le livre V des* Éléments *d'Euclide, on trouve l'exposé d'une théorie axiomatique des rapports de grandeurs, attribuée à Eudoxe. Y figurent, par exemple, des propositions qui équivalent à la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ou à l'associativité de la multiplication. Notons aussi l'énoncé suivant qui correspond essentiellement à ce qu'on appelle l'axiome d'Archimède : deux grandeurs ont entre elles un rapport si on peut trouver un multiple de l'une supérieur à l'autre. Avec le déclin de la mathématique grecque, on retourne à une conception naïve des nombres réels. Chez Diophante, par exemple, un nombre est l'inconnue d'un problème algébrique. Dans les siècles suivants, les progrès apparaîtront surtout au niveau du calcul. À la fin du* XVI^e^ *siècle, Stevin contribue à la généralisation de l'usage des fractions décimales. Napier propose, en 1617, d'utiliser le point ou la virgule pour séparer la partie entière de la partie décimale. Il choisit finalement le point, qui devient d'usage commun en Angleterre. La réflexion sur les réels va évoluer avec le développement de l'analyse au* XIX^e^ *: difficultés liées aux problèmes de limites ; progrès dans la connaissance des irrationnels et des nombres transcendants... Entre 1860 et 1880, Weierstrass, Dedekind, Méray et Cantor proposent des constructions de* $\mathbb{R}$. *Celle de Dedekind par les «coupures» de* $\mathbb{Q}$ *met au premier plan l'axiome de la borne supérieure, alors que celle de Méray et de Cantor qui fait intervenir des classes d'équivalence de suites de Cauchy fournit directement le caractère complet de* $\mathbb{R}$. *C'est à partir de ses recherches sur les réels que Cantor s'intéresse aux problèmes d'équipotence. Dans ce cadre, il énonce presque incidemment les principaux résultats*

élémentaires sur la topologie de la droite, la structure des ensembles ouverts et fermés... Borel et Baire prolongent l'étude des sous-ensembles de $\mathbb{R}$: le premier définit les ensembles de mesure nulle et les ensembles appelés de nos jours boréliens, *et montre qu'on peut définir sur ces derniers une mesure qui prolonge la longueur des intervalles ; le second définit les ensembles de première catégorie (on dit aussi* maigres*), c'est-à-dire les ensembles qu'on peut recouvrir par une famille dénombrable de fermés d'intérieur vide et montre qu'un tel ensemble est d'intérieur vide (c'est le théorème de Baire que le lecteur trouvera en exercice dans le troisième tome d'analyse). Un espace topologique où cette propriété est vraie est aujourd'hui appelé un espace de Baire.*

Nous terminerons cette introduction par quelques mots sur l'histoire des nombres complexes. Au XVI^e *siècle, Cardan et Tartaglia donnent une solution de l'équation du troisième degré $x^3 + px + q = 0$ sous la forme*

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Bombelli (1526-1573) a alors l'idée d'utiliser cette formule dans le cas où $4p^3 + 27q^2 < 0$. Il étudie notamment l'exemple de $x^3 - 15x - 4 = 0$ et obtient

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-21}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-21}} = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$$

après quelques manipulations algébriques sur des expressions de la forme $a + b\sqrt{-1}$ que le lecteur pourra prendre plaisir à retrouver. Or, il est aisé de vérifier que 4 est bien solution de l'équation. Ainsi, la formule de Cardan permet de trouver des racines réelles par l'intermédiaire d'opérations effectuées sur des nombres impossibles, ou «imaginaires» (terme introduit par Descartes en 1637). Ces constatations empiriques ont conduit à un usage de plus en plus fréquent des nombres imaginaires et ce dès le début du XVII^e *siècle. Le symbole i utilisé de nos jours est introduit par Euler (1707-1783) en 1777. Il introduit également l'exponentielle complexe et les fonctions trigonométriques usuelles. C'est Moivre (1667-1754) qui met en évidence le lien entre les racines n-ièmes d'un nombre complexe et le partage d'un arc de cercle en n parties égales. Cependant il faut encore attendre quelques années avant que ne se développe véritablement l'usage de la représentation géométrique des nombres complexes. Gauss (1777-1855) avait sans doute cette vision géométrique de $\mathbb{C}$ mais il ne publia rien sur ce point avant 1831. Ce sont deux mathématiciens amateurs qui les premiers publièrent des mémoires sur ce sujet. Le premier est dû au danois Caspar Wessel (1797), mais il tomba rapidement dans l'oubli et ne fut redécouvert qu'un siècle plus*

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

tard. Le second date de 1806 et est dû au mathématicien suisse Argand. Ses travaux faillirent aussi passer inaperçus (l'article ne fut diffusé qu'en 1813) et furent accueillis très froidement par les grands de l'époque. Ce n'est qu'à partir de 1831, avec Gauss, et surtout en 1847 avec Cauchy, que ses idées furent adoptées, ouvrant la porte à de multiples développements.

Les trois premiers exercices sont issus d'un même oral et concernent le développement décimal d'un nombre réel. Dans le cursus scolaire, c'est très vite qu'on apprend à se représenter un réel par son développement décimal, par exemple $\pi = 3{,}14159265...$ *Cet objet n'est toutefois pas aussi simple qu'il y paraît, puisque la notation* $0{,}a_1a_2a_3...$ *représente en réalité une somme de série. De plus, on dit rarement dans le secondaire que ce développement n'est pas nécessairement unique : un nombre décimal (non nul) en a deux. Par exemple :* $9/25 = 0{,}36 = 0{,}3599999...$ *Le premier sera qualifié de propre et le second d'impropre. L'énoncé suivant, qui démontre l'existence et l'unicité du développement propre, est une question de cours.*

1.1. Développement décimal propre d'un réel

Démontrer que tout réel x de $[0,1[$ s'écrit de manière unique $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$ où $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de $[\![0,9]\!]$ non stationnaire à 9 (c'est-à-dire que pour tout $\mathrm{N} \geqslant 1$, il existe $n \geqslant \mathrm{N}$ tel que $a_n \neq 9$).
(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Le résultat, énoncé ici en base 10, est en fait valable pour toute base $b \geqslant 2$. Nous traiterons donc le cas général. Nous noterons $\mathcal{T}$ l'ensemble des suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$ de $[\![0,b-1]\!]$ non stationnaires à $b-1$. Soit x un réel de l'intervalle $[0,1[$ (on se limite à ces réels, car tout réel est somme d'un entier, sa partie entière, et d'un réel de $[0,1[$).

• *Analyse.* Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ dans $\mathcal{T}$ répondant au problème,

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b^n} = \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + \cdots + \frac{a_n}{b^n} + \cdots$$

On sait bien, en base 10, comment récupérer le premier chiffre après la virgule a_1 : il suffit de multiplier par 10, ce qui a pour effet de décaler la virgule d'un cran vers la droite, puis de prendre la partie entière. Effectivement, en multipliant l'égalité ci-dessus par b il vient,

$$bx = a_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{b^{n-1}} = a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n+1}}{b^n}.$$

La somme qui apparaît est un réel de $[0,1[$, puisque

$$0 \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n+1}}{b^n} < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b-1}{b^n} = \frac{b-1}{b} \frac{1}{1-\frac{1}{b}} = 1,$$

la seconde inégalité étant stricte puisque il existe au moins un entier $n > 1$ tel que $a_n < b-1$. On a donc nécessairement $a_1 = \mathrm{E}(bx)$. On a alors $bx - a_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n+1}}{b^n}$, de sorte que par le même raisonnement, $a_2 = \mathrm{E}(bx - a_1)$. Plus généralement, si les a_k sont connus jusqu'au rang $p-1$ avec $p \geqslant 2$, on a

$$b^p x = a_1 b^{p-1} + a_2 b^{p-2} + \cdots + a_{p-1} b + a_p + \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{a_n}{b^{n-p}},$$

soit

$$a_p = b^p x - a_1 b^{p-1} - a_2 b^{p-2} - \cdots - a_{p-1} b - \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n+p}}{b^n}}_{\in[0,1[}.$$

Par conséquent $\boxed{a_p = \mathrm{E}\left(xb^p - a_1 b^{p-1} - a_2 b^{p-2} - \cdots - a_{p-1} b\right)}$. Si elle existe, la suite (a_n) est donc déterminée de manière unique.

• *Synthèse.* Le point précédent nous a fourni l'algorithme qui permet de définir les entiers a_p par récurrence. Il n'y a plus qu'à vérifier que cette suite convient. On considère donc la suite $(a_p)_{p\geqslant 1}$ définie par $a_1 = \mathrm{E}(xb)$ et $a_p = \mathrm{E}\left(xb^p - a_1 b^{p-1} - a_2 b^{p-2} - \cdots - a_{p-1} b\right)$ pour tout $p \geqslant 2$.
Nous allons démontrer successivement que :

(i) $\quad x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b^n}$;
(ii) pour tout $p \geqslant 1, 0 \leqslant a_p \leqslant b-1$;
(iii) la suite (a_p) n'est pas stationnaire à $b-1$.

(i) Pour $p \geqslant 2$, on a par définition de la partie entière,

$$a_p \leqslant xb^p - a_1 b^{p-1} - a_2 b^{p-2} - \cdots - a_{p-1} b < a_p + 1$$

ce qui donne en divisant par b^p,

$$\frac{a_p}{b^p} \leqslant x - \sum_{n=1}^{p-1} \frac{a_n}{b^n} < \frac{a_p+1}{b^p}, \quad \text{ou encore} \quad 0 \leqslant x - \sum_{n=1}^{p} \frac{a_n}{b^n} < \frac{1}{b^p} \quad (*).$$

Comme $\lim_{p\to+\infty} \frac{1}{b^p} = 0$, on en déduit que $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b^n}$.

(*ii*) Comme $x \in [0,1[$, $xb \in [0,b[$ et $0 \leqslant a_1 \leqslant b-1$. Soit $p \geqslant 2$. D'après $(*)$ écrite pour $p-1$ au lieu de p, on a

$$0 \leqslant x - \sum_{n=1}^{p-1} \frac{a_n}{b^n} < \frac{1}{b^{p-1}} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant xb^p - \sum_{n=1}^{p-1} a_n b^{p-n} < b,$$

après multiplication par b^p. Comme l'entier a_p est la partie entière de $xb^p - \sum_{n=1}^{p-1} a_n b^{p-n}$, on a bien $0 \leqslant a_p \leqslant b-1$.

(*iii*) Supposons, par l'absurde, qu'il existe $\mathrm{N} \geqslant 3$ tel que pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$, $a_n = b-1$. On a alors

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b^n} = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}-1} \frac{a_n}{b^n} + \sum_{n=\mathrm{N}}^{+\infty} \frac{b-1}{b^n} = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}-1} \frac{a_n}{b^n} + \frac{1}{b^{\mathrm{N}}} \frac{b-1}{1-1/b} \\ &= \sum_{n=1}^{\mathrm{N}-1} \frac{a_n}{b^n} + \frac{1}{b^{\mathrm{N}-1}}. \end{aligned}$$

Ainsi $x - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}-1} \frac{a_n}{b^n} = \frac{1}{b^{\mathrm{N}-1}}$, ce qui contredit l'inégalité $(*)$ pour $p = \mathrm{N}-1$.

Conclusion. Pour tout $x \in [0,1[$, il existe une unique suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ de $\mathcal{T}$ telle que

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b^n}. \quad \lhd$$

On écrit alors $x = 0{,}a_1a_2...a_n...$ et on parle du développement propre de x en base b. Pour $b = 10$ on parle du développement décimal, pour $b = 2$ du développement dyadique et pour $b = 3$ du développement triadique. Pour un réel positif quelconque, on rajoute sa partie entière décomposée en base b à gauche de la virgule. Enfin pour un réel négatif, on met un signe moins devant le développement de sa valeur absolue.

Il est naturel de se demander ce qui se passe si on autorise les suites stationnaires à 9, ou à $b-1$ dans le cas général. Un calcul aisé montre que $0, a_1a_2...a_p9999...$ avec $a_p < 9$ est en fait égal à $0, a_1...a_{p-1}a'_p$ avec $a'_p = a_p + 1$ (pour $0,9999...$ on obtient 1). C'est un nombre décimal, i.e. *un rationnel de la forme $\frac{a}{10^k}$, $a \in \mathbb{Z}$. Un nombre décimal (non nul) admet donc exactement deux développements : son développement propre, qui est fini, et un unique développement stationnaire à 9, qualifié d'impropre. Dans le cas d'une base b quelconque les rationnels de la forme $\frac{a}{b^k}$, qui admettent deux développements, sont parfois appelés rationnels b-adiques.*

L'exercice suivant est extrait du même oral que le précédent. Un nombre rationnel x est déterminé par un nombre fini d'informations, puisque si on l'écrit sous la forme a/b, les entiers a et b sont par exemple déterminés par leurs chiffres en base 10 qui sont en nombre fini. Le développement décimal de x va également être déterminé par un nombre fini de données : il est périodique.

1.2. Caractérisation des rationnels

Soit $x \in [0,1[$. Montrer que x est rationnel si, et seulement si, le développement décimal propre de x est périodique à partir d'un certain rang.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Nous allons encore démontrer le résultat en base $b \geqslant 2$ quelconque. Nous noterons $\mathcal{T}$ l'ensemble des suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$ de $[\![0, b-1]\!]$ non stationnaires à $b-1$. Nous savons qu'il existe une unique suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ de $\mathcal{T}$ telle que $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b^n} = 0{,}a_1a_2a_3...$

• Supposons tout d'abord le développement périodique à partir d'un certain rang : il existe $\mathrm{N} \geqslant 1$ et $d \geqslant 1$ tels que pour tout $n > \mathrm{N}$, $a_{n+d} = a_n$. On peut écrire

$$x = 0{,}a_1a_2\dots a_{\mathrm{N}}\underbrace{a_{\mathrm{N}+1}\dots a_{\mathrm{N}+d}}_{\text{période}}\underbrace{a_{\mathrm{N}+1}\dots a_{\mathrm{N}+d}}\cdots$$

On va simplement calculer la somme de la série définissant x en regroupant les termes par paquets. On convient ici que $\overline{a_{\mathrm{N}+1}a_{\mathrm{N}+2}\dots a_{\mathrm{N}+d}}$ désigne l'entier $a_{\mathrm{N}+d} + a_{\mathrm{N}+d-1}b + \cdots + a_{\mathrm{N}+1}b^{d-1}$ (c'est simplement l'écriture en base b de cet entier). On a alors

$$x = \frac{\overline{a_1\dots a_{\mathrm{N}}}}{b^{\mathrm{N}}} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\overline{a_{\mathrm{N}+1}a_{\mathrm{N}+2}\dots a_{\mathrm{N}+d}}}{b^{\mathrm{N}+kd}}.$$

La somme de la série géométrique $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{b^{kd}}$ vaut $\frac{1}{b^d-1}$ et on obtient donc

$$x = \frac{\overline{a_1\dots a_{\mathrm{N}}}}{b^{\mathrm{N}}} + \frac{\overline{a_{\mathrm{N}+1}a_{\mathrm{N}+2}\dots a_{\mathrm{N}+d}}}{b^{\mathrm{N}}(b^d-1)},$$

qui est bien rationnel. Par exemple, en base $b = 10$, le rationnel dont le développement est $0{,}456123123123...$ est $\frac{456}{10^3} + \frac{123}{10^3 \cdot 999}$.

• Inversement, supposons que x est rationnel et non nul (pour $x = 0$ le résultat est clair). Écrivons $x = \frac{p}{q}$ avec p et q dans $\mathbb{N}^*$ premiers entre eux. On va simplement appliquer l'algorithme donné dans l'exercice précédent, qui n'est rien d'autre que l'algorithme de division que l'on apprend dans les petites classes : tout le monde sait trouver le développement décimal de $\frac{9}{14}$. On multiplie 9 par 10 et on prend la partie entière qui vaut 6. C'est la première décimale après la virgule. On a alors $\frac{90}{14} - 6 = \frac{6}{14}$. On remultiplie par 10 et on obtient la deuxième décimale. C'est un 4. On continue ainsi et forcément, les numérateurs des fractions obtenues étant compris entre 1 et 13 on finit par tomber sur une fraction déjà obtenue. La suite devient périodique à partir de ce moment. Pour l'exemple de $\frac{9}{14}$ on obtient

$$\frac{9}{14} = 0{,}6\underbrace{428571}_{\text{période}}428571...$$

Dans le cas général, c'est pareil. La première décimale a_1 est la partie entière de $\frac{bp}{q}$, c'est-à-dire le quotient dans la division euclidienne de bp par q. Pour la seconde décimale on recommence alors avec $\frac{r}{q}$ où r est le reste de la division euclidienne de bp par q. Les restes modulo q étant compris entre 0 et $q-1$ la suite devient périodique à partir d'un certain rang. ◁

Le résultat de cet exercice fut établi par Wallis en 1693. Un problème intéressant est de déterminer la période. Nous invitons le lecteur à préciser les faits suivants. Dans le cas d'un rationnel b-adique (d'un décimal en base 10) le développement va être fini : dans l'algorithme ci-dessus on va obtenir un reste nul et à partir de ce moment toutes les décimales seront nulles. En fait dans ce cas, le développement est immédiatement donné par l'écriture en base b du numérateur. Par exemple, pour pour $x = \frac{17}{25}$ *et* $b = 10$, *on écrit* $x = \frac{17 \cdot 4}{10^2} = \frac{68}{10^2} = 0,68$. *Supposons maintenant que le dénominateur q de x est premier avec la base b. On va chercher le plus petit multiple de q de la forme* $b^d - 1$, *c'est-à-dire le plus petit exposant d telle que* $b^d \equiv 1\ [q]$. *Une telle puissance existe car la classe de b est inversible dans l'anneau* $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. *L'entier d recherché est l'ordre de cette classe dans le groupe des inversibles de* $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. *Par exemple si* $b = 10$ *et* $q = 7$, *on voit que* $\bar{3}$ *est d'ordre* 6 *dans* $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*$ *(c'est un générateur). La période des fractions* $\frac{p}{7}$, $1 \leqslant p \leqslant 6$ *est égale à* 6. *Par exemple,*

$$\frac{1}{7} = \frac{142857}{7 \cdot 142857} = \frac{142857}{999999} = \frac{142857}{10^6 - 1} = 0{,}142857142857142857...$$

Dans ce cas le développement du rationnel $\frac{p}{q}$ *est périodique dès le début. Supposons maintenant que le pgcd de* q *et* b *n'est pas égal à* 1. *On peut écrire* x *sous la forme* $\frac{p'}{b^{\mathrm{N}}q'}$ *avec* $\mathrm{pgcd}(b,q')=1$ *et* b *ne divisant par* p'. *On fait la division euclidienne de* p' *par* q' *pour se ramener à* $x=\frac{a}{b^{\mathrm{N}}}+\frac{r}{b^{\mathrm{N}}q'}$ *et on est ramené au cas précédent. Par exemple, si* $x=\frac{39}{280}$ *avec toujours* $b=10$, *on écrit*

$$\frac{39}{280}=\frac{39}{2^3\cdot 5\cdot 7}=\frac{39\cdot 25}{10^3\cdot 7}=\frac{975}{10^3\cdot 7}=\frac{139}{10^3}+\frac{2}{10^3\cdot 7}.$$

Le décimal $\frac{139}{10^3}$ *donne les trois premiers chiffres après la virgule et le développement devient périodique à partir du rang* 4 *:*

$$x=\frac{139}{10^3}+\frac{285714}{10^3\cdot(10^6-1)}=0{,}139285714285714...$$

L'énoncé suivant propose une première application des développements décimaux. On y utilise le procédé diagonal de Cantor pour démontrer que $\mathbb{R}$ *n'est pas dénombrable.*

1.3. Non-dénombrabilité de $\mathbb{R}$

Soit $f:\mathbb{N}^*\to[0,1[$. Pour chaque $k\geqslant 1$, on appelle u_k la k-ième décimale dans le développement décimal propre de $f(k)$ et on pose $v_k=0$ si $u_k=1$ et $v_k=1$ sinon. Montrer que $y=0{,}v_1v_2...v_n...$ n'a pas d'antécédent par f. Conclusion ?

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Écrivons l'un sous l'autre les développements des réels $f(n)$, pour $n\geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
f(1) &= 0,\ u_1\ \cdots\\
f(2) &= 0,\ \bullet\ u_2\ \cdots\\
f(3) &= 0,\ \bullet\ \bullet\ u_3\ \cdots\\
&\ \ \vdots \qquad\qquad \ddots\\
f(k) &= 0,\ \bullet\ \cdots\ \cdots\ \bullet\ u_k\cdots
\end{aligned}$$

Le réel $y=0{,}v_1v_2...v_n...$ est bien défini par son développement décimal propre car pour tout k, $v_k\neq 9$ (voir l'exercice 1.1). Par unicité du développement décimal propre on a $y\neq f(k)$ pour tout entier k

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com