С. А. АШМАНОВ

Математические модели и методы в экономике

МГУ

С. А. АШМАНОВ

Математические модели и методы в экономике

Допущено Министерством
высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов вузов,
обучающихся по специальности
«Экономическая кибернетика»

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА, 1980

УДК 51:330.115

Рецензенты:
Кафедра теоретической кибернетики
Новосибирского университета;
докт. физ.-мат. наук
А. А. ПЕТРОВ

Ашманов С. А.
Математические модели и методы в экономике. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980. — 199 с., 9 ил. Библиогр. 44 назв.

Пособие предназначено для первоначального знакомства с экономико-математическим моделированием и рассчитано на математически подготовленного читателя. Излагаются наиболее популярные классические модели Леонтьева, Неймана, Гейла, модель общего равновесия. Проводятся анализ свойств этих моделей и обсуждение экономических выводов из математических фактов. Заключительная часть книги посвящена теории производственных функций.

А $\frac{20204-090}{077(02)-80}$ 100—80 0601000000

Предисловие

Предлагаемое учебное пособие возникло на материале курса лекций, читавшегося автором в течение ряда лет на факультете вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета. Книга задумана как начальное пособие для студентов, специализирующихся в области прикладной математики. Цель пособия — дать представление об основных принципах построения математических моделей экономических процессов и явлений и о специфических с математической точки зрения методах их исследования.

Из всего многообразия экономико-математических моделей выбрано несколько наиболее содержательных и в то же время не слишком громоздких. На этих примерах показаны самые существенные проблемы, возникающие в процессе моделирования экономической реальности, и результаты, которые можно получить на этом пути. Автор не стремился к наибольшей общности получаемых математических фактов и теорем, пытаясь добиться прозрачности изложения и обращая особое внимание на возможные экономические интерпретации.

Относительно математического аппарата, используемого в книге, можно сказать следующее. Университетский курс математического анализа считается известным. Предполагается, что читатель знаком с основными фактами теории экстремальных задач: теорией двойственности в линейном программировании, принципом максимума Понтрягина для задач оптимального управления (на факультете ВМиК МГУ эти теории в той или иной степени входят в программу обязательных курсов). В связи с этим автор счел возможным ограничиться лишь формулировкой соответствующих теорем. В остальном изложение в книге замкнуто — все необходимые факты доказываются. Исключение составляет теорема Какутани о неподвижной точке многозначного отображения — ее доказательство не приводится, однако теорема активно используется.

Автор выражает признательность своим коллегам по кафедре исследования операций факультета ВМиК МГУ за постоянную помощь и внимание при работе над этой книгой.

Введение

Математическая экономика как самостоятельная наука, являющаяся частью прикладной математики, оформилась сравнительно недавно — за последние 20—30 лет. Вместе с тем если попытаться выяснить, когда в экономическую науку начали проникать математические идеи и методы, то придется обратиться к моменту возникновения экономических теорий — политической экономии.

Еще в середине XVIII в. лейб-медик короля Людовика XV Франсуа Кенэ предложил количественную модель национальной экономики, которую он назвал «Экономической таблицей». В первом фундаментальном труде по политической экономии — знаменитой книге Адама Смита «Исследование о природе и причинах богатства нации», изданной в Лондоне в 1776 г., — при внимательном чтении можно за характерными для того времени многословными рассуждениями увидеть изложение некоторых математически строгих закономерностей, присущих многим экономическим явлениям. В последующих работах экономистов XIX в. математические символы и способы описания стали применяться все более последовательно.

Плодотворность подхода к изучению законов экономического развития с помощью построения и исследования подходящей формальной (в той или иной степени) модели блестяще была продемонстрирована К. Марксом[1] при анализе построенных им схем простого и расширенного производства. К. Маркс прямо ставил вопрос

[1] См.: Маркс К., Энгельс Ф. Соч. Изд. 2-е. Т. 24.

о необходимости математически строгого вывода основных закономерностей капиталистического способа производства [2].

Большинство ученых-экономистов, стоявших у истоков зарождения математической экономики и наиболее последовательно придерживавшихся формально-математических способов описания и изучения различных экономических ситуаций, в силу исторических причин стояли на буржуазных позициях. Однако критический подход с позиций марксистско-ленинской теории позволил уже в XX в. отобрать все положительное из разработанных ими теорий и методов. Здесь следует сказать о том, что хотя многие результаты буржуазных ученых-экономистов относительно состояний равновесия экономики и путей оптимального развития были получены в применении к капиталистической экономике с учетом конкуренции и других особенностей капитализма, тем не менее наиболее естественное свое выражение они получают в плановом социалистическом хозяйстве, предоставляющем наилучшие возможности для претворения в жизнь практических рекомендаций, вытекающих из математической теории.

Упомянем книгу французского ученого А. Курно «Исследование о математических принципах теории богатств», вышедшую в свет в Париже в 1838 г., где впервые систематически используются математические методы. Выдающимся представителем математического направления в экономике того времени был Леон Вальрас. В своей книге, вышедшей в Лозанне в 1874 г., Вальрас писал: «Чистая теория экономики есть наука, напоминающая во всем физико-математические науки» [1, с. 71]. Заслугой Л. Вальраса является не только то, что он ясно определил роль и место математических методов в изучении экономии (об этом см. ниже), но и продемонстрировал практически их возможности. Его теория общего конкурентного равновесия являлась в течение многих лет движущим фактором развития этих методов.

Интересна мысль Л. Вальраса о соотношении математико-экономической теории с экономической практи-

---

[2] См.: Маркс К., Энгельс Ф. Соч. Изд. 2-е. Т. 33, с. 72.

кой. Так же, как в физико-математических науках, мы «должны взять из практики основные понятия такие, как обмен, спрос, предложение, рынок, капитал, доход, услуги, продукты. От этих реальных понятий надо абстрагироваться и определить соответствующие идеальные понятия. Обращение к действительности и практическому применению затем возможно только после создания теории...». «Я не утверждаю, что этим исчерпывается вся экономика. Например, сила и скорость также суть измеримые понятия, однако математическая теория силы и скорости не исчерпывает механики. Тем не менее теоретическая механика, несомненно, должна предшествовать прикладной. Точно так же чистая экономика должна предшествовать прикладной экономике...» [1, с. 71].

XX в. явился переломным в развитии математической экономики вследствие появления первого в мире социалистического государства с плановым хозяйством. На повестку дня встал вопрос о применении имеющихся методов планирования народного хозяйства и разработке новых. Так, уже в середине 20-х годов была предпринята попытка количественного описания существующей структуры народного хозяйства нашей страны с помощью метода, положенного позднее в основу межотраслевого баланса.

Проблема практического применения экономико-математического моделирования для задач планирования и управления общественным производством сложна и многогранна, и мы здесь не в состоянии осветить ее сколько-нибудь подробно.

Вопрос об адекватности математической модели описываемой экономической структуре содержит в себе все особенности и сложности аналогичного вопроса о моделировании вообще, идет ли речь о физической, математической или иной модели. Любая модель любого явления предполагает абстрагирование от многих реальных свойств объекта, его огрубление в разной степени, рассмотрение лишь основных его свойств, исходя из целей моделирования. В этом смысле всякая модель плоха и легко уязвима для критики.

Что же касается моделирования в экономике, то здесь реальный объект по своей сложности превосходит многие объекты физической природы. Вместе с тем проверка адекватности экономико-математической модели с помощью единственного критерия истины — практики — затруднена, поскольку практический эксперимент связан зачастую с колоссальными затратами и поэтому не всегда возможен.

Большое число математических моделей за последнее время успешно зарекомендовали себя, принося практический эффект. В первую очередь к ним следует отнести класс моделей линейного программирования типа задачи о раскрое, задачи о рационе, транспортной задачи и т. д. Правда, с нашей точки зрения эти модели скорее отвечают термину «технологическая модель», нежели экономико-математическая, ибо они, как правило, затрагивают лишь малый участок народного хозяйства и в них не возникает собственно экономических проблем типа вопроса об использовании структуры цен как рычага управления.

Опыт же практического применения более содержательных с экономической точки зрения экономико-математических моделей пока невелик. Так, первые подробные отчетные межотраслевые балансы производства и распределения продукции в народном хозяйстве СССР были составлены для 1959 и 1966 годов. В последнее время более интенсивно ведется моделирование народного хозяйства на отраслевом уровне средствами теории производственных функций.

Стремление приблизить экономико-математическое моделирование к реальности, сделать модели более «вычислимыми», учитывающими реально существующую статистику, ее доступность, непосредственно прослеживается в истории развития этой теории. Если модель общего равновесия Вальраса образца 1870 г. является полностью дезагрегированной, что делает ее чисто теоретической, то в моделях Леонтьева и Неймана дезагрегация не идет дальше понятия «отрасль», а производственная функция оперирует такими предельно агрегированными показателями, как национальный доход, объем основных ресурсов и т. д. Кроме перечисленных имеется большое число «промежуточных» моделей, описывающих разные участки народного хозяйства, отличающихся степенью подробности и другими свойствами, однако основные методологические приемы их построения и средства исследования имеют много общего с указанными классическими моделями.

На раннем этапе развития математической экономики в XVIII—XIX вв. основным математическим аппаратом, естественно, было дифференциальное и интегральное исчисление. С течением времени стала очевидной недостаточность этого аппарата.

Начиная с 30-х годов нашего столетия в экономику проникают новые методы исследования, связанные с понятиями выпуклых конусов, многозначных отображений, теоремой о неподвижной точке, теорией положительных матриц и т. д. Благодаря этому удалось существенно продвинуться в исследовании моделей и явлений, не поддавшихся изучению прежними методами. Вместе с тем характерной особенностью этого периода развития математической экономики является не только интенсификация работ над старыми проблемами, но и стремление распространить применение математических методов на ситуации совершенно нового типа — самым разительным примером является возникновение теории игр. В настоящее время три математические теории являются основным инструментом при исследовании экономико-математических задач. Мы имеем в виду линейное программирование, теоремы о неподвижной точке и теорию неотрицательных матриц. Все большую роль начинают играть различные формы принципа максимума в динамических задачах.

За последнее время вышло несколько монографий, посвященных той же теме, что предлагаемый курс лекций: Х. Никайдо [2], К. Ланкастера [3], М. Моришимы [4], Ю. Н. Черемных [5], В. Л. Макарова и А. М. Рубинова [6], М. Интрилигатора [7], И. А. Красса [8] и др. Одни из них посвящены определенной, узкой теме, другие, как книга Х. Никайдо, представляют собой энциклопедию современного состояния математической экономики.

Автор надеется, что знакомство с материалом лекций облегчит читателю изучение более полных руководств по теории математической экономики и позволит разобраться в большой массе конкретных практических моделей, которые все чаще используют при планировании в реальной экономике.

Обозначения

$\mathbf{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство.
Пусть $x \in \mathbf{R}^n$ — произвольный вектор, x_i — i-тая координата x, $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $|x|=(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$.
Через 0 обозначается как число, так и нулевой вектор.
(x, y) — скалярное произведение векторов x и y.
Мы пишем $x \geqslant y$ $(x > y)$, если $x_i \geqslant y_i$ $(x_i > y_i)$ для всех i.
$\mathbf{R}_+^n$ — множество всех $x \in \mathbf{R}^n$, $x \geqslant 0$.
$\mathbf{R}_-^n$ —множество всех $x \in \mathbf{R}^n$, $x \leqslant 0$.
Пусть $A=(a_{ij})$ — произвольная $(m \times n)$-матрица (m строк, n столбцов). Тогда a_i — i-тая строка матрицы A, а a^j — j-тый столбец матрицы A.
A' — матрица, транспонированная к A.
$A \geqslant 0$ означает, что все элементы матрицы A неотрицательны.
Через I обозначаем единичную $(n \times n)$-матрицу.

Введем также не столь общепринятое, но весьма для нас удобное обозначение (см. [16]): пусть $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $y \neq 0$.

Положим $x//y = \max\limits_{\rho y \leqslant x} \rho$. Например, если $x=(0, 1, 2, 0)$, $y=(0, 2, 1, 1)$, то $x//y=0$. Для $x_1=(0, 1, 2, 0)$, $y_1=(0, 2, 1, 0)$: $x_1//y_1 = {}^1/_2$.

Отметим сразу же три очевидных свойства символа $//$:

а) $\lambda x // \mu y = \lambda \mu^{-1} x // y$ для λ, $\mu > 0$;
б) $x//y$, $y \leqslant x$;
в) если $x^n \to x^0 > 0$, то $y//x^n \to y//x^0$.

Часть I

ЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ ПРОИЗВОДСТВА

Математическое введение. Линейное программирование

Рассмотрим следующие задачи:

$$\text{(I)}\quad \begin{aligned} &\max\,(c, x),\\ &xA \leqslant b,\\ &x \geqslant 0. \end{aligned} \qquad\qquad \text{(II)}\quad \begin{aligned} &\min\,(b, y),\\ &Ay \geqslant c,\\ &y \geqslant 0. \end{aligned}$$

Задачи I и II называются двойственными. Каждая из этих задач называется допустимой, если множество векторов, удовлетворяющих ограничениям этой задачи, не пусто.

Теорема двойственности. Если обе задачи I и II допустимы, то они имеют решения x^* и y^* соответственно; $(c, x^*) = (b, y^*)$, причем если $(x^*A)_i < b_i$, то $y_i^* = 0$ и если $(Ay^*)_j > c_j$, то $x_j^* = 0$. Наоборот, если x^* и y^* удовлетворяют ограничениям задач I и II соответственно и $x_j^* = 0$, как только $(Ay^*)_j > c_j$, $y_i^* = 0$, как только $(x^*A)_i < b_i$, то x^* — решение задачи I, y^* — решение задачи II.

Основными понятиями в теории линейного программирования являются понятия выпуклого множества и выпуклого конуса.

Определение. Подмножество X пространства $\mathbb{R}^n$ называется выпуклым конусом, если вместе с любыми своими точками x, $x' \in X$ оно содержит также любую их неотрицательную линейную комбинацию: $\alpha x + \beta x' \in X$, α, $\beta \geqslant 0$.

Приведем один из многочисленных фактов об отделимости выпуклых множеств, играющих важную роль в линейном программировании.

Лемма В.1. Пусть X — замкнутый выпуклый конус в $\mathbf{R}^n$, имеющий только нулевое пересечение с неположительным ортантом: $X \cap \mathbf{R}^n_- = 0$. Существует вектор $p \in \mathbf{R}^n$ с положительными координатами ($p > 0$), для которого $(p, x) \geqslant 0$ при любом $x \in X$.

Глава 1

МОДЕЛЬ ЛЕОНТЬЕВА И ТЕОРИЯ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ МАТРИЦ

§ 1. Схема межотраслевого баланса

Основой многих линейных моделей производства является схема межотраслевого баланса. Не останавливаясь на истории возникновения этого метода, отметим, что его идея впервые в явном виде была сформулирована в работах советских экономистов в 20-х годах и получила затем развитие в трудах В. В. Леонтьева по изучению структуры американской экономики (см. [9]).

Схеме межотраслевого баланса и ее различным модификациям посвящена обширная литература. Для обстоятельного знакомства с ней можно рекомендовать книги [10, 11, 12], здесь же изложен упрощенный вариант с сохранением основного математического содержания.

Пусть весь производственный сектор народного хозяйства разбит на n чистых отраслей. Слова «чистая отрасль» означают, что продукция каждой из этих отраслей предполагается однородной. Чистая отрасль есть некая экономическая абстракция, не обязательно существующая реально в виде каких-то организационных форм типа министерства, треста, объединения. Так, например, под отраслью «электроэнергетика» можно понимать совокупность всех электростанций вне зависимости от их ведомственной принадлежности. Несомненно, что включение в схему межотраслевого баланса только чистых отраслей затрудняет его непосредственное применение, поскольку на практике планирование и отчетность осуществляются в рамках существующих организационных структур. Однако подобная идеализация оправдана тем, что, с одной стороны, она позволяет провести детальный анализ сложившейся технологической структуры общественного производства и распределения, а с другой — тем, что опыт, накопленный при изучении данной упрощенной схемы, привел к построению более содержательных моделей, таких, например, как модель Неймана.

Возвращаясь к описанию схемы межотраслевого баланса, предположим, что каждая отрасль выпускает продукт только одного типа и разные отрасли выпускают разные продукты. Таким образом, в рассматриваемой нами производственно-экономической системе выпускается n видов продуктов.

В процессе производства своего вида продукта каждая отрасль нуждается в продукции других отраслей.

Допустим теперь, что в некоторый момент времени, скажем, в году T_0, составлен балансовый отчет по народному хозяйству по итоговым данным за фиксированный период времени (например, за прошедший год) по следующей форме:

№ отрасли	1	2	...	n	Валовый выпуск	Конечное потребление
1	$\bar{a}_{11}$	$\bar{a}_{12}$	...	$\bar{a}_{1n}$	$\bar{v}_1$	$\bar{c}_1$
2	$\bar{a}_{21}$	$\bar{a}_{22}$	...	$\bar{a}_{2n}$	$\bar{v}_2$	$\bar{c}_2$
...	...	...	...	...	...	...
n	$\bar{a}_{n1}$	$\bar{a}_{n2}$	...	$\bar{a}_{nn}$	$\bar{v}_n$	$\bar{c}_n$
	$\sum_{i=1}^{n} \bar{a}_{i1}$	$\sum_{i=1}^{n} \bar{a}_{i2}$	...	$\sum_{i=1}^{n} \bar{a}_{in}$		

Числа от 1 до n в данной таблице означают номера отраслей. Величина $\bar{a}_{ij}$ показывает объем продукции отрасли с номером j, израсходованной отраслью i в процессе производства за отчетный период. Число $\bar{v}_i$ равно общему объему продукции (валовому выпуску)

i-той отрасли за тот же период, а значение $\bar{c}_i$ показывает объем продукции i-той отрасли, который был потреблен в непроизводственной сфере, для создания запасов и т. д.

Числа $\bar{a}_{ij}$, $i=1, 2, ..., n$, показывают распределение продукции отрасли j на производственные нужды других отраслей.

Балансовый характер этой таблицы выражается в том, что должны выполняться соотношения

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{a}_{ij} = \bar{v}_j - \bar{c}_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Единицы измерения всех указанных величин могут быть либо натуральными (тонны, штуки, квт·ч и т. д.), либо стоимостными, в зависимости от чего различают натуральный и стоимостный межотраслевой баланс. Для определенности мы в дальнейшем будем иметь в виду натуральный баланс.

Если все элементы i-той строки данной таблицы поделить на величину $\bar{v}_i$, то число $a_{ij}=\bar{a}_{ij}/\bar{v}_i$, можно понимать, как объем продукции j-той отрасли, потребный для производства одной единицы продукта отрасли с номером i; число $c_i=\bar{c}_i/\bar{v}_i$, $i=1, 2, ..., n$, — как долю продукции i-той отрасли, пошедшую на непроизводственное потребление.

Числа a_{ij}, $j=1, 2, ..., n$, в некотором смысле полностью характеризуют технологию i-той отрасли в отчетный период: при данной структуре затрат и их объеме оказался возможным выпуск единицы продукции.

Числа a_{ij}, $j=1, 2, ..., n$, носят название коэффициентов прямых затрат отрасли с номером i.

Матрица $A=(a_{ij})$ несет много информации о сложившейся структуре межотраслевых связей, о существующей технологии общественного производства. Сравнивая такие матрицы, составленные в достаточно разнесенные моменты времени, можно проследить направления изменения и развития технологии. Весьма интересные наблюдения и выводы, полученные на этом пути, касающиеся экономики США, можно найти в [13].

Однако еще более интересные возможности открываются в связи с идеей использования матрицы A для текущего и долгосрочного планирования и прогнозирования производства.

Сделаем два важных предположения.

Первое из них состоит в том, что мы будем считать сложившуюся технологию производства неизменной в течение некоторого промежутка времени $[T_0, T]$, где $T > T_0$. В зависимости от постановки задачи промежуток $[T_0, T]$ может быть равен одному календарному периоду (скажем, году) или нескольким.

Второе предположение состоит в постулировании свойства линейности существующей технологии. Именно, будем считать, что для осуществления объема x_i валового выпуска продукции отрасли i необходимо и достаточно произвести затраты в объемах $x_i a_{ij}$, $j=1, 2, \ldots, n$, продукции всех отраслей. Конечно, каждое из этих предположений является очередной идеализацией реального положения вещей. Так, требование линейности означает, в частности, что каждая отрасль способна произвести любой объем своей продукции, при условии, что ей будет обеспечено сырье в необходимом количестве. На самом деле, конечно, это не так, ибо производственные возможности всякой отрасли ограничены имеющимся объемом трудовых ресурсов и основных фондов — станков, производственных площадей и т. д. Позднее этот недостаток описываемой модели будет частично устранен, когда мы будем рассматривать ее динамический вариант.

Будем говорить, что матрица $A=(a_{ij})$ описывает технологию при единичной интенсивности работы всех отраслей.

Допустим, что в промежуток времени $[T_0, T]$ все отрасли будут работать таким образом, что отрасль с номером i произведет объем x_i валового выпуска своей продукции, $i=1, 2, \ldots, n$. Скажем, что i-тая отрасль при этом работает с интенсивностью x_i. Обозначим через x вектор валового выпуска (интенсивностей), $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Воспользовавшись предположением о линейности, нетрудно подсчитать часть общего валового выпуска, пошедшего на производственные нужды в процессе выпуска. Эта часть описывается вектором

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}x_1, \sum_{i=1}^{n} a_{i2}x_2, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_{in}x_n\right).$$

Переходя к матричным обозначениям, имеем, что вектор производственных затрат равен xA. Тогда свободный остаток, равный $c=x-xA$, будет использован на непроизводственные цели.

Основной вопрос, возникающий в планировании производства на период $[T_0, T]$, однако, формулируется, как правило, наоборот: при заданном векторе c конечного потребления требуется определить необходимый вектор x валового выпуска. Другими словами, требуется решить систему уравнений

$$x - xA = c \tag{1.1}$$

при заданном векторе c и матрице A.

Уравнение (1.1) вместе с изложенной интерпретацией матрицы A и векторов x, c называется **моделью Леонтьева.**

§ 2. Линейная модель обмена. Обсуждение математических проблем модели Леонтьева и модели обмена

Здесь мы рассмотрим простую линейную модель обмена, которую мы чисто условно назовем моделью международной торговли. Ее математическая формулировка близка к модели Леонтьева (1.1).

Рассмотрим n стран, торгующих друг с другом. Будем считать, что весь национальный доход π_i страны с номером i складывается от продажи своих товаров либо внутри страны, либо другим странам. Предположим также, что мы имеем дело с уже сложившейся структурой международной торговли, а именно, что доля a_{ij} дохода π_i i-той страны, которая тратится на покупку товаров (импорт) у страны с номером j, постоянна; в частности, она не зависит от величины π_i этого дохода. Эта гипотеза есть не что иное, как вновь предположение о линейности модели, ограничительность которого в данном случае также ясна, поскольку очевидно, что в действительности существует постоянная компонента дохода всякой страны (идущая на самые основные нужды), мало зависящая от общей величины дохода.

Обозначим матрицу, составленную из чисел a_{ij}, описывающих структуру торговли, через A, $A=(a_{ij})$, вектор доходов π_i, $i=1, 2, \ldots, n$, — через π, $\pi=(\pi_1, \pi_2, \ldots,$