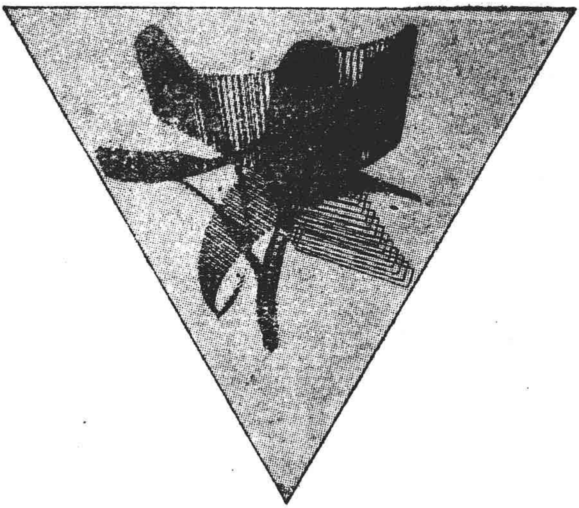
新訂 数学 IIA

小平邦彦 編

昭和48年 4 月10日文部省検定済
昭和51年 4 月10日改訂検定済
高等学校数学科用

新訂 数学 IIA

小平邦彦 編



東京書籍株式会社

別記著作者

東京大学名誉教授 学習院大学教授	小平邦彦
東京大学教授	森口繁一
東京大学教授	岩堀長慶
一橋大学教授	松坂和夫
東京教育大学教授	前原昭二
東京大学教授	藤田　宏
成蹊大学教授	志村利雄
宮城教育大学教授	鶴丸孝司
杏林大学教授	伊藤豊吉
都立田無工業高校教諭	番場参策
都立田園調布高校教諭	山崎和郎
都立戸山高校教諭	三瀬茂利
都立西高校教諭	渋谷幸敏
都立小石川工業高校教諭	八木恒雄
お茶の水女子大学付属高校教諭	石田光子

東京書籍株式会社編集部

表紙　勝井三雄　　カット　日科技研 電子計算機センター

新訂 数学IIA

数II 435

昭和52年1月20日印刷

昭和52年2月10日発行

昭和48年4月10日文部省検定済

昭和51年4月10日改訂検定済

著作者　小平邦彦

ほか14名（別記）

発行者　東京書籍株式会社

代表者　鈴木和夫

東京都台東区台東1丁目5番18号

印刷者　東京書籍印刷株式会社

代表者　與賀田辰雄

東京都北区堀船1丁目23番31号

発行所　**東京書籍株式会社**

東京都台東区台東1丁目5番18号

電話 東京(03)835局6111(代表)

郵便番号110

定価　文部大臣が認可し官報で告示した定価

（上記の定価は、各教科書取次供給所に表示します）

はじめに

本書は高等学校数学Iの学習を終わった諸君のため，それに続く数学の教科書として編集したものである。

数学Iのはじめに述べたように，数学者はおよそ考えることの可能なものをすべて自由に考えるのであって，数学は人間精神の自由な創造物であるといわれる。一方，数学はいろいろな学問の分野に広く応用されて，実に不思議なほど役にたつのであって，数学は森ら万象の根底をなしているのではないかと思われるのである。

本書の第I章では行列について学ぶ。行列は数字または文字を長方形または正方形に並べたものにすぎないが，これを行列とよぶとき，行列は一つの量を表していると考えるのであって，数の場合と同様に，行列の加法，減法，乗法などの演算が定義される。行列は数学だけでなく，物理学においても基本的に重要な役割を演ずる。現代の物理学では，いろいろな量が原理的には，数でなく行列によって表されると考えるのである。ここに，数学が森ら万象の根底をなすということの一端が現れているといえよう。

第II章では微分法について，第III章では積分法について学ぶ。一つの関数から，その変化の割合を表す関数を求めることが微分法であり，逆に変化の割合を表す関数から，もとの関数を求めるのが積分法である。

微分法の応用としては関数の極大・極小の求め方などを，積分法

の応用として，面積や体積の計算などを扱う。17世紀の後半に，ニュートンやライプニッツによってはじめられた微積分法の応用によって，18世紀以降科学技術が驚異的進歩を遂げたのである。

個々にはでたらめに起こる現象も，これを多数観察すると，全体としてある数学的法則に従う。このような法則を扱うのが確率論であり統計学である。第Ⅳ章の第1節で確率論について学ぶ。確率論の初歩は数学Ⅰで学んだ。この第1節はその続きである。第2節では統計を扱う。

最近における電子計算機の発達はめざましく，広く各方面で使用されるようになった。高級の電子計算機はおどろくべき計算能力をもつが，それを有効に能率よく使うには，あらかじめ計算の手順をよく考えて定めておかなければならない。この計算の手順を表すのが流れ図である。本書の最後の第Ⅴ章で電子計算機の機能と流れ図について学ぶ。

数学を学ぶには，本を読んで覚えるだけでは不十分であって，自分でよく考え，計算をしたり問題を解いてみたりすることがたいせつである。

表紙と各扉のカットについて

表紙や各扉のカットは，電子計算機（コンピューター）による自動製図プログラムシステムにより制作したものです。

たとえば，II章のカットは，円周上の1点が，もう1つの固定された円の上をころがってできる軌跡の上を，長方形が移動したものです。また，V章のカットは，長方形を縮小させながらある曲線に沿って回転させたものです。

目次

Ⅰ章　行列

Ⅱ章　微分とその応用

Ⅲ章　積分とその応用

付録

凡例

[例]　本文の理解を助けるために具体例を示したものです。

例題　内容を理解するための代表的な問題を，例題としてあげました。わく囲みの〔解〕や〔証明〕は，模範解を示したものです。

[注意]，*)　注意や欄外の脚注で，理解を助ける説明を補いました。

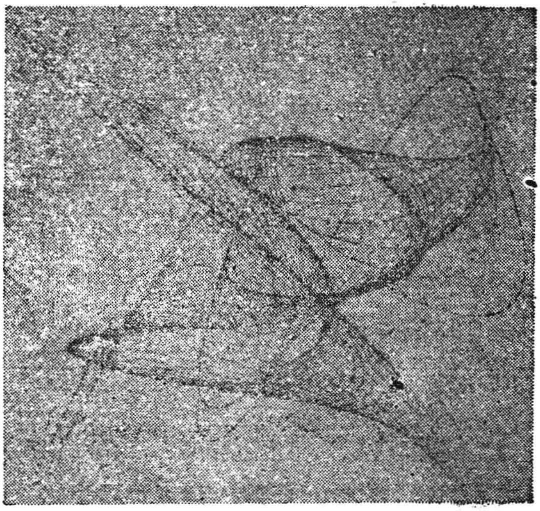
問　学習した内容をすぐ身につけるための設問と，導入のための設問を本文中で問にしました。

問題　各節末に，その節で学んだことがらを練習するための問題を設けました。

練習問題　各章末に，その章全体の復習と応用の問題を掲げました。Aは基本的なものを主とし，Bはやや程度の高い問題となっています。

付録　巻末の補充問題は，さらに学習内容の進んだ箇所です。

I・行列

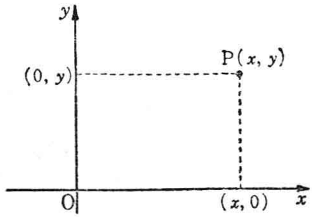


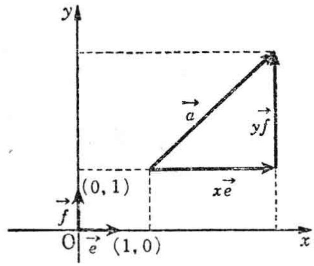
1節　行列

1　行列の意味

平面上に座標軸を設ければ，平面上の任意の点Pは2つの実数の組 $(x,\ y)$ によって表される。

また，その平面上の任意のベクトル $\vec{a}$ も，それを成分表示すれば，やはり2つの実数の組 $(x,\ y)$ によって表される。





問1　次の成分表示をもつベクトルを，原点を始点として図示せよ。

(1)　$(2,\ 1)$　　　(2)　$(1,\ -3)$

この章では，さらに進んで，いくつかの数を長方形状に配列することによって表されるものについて考えてみよう。

例 1　次の表は，2つの町P，Qにおけるある年度の電力使用量を調べたものである。

	4月～6月	7月～9月	10月～12月	1月～3月
P　町	1018	1222	1065	1125
Q　町	778	918	877	807

（単位　万キロワット時）

このような調査を毎年行うとすれば，上の表の数値のところだ

けを空欄にした表をいくつも用意しておいて，それに毎年の使用量を書き込めばよい。書き込む数だけを取りだせば，次のような8個の数の長方形状の配列となる。

1018	1222	1065	1125
778	918	877	807

例1のような数の配列にまとまりをつけるため，ふつう次のように両側をかっこで囲んで表す。

$$\begin{pmatrix} 1018 & 1222 & 1065 & 1125 \\ 778 & 918 & 877 & 807 \end{pmatrix} \tag{1}$$

例 2　3つの要素 e_1, e_2, e_3 をもつ集合 X の3つの部分集合 $S_1 = \{e_1,\ e_2\}$, $S_2 = \{e_1,\ e_3\}$, $S_3 = \{e_3\}$ が指定されているとする。

要素＼集合	S_1	S_2	S_3
e_1	①	1	0
e_2	1	0	$\boxed{0}$
e_3	0	1	1

このとき，どの要素がどの部分集合に属しているかを上のような表で示すことができる。この表では，e_i の横の欄と S_j の縦の欄とが交差する位置に，$e_i \in S_j$ であるときには1，そうでないときには0が書き込まれている。

たとえば，上の表の①は $e_1 \in S_1$ であること，$\boxed{0}$ は $e_2 \notin S_3$ であることを示している。

この表から，数値だけを取りだせば

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

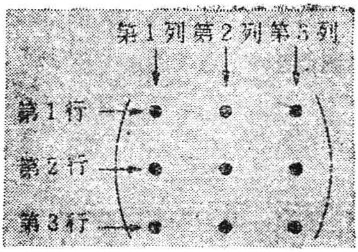
という配列が得られる。

(1) や (2) のように，いくつかの数を長方形状に配列したものを**行列**という。行列を，たとえば

$$A=\begin{pmatrix} 1018 & 1222 & 1065 & 1125 \\ 778 & 918 & 877 & 807 \end{pmatrix}$$

のように，1つの大文字を用いて表す。

行列において，数の横の並びを**行**とよび，上から順に第1行，第2行，……という。また縦の並びを**列**とよび，左から順に第1列，第2列，……という。



(1)の行列は2つの行と4つの列とをもっている。このような行列を，**2行4列**の行列，または**2×4型**の行列という。同様に，(2)のような行列を，**3行3列**の行列，または**3×3型**の行列という。

特に，行と列の個数が等しい行列を**正方行列**といい，2×2型の行列を**2次**の正方行列，3×3型の行列を**3次**の正方行列ともいう。

問2　次の行列の型をいえ。また，正方行列があれば指摘せよ。

(1) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 5 & 1.5 \\ 4 & 2.7 \\ 3 & 3.6 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$　(4) $(1 \quad -2)$

1行だけからなる行列を**行ベクトル**といい，たとえば，それが1×4型の行列であるならば，**4次元**の行ベクトルという。同様に，1列だけからなる行列を**列ベクトル**といい，たとえば，3×1型の行列を**3次元**の列ベクトルという。行ベクトルと列ベクトルとを合わせて，**数ベクトル**または単に**ベクトル**という。

例 3　$(2 \ \ -5 \ \ \sqrt{10})$ は3次元の行ベクトル

$\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$ は2次元の列ベクトル

問 3　次のベクトルの次元をいえ。また，行ベクトルと列ベクトルの区別をいってみよ。

(1)　$(12 \ \ 22)$　　(2)　$\begin{pmatrix} 25 \\ 40 \\ 2 \end{pmatrix}$　　(3)　$(1 \ \ -2 \ \ 3 \ \ -4)$

行列の第1行，第2行，……を，第1行ベクトル，第2行ベクトル，……ともいう。列についても同様である。

問 4　例2の行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の第1，第2，第3行ベクトルを書け。また，第1，第2，第3列ベクトルを書け。

一般に，行列 A の第 i 行と第 j 列の交差点にある数を，A の (i, j) **成分** または (i, j) **要素** という。

例 4　右の 2×3 型の行列で

$(1, 1)$ 成分は　13

$(1, 2)$ 成分は　-5

$(2, 3)$ 成分は　0

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \text{第1列} & \text{第2列} & \text{第3列} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{第1行} \rightarrow \\ \text{第2行} \rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} 13 & -5 & 2 \\ 9 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

一般の行列 A を表すのに，その (i, j) 成分を a_{ij} のように書くことがある。この記法によれば，たとえば 2×3 型の一般の行列は

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

のように表される。

2つの行列 A, B が同じ型で，しかも対応する成分がそれぞれ等しいとき，A, B は**等しい**という。このとき

$$A = B$$

と書く。

例 5　$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & c \\ 2 & d \end{pmatrix}$ は，$a=-1$, $b=2$, $c=0$, $d=1$

であることと同値である。

問 5　$\begin{pmatrix} x & 2y \\ z & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u & u \\ 1 & 2x \end{pmatrix}$ のとき，x, y, z, u の値はそれぞれいくらか。

2　行列の加減と実数倍

行列の加法・減法

例 1　次の表は，ある工場における製品の生産量を4月と5月について調べたものである。製品にはP，Qの2種類があり，製造工場には，第1工場と第2工場の2つがある。（単位はトン）

4　月	P	Q
第1工場	5.7	2.4
第2工場	8.5	4.3

5　月	P	Q
第1工場	6.0	2.2
第2工場	8.2	4.5

上の表から，4月，5月を合わせた生産状況を調べると

第1工場における製品Pの生産量は　$5.7+6.0=11.7$

第2工場における製品Qの生産量は　$4.3+4.5=8.8$

などとなる。これらをまとめれば

4月・5月	P	Q
第1工場	11.7	4.6
第2工場	16.7	8.8

すなわち，4月と5月の生産状況を表す2つの行列

$$\begin{pmatrix} 5.7 & 2.4 \\ 8.5 & 4.3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 6.0 & 2.2 \\ 8.2 & 4.5 \end{pmatrix}$$

のそれぞれ対応する成分を加えることによって，両月を合わせた生産状況を表す行列

$$\begin{pmatrix} 5.7+6.0 & 2.4+2.2 \\ 8.5+8.2 & 4.3+4.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11.7 & 4.6 \\ 16.7 & 8.8 \end{pmatrix}$$

が得られる。

上の例の考えにもとづいて，同じ型の行列 A と B の和 $A+B$ を次のように定める。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

に対して

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$$

行列の和

他の同じ型の行列の場合も同様である。

注意　行列 A, B の和 $A+B$ は，A, B が同じ型である場合にだけ定義される。たとえば，2×2 型の行列と 2×3 型の行列とを加えることはできない。

問1 次の行列 A, B の和を求めよ。

(1) $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$

(2) $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ \sqrt{2} & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

(3) $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\\ 3 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 0 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

(4) $A=(-7\ \ 5\ \ -3\ \ 2)$, $B=(2\ \ -3\ \ -5\ \ 7)$

行列の加法については，次の法則が成り立つ。

$$A+B=B+A \qquad \text{(交換法則)}$$

$$(A+B)+C=A+(B+C) \qquad \text{(結合法則)}$$

また，行列の加法で，数の0に相当するものは，すべての成分が0である行列である。このような行列を**零行列**という。たとえば

$$2\times 2\text{ 型の零行列は}\quad \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$2\times 3\text{ 型の零行列は}\quad \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

これらは行列として等しくはないが，混同するおそれがなければ，いずれも O で表す。

明らかに，任意の行列 A に対して

$$A+O=O+A=A$$

ただし，O は A と同じ型の零行列である。

A, B が同じ型の行列であるとき，$B+X=A$ を満たす行列 X を A から B を引いた**差**といい，$A-B$ と書く。