Lecture Notes in
Mathematics

1197

Ring Theory

Springer-Verlag

Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

1197

Ring Theory

Proceedings of an International Conference
held in Antwerp, April 1–5, 1985

Edited by F.M.J. van Oystaeyen

Springer-Verlag

Editor

Freddy M.J. van Oystaeyen
Department of Mathematics and Computer Science
University of Antwerp U.I.A.
Universiteitsplein 1, 2610 Wilrijk, Belgium

Mathematics Subject Classification (1980): 16·06

ISBN 3-540-16496-0 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
ISBN 0-387-16496-0 Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin

Printing and binding: Beltz Offsetdruck, Hemsbach/Bergstr.

Foreword

Primarily, the "Contact Franco-Belge en Algèbre" aims to continue and create contacts between French and Belgian algebraists, in particular ring theorists. It is hoped that such meetings will continue to be organized alternately in France and in Belgium and that the scope of these meetings can be extended so as to contain all areas of Algebra represented in both countries.

Of course it is quite obvious that the development of any area in mathematics cannot benefit too much from a cooperation when the nationalities of the contributors would be restricted.

Therefore, several mathematicians from abroad were invited to participate in this meeting and on the scientific level we were striving to obtain a picture of contemporary "Ring Theory" as varied and broad as possible. The boundaries of ring theory have always been fuzzy, or unclear to say the least, but what else can one expect from an object rooting in group theory, number theory, physics, representation theory, analysis, operator theory etc... . Now recently the unbiased observer may find that so-called ring theory has developed several branches that could equally well be termed homological algebra, sheaf theory, K-theory, field theory, geometry, differential operator theory etc... . This gives another explanation for using the word "Algèbre" in the title of the meeting, but any way : "what's in a name ?".

Acknowledgement.

The Ring Theory meeting organized at the University of Antwerp from April 1 till April 5 1985, was supported by the following institutions :

The National Foundation for Scientific Research (N.F.W.O.), the University of Antwerp U.I.A., the Ministries of National Education of the Flemish and the Francophone comunities in Belgium.

Contents.

ACTION DE GROUPES SUR $A_1(\mathbb{C})$

J. ALEV
Université de PARIS VI

Introduction. Soit k un corps de caractéristique nulle et algébriquement clos. Le groupe G des k-automorphismes d'un anneau de polynômes $k[X_1,X_2,\ldots,X_n]$ sur k a été l'objet d'une étude très détaillée. La description de G n'est pourtant complète que pour $n = 1$ ou 2. Le problème analogue en algèbre non commutative a aussi été étudié ; les résultats sont actuellement très partiels. Dans le cadre des algèbres enveloppantes, la non commutativité peut laisser espérer que le groupe en question soit engendré par ses sous-groupes les plus naturels. M. Smith montre en effet que pour les algèbres de Lie résolubles, c'est le cas en dimension 2 ou 3, (voir [SM]). Dans le cas $sl(2,\mathbb{C})$, A. Joseph montre qu'il existe des automorphismes non modérés, (voir [Jo]). En utilisant d'une part les résultats de [Di] et d'autre part une méthode analogue à celle de [Na], nous montrons dans [A3] qu'il existe des automorphismes non modérés dans $\mathcal{U}(g)$, pour g nilpotente non abélienne de dimension 3. Il nous faut pour cela préciser la structure de $\mathrm{Aut}_k(A_1(k))$, où $A_1(k)$ désigne l'algèbre de Weyl sur k. La connaissance de $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(A_1(\mathbb{C}))$ permet ensuite d'étudier les invariants de $A_1(\mathbb{C})$ par des groupes finis d'automorphismes. En effet, d'une part on peut se ramener au cas des sous-groupes finis de $SL(2,\mathbb{C})$, lesquels sont classifiés à conjugaison près, et d'autre part on peut utiliser les résultats de O. Riemenschneider (voir [Rie]) pour remonter les informations du niveau du gradué associé à l'algèbre des invariants elle-même.

Nous résumons les propriétés de ces algèbres d'invariants en appliquant les nombreux résultats de transfert qui existent dans la littérature. Malheureusement, les divers invariants considérés coïncident avec ceux de $A_1(\mathbb{C})$, de sorte que ces algèbres d'invariants sont difficiles à séparer. Nous pourrons les distinguer dans le cas particulier des invariants sous un groupe cyclique. Dans les corps d'invariants, on peut montrer que 1 est somme de crochets de Lie, ce qui donne des chances d'une réponse positive à la question de savoir si ces sous-corps de D_1 sont isomorphes à D_1. Signalons enfin les travaux de G. Bergman (voir [Be]), E. Formanek et L. Le Bruyn sur les groupes d'automorphismes des algèbres de matrices génériques.

1. Automorphismes.

1.1 Soit k un corps de caractéristique nulle et algébriquement clos et $k[X_1,X_2,\ldots,X_n]$ l'algèbre des polynômes à n indéterminées sur k, $n>1$. Posons $G = \mathrm{Aut}_k\, k[X_1,X_2,\ldots,X_n]$. Posons $n=1$, la détermination de G est triviale. Pour n quelconque, G contient deux sous-groupes A et B d'automorphismes "simples".

$$A : \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \to M \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}, \quad M \in GL(n,k), \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} \in k^n$$

(A : automorphismes affines)

$$B : \begin{aligned} X_1 &\to \alpha_1 X_1 + \beta \\ X_2 &\to \alpha_2 X_2 + P_1(X_1) \\ &\vdots \\ X_n &\to \alpha_n X_n + P_{n-1}(X_1,X_2,\ldots,X_{n-1}), \quad \alpha_i \neq 0, \ \beta \in k, \\ & \qquad P_j(X_1,\ldots,X_j) \in k[X_1,X_2,\ldots,X_j] \end{aligned}$$

(B : automorphismes de Jonquières).

Le sous-groupe de G engendré par $A \cup B$ s'appelle le groupe des automorphismes modérés. Les résultats de [Ju],[Na],[Re],[Sa],[Va] montrent que pour $n=2$, tout automorphisme est modéré. De plus, dans ce cas on a une décomposition de G comme somme amalgamée de A et B suivant leur intersection. Bien que pour $n \geq 3$ il ne soit pas possible d'avoir une structure de somme amalgamée, la question suivante semble être toujours ouverte.

Question. Pour $n>3$, tout élément de G est-il modéré ?

1.2 Dans le cadre des algèbres non commutatives la même question se pose dès qu'on a précisé les automorphismes "simples". Pour les algèbres enveloppantes d'algèbres de Lie résolubles il y aura les automorphismes de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ provenant des automorphismes de $\mathfrak{g}$ modifiés par des translations et les automorphismes triangulaires respectant la suite dérivée de $\mathfrak{g}$. Dans cet ordre d'idées, tout automorphisme de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est modéré pour $\mathfrak{g}$ résoluble non nilpotente de dimension 2 ou 3, (voir [Sm]). Pour $\mathcal{U}(sl(2,\mathbb{C}))$ les automorphismes simples seront les automorphismes qui fixent un élément de $sl(2,\mathbb{C})$; on peut alors construire un automorphisme non modéré, (voir [Jo]). Nous verrons dans 1.4 le cas de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{g}$ nilpotente non abélienne de dimension 3. Pour le cas de l'algèbre des matrices génériques qui est un quotient de

l'algèbrelibre, G. Bergman considère comme simples les automorphismes qui proviennent d'automorphismes modérés de l'algèbre libre définis comme dans 1.1. Il montre en particulier que si $k[X,Y]$ désigne l'algèbre de 2 matrices génériques 2×2, l'automorphisme défini par :

$$\begin{cases} X \to X + [X,Y]^2 \\ Y \to Y \end{cases}$$

n'est pas modéré. Il serait intéressant de calculer l'automorphisme induit sur le centre qui a les plus grandes chances d'être non modéré sur un anneau de polynômes à 5 indéterminées et pour lequel il est peut-être possible de l'établir. En effet, Nagata donne dans [Na] un automorphisme qui est vraisemblablement un automorphisme non modéré de $k[X_1,X_2,X_3]$. Par ailleurs, Le Bruyn a construit dans [L Br] une extension de Ore en dimension 3 qui est à identité polynomiale et qui admet un automorphisme non modéré induisant l'automorphisme de Nagata sur son centre qui est un anneau de polynômes à 3 indéterminées.

1.3 Rappelons brièvement que l'algèbre de Weyl d'ordre 1 sur k, $A_1(k)$ est l'algèbre associative à 2 générateurs p et q, vérifiant la relation $pq - qp = 1$. Le groupe d'automorphismes G de $A_1(k)$ a été déterminé par J. Dixmier dans [Di] qui en a donné les générateurs suivants :

$$\phi_{n,\lambda} \begin{cases} p \to p \\ q \to q + \lambda\, p^n \end{cases} \qquad \phi_{n,\lambda} \begin{cases} p \to p + \lambda\, q^n \\ q \to p \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N},\ \lambda \in k.$$

Pour avoir une décomposition de G en somme amalgamée nous allons utiliser la théorie de Bass-Serre, (voir [Se]).

Définition : $x \in A_1(k)$ est dit faiblement nilpotent si :

a) x est ad-localement nilpotent ;

b) $C_{A_1(k)}(x) = k[x]$. (le centralisateur de x dans $A_1(k)$) .

Considérons les ensembles suivants :

$X_1 = \{W = k + kx \mid x$ faiblement nilpotent$\}$

$X_2 = \{V = k + kx + ky \mid x$ et y faiblement nilpotents, $k[x,y] = A_1(k), [x,y] = 1\}$

On peut maintenant considérer le graphe Γ dont l'ensemble des sommets est $X_1 \cup X_2$ et dont les arêtes correspondent aux inclusions $W \subset V$. (voir [Al]) G agit sur Γ sans inversion des arêtes et on a :

Lemme : 1) Γ est un arbre ;

2) $\overset{k+kp}{\circ}\!\!-\!\!\circ\overset{k+kp+kq}{}$ est un domaine fondamental de Γ mod. G.

3) Le stabilisateur de $k + kp + kq$ est $S(k)$;

$$S(k) : \left| \begin{array}{l} p \to \alpha p+\beta q + \gamma \\ q \to \alpha' p+\beta' q + \gamma' \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{ll} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{array} \right| = 1 \quad . \quad S(k) = SL(2,k) \ltimes k^2$$

4) Le stabilisateur de $k+kp$ est $J(k)$;

$$J(k) : \left| \begin{array}{l} p \to \alpha p+\beta \\ q \to \alpha^{-1} q + P(p) \; ; \quad \alpha \neq 0 \; , \; P \in k[X] \end{array} \right.$$

Preuve : (voir [A3] .
Rappelons maintenant le théorème de Bass-Serre (voir [Se]).

Théorème : Soit G un groupe opérant sur un graphe Γ sans inversion des arêtes et soit $T = \overset{P}{o} \longrightarrow \underset{\bar{y}}{} \overset{Q}{o}$ un segment de Γ. Supposons que T soit un domaine fondamental de Γ mod G. Soient G_p, G_a et G_y les stabilisateurs des sommets et des arêtes. On a l'équivalence :

(i) est un arbre.
(ii) l'homomorphisme $G_p \underset{G_y}{*} G_a \to G$ induit par les inclusions $G_p \to G$ et $G_a \to G$ est un isomorphisme.

Corollaire : Avec les notations du lemme précédent, on a :

$$\mathrm{Aut}_k(A_1(k)) = S(k) \underset{I}{*} J(k) \quad , \quad \text{où} \quad I = S(k) \cap J(k) \; .$$

Remarque : Je tiens à remercier W. Dicks qui m'a signalé une autre preuve du corollaire précédent qui utilise le fait que l'application naturelle

$$\mathrm{Aut}_k \; k\langle x,y\rangle \to \mathrm{Aut}_k k[x,y]$$

est un isomorphisme. (voir [Ma], [C ze], [Dic]).

1.4 Les résultats du 1.3 permettent de donner un automorphisme non modéré de $\mathcal{U}(g)$ ou g est l'algèbre de Lie de Heisenberg de dimension 3 : $g = k X_1 \oplus k X_2 \oplus k X_3$ avec le crochet $[X_1,X_2] = X_3$.
L'automorphisme suivant est un analogue non commutatif de l'automorhisme de Nagata.

Proposition : Considérons l'endomorphisme de $\mathcal{U}(g)$ défini par :

$$\sigma \left| \begin{array}{l} X_1 \to X_1 - X_2(X_1X_3+X_2^2) - (X_1X_3+X_2^2)X_2 - X_3(X_1X_3+X_2^2)^2 \\ X_2 \to X_2 + X_3(X_1X_3+X_2^2) \\ X_3 \to X_3 \; . \end{array} \right.$$

σ est un automorphisme non modéré de $\mathrm{Aut}\, \mathcal{U}(g)$.

Preuve : Analogue à celle de Nagata (voir [Na]) et utilise la décomposition en somme amalgamée de $Aut_k(A_1(k(X_3)))$, (voir [A3]).

2. Invariants.

2.1 Dans cette partie on prend $k = \mathbb{C}$. Soit G un groupe fini d'automorphismes de $A_1(\mathbb{C})$. D'après un théorème de Serre (voir th.8, p.53 de [Se] et le corollaire 1.3, G est conjugué à un sous-groupe de $S(\mathbb{C})$ car les sous-groupes finis de $J(\mathbb{C})$ sont inclus dans $S(\mathbb{C}) \cap J(\mathbb{C})$. En considérant le G-module $M = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}q$ et en utilisant le fait que M est un G-module semi-simple, on peut supposer que G est un sous-groupe de $SL(2,\mathbb{C})$ quitte à faire un changement de coordonnées pour p et q. La relation $[p,q] = 1$ sera conservée dans un tel changement. Or, les sous-groupes finis de $SL(2,\mathbb{C})$ sont classifiés à conjugaison près et on peut donc faire en théorie une étude, cas par cas et obtenir les sous-algèbres d'invariants à isomorphisme près. Par ailleurs, l'action de G sur $A_1(\mathbb{C})$ induit une action sur le gradué associé à la filtration de Berstein, qui est un anneau de polynômes à 2 indéterminées sur $\mathbb{C}$. Dans [Rie], O. Riemenschneider classifie toutes les algèbres d'invariants obtenues sous l'action de sous-groupes finis de $GL(2,\mathbb{C})$. On en déduit des générateurs de l'algèbre des invariants dans $A_1(\mathbb{C})$. Le théorème suivant résume les propriétés de $A_1(\mathbb{C})^G$ en utilisant divers résultats de la théorie des invariants d'anneaux sous l'action de groupes finis. (voir bibliographie).

Théorème : 1) La filtration de Bernstein de $A_1(\mathbb{C})$ induit une filtration de $A_1(\mathbb{C})^G$ pour laquelle on a :

$(gr(A_1(\mathbb{C}))^G = gr(A_1(\mathbb{C})^G)$. En particulier, $A_1(\mathbb{C})^G$ est une $\mathbb{C}$-algèbre de type fini, noéthérienne à gauche et à droite.

2) $G\,K\dim A_1(\mathbb{C})^G = 2$.

3) $K\dim A_1(\mathbb{C})^G = 1$.

4) $A_1(\mathbb{C})^G$ est simple de centre $\mathbb{C}$.

5) $gldh(A_1(\mathbb{C})^G) = 1$.

6) $D_1 * G \simeq M_{|G|}(D_1^G)$, où D_1 désigne le corps des fractions de $A_1(\mathbb{C})$, $D_1 * G$ désigne le produit croisé de D_1 par G, l'action de G étant celle qui prolonge son action sur $A_1(\mathbb{C})$ et $M_{|G|}(D_1^G)$ désigne les matrices $|G| \times |G|$ à coefficients dans D_1^G.

Remarque : Le théorème précédent montre que les invariants usuels ne séparent pas les algèbres $A_1(\mathbb{C})^G$. Une telle séparation sera donnée seulement dans le cas où G est cyclique dans la proposition suivante.

D'autre part, la propriété 6 du théorème précédent montre que si M et N sont les matrices dans $M_{|G|}(D_1^G)$ correspondantes à p et q, on a :

$$MN - NM = I ,$$

ce qui donne en prenant les traces que 1 est somme de crochets de Lie dans D_1^G. Cela amène évidemment la question suivante :

Question : D_1^G est-il isomorphe à D_1 ?
Nous verrons que c'est le cas pour G cyclique.

2.2 Soit G un sous-groupe cyclique de $SL(2,\mathbb{C})$ et $|G| = n$.
G est alors conjugué à

$$C_n = \left\langle \begin{pmatrix} e^{\frac{2i\pi}{n}} & o \\ o & e^{-\frac{2i\pi}{n}} \end{pmatrix} \right\rangle .$$ On a la proposition :

Proposition : Soit $R_n = A_1(\mathbb{C})^{C_n}$. On a :

$\dim_{\mathbb{C}} R_n/[R_n,R_n] = n-1$. En particulier, les R_n, $n \in \mathbb{N}^*$, sont 2 à 2 non isomorphes.

Preuve : On a $R_n = \mathbb{C}[p^n,q^n,pq]$. D'autre part, $A_1(\mathbb{C})$ est gradué par $\mathbb{Z}$ avec

$$A_1(\mathbb{C}) = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} A^m , \quad \text{où} \quad A^m = \bigoplus_{i-j=m} \mathbb{C} p^i q^j .$$ On a aussi :

$$A^o = \mathbb{C}[pq] \quad \text{et} \quad A^m = \begin{cases} p^m A^o \text{ si } m \geq o \\ A^o q^m \text{ si } m \leq o . \end{cases}$$

L'action de C_n respecte cette graduation. Donc :

$$R_n = \ldots \oplus A^o q^{2n} \oplus A^o q^n \oplus A^o \oplus p^n A^o \oplus p^{2n} A^o \oplus \ldots$$

Nous allons procéder par étapes :

1) $[p^{kn}(pq)^i, pq] = kn\, p^{kn} (pq)^i$

$[pq, (pq)^i q^{kn}] = (pq)^i kn\, q^{kn}$, $k,i \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$.

Donc :

$$\ldots \oplus A^o q^{2n} \oplus A^o q^n \oplus p^n A^o \oplus p^{2n} A^o \oplus \ldots \subset [R_n,R_n] .$$

2) Montrons que :

$[p^{kn}(pq)^i, (pq)^j q^{kn}] = [p^{kn}, (pq)^{i+j} q^{kn}]$, $i,j,k \in \mathbb{N}$; par récurrence sur i .

Nous allons utiliser l'identité :

$$[ab,c] = [a,bc] + [b,ca]$$

a) $i = o$, c'est trivial.

b) $[p^{kn}(pq)^{i+1}, (pq)^j q^{kn}] = [p^{kn}(pq)^i, (pq)^{j+1}q^{kn}] + [pq, (pq)^j q^{kn} p^{kn} (pq)^i]$

Le deuxième crochet est nul car $q^{kn}p^{kn}$ est un polynôme en pq. Il suffit alors d'appliquer l'hypothèse de récurrence au premier crochet.

3) $[p^{kn}, (pq)^i q^{kn}]$ est une combinaison linéaire des $[p^n, (pq)^j q^n]$.

par récurrence sur k :

a) k=1, c'est trivial.

b) $[p^{(k+1)n}, (pq)^i q^{(k+1)n}] = [p^{kn}, p^n (pq)^i q^{(k+1)n}] + [p^n, (pq)^i q^{(k+1)n} p^{kn}]$

$= [p^{kn}, (pq+n)^i p^n q^n q^{kn}] + [p^n, (pq)^i q^n q^{kn} p^{kn}]$

$= [p^{kn}, P(pq) q^{kn}] + [p^n, (pq)^i q^n Q(pq)]$ $(P, Q \in \mathbb{C}[X])$

$= [p^{kn}, P(pq) q^{kn}] + [p^n, (pq)^i Q(pq-n) q^n]$

$= [p^{kn}, P(pq) q^{kn}] + [p^n, Q_1(pq) q^n]$. $(Q_1 \in \mathbb{C}[X])$

Par hypothèse de récurrence, le premier crochet est une combinaison linéaire de crochets de la forme voulue.

4) $[p^n, (pq)^i q^n]$ est un polynôme en pq de degré $n+i-1$, dont le terme de plus haut degré est $n(n+i)(pq)^{n+i-1}$.

Par récurrence sur i :

a) $i=o$; $[p^n, q^n] = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+1} r! \binom{n}{r}^2 p^{n-r} q^{n-r}$

$= n^2 (pq)^{n-1} + \ldots$,

car $p^{n-r} q^{n-r} = pq(pq-1)(pq-2) \ldots (pq-(n-r)+1)$.

b) $[p^n, (pq)^{i+1} q^n] = (pq)[p^n, (pq)^i q^n] + [p^n, pq](pq)^i q^n$

$= n(n+i)(pq)^{n+i} + \ldots + np^n (pq)^i q^n$

$= n(n+i)(pq)^{n+i} + n(pq+n)^i p^n q^n + \ldots$

$= n(n+i)(pq)^{n+i} + n(pq+n)^i pq(pq-1)\ldots(pq-n+1) + \ldots$

$= [n(n+i)+n](pq)^{n+i} + \ldots$

$= n(n+i+1)(pq)^{n+i} + \ldots$

5) $[R_n, R_n] \cap A^o$ est engendré sur $\mathbb{C}$ par les polynômes en pq de degré n-1, n, n+1,... que sont les $[p^n, (pq)^i q^n]$, $i \in \mathbb{N}$. Compte tenu de 1), on a :

$$\dim_{\mathbb{C}} R_n / [R_n, R_n] = n-1 .$$

Remarque : Frac $R_n = D_1$. En effet, $[p^n, p^{-n}(pq)] = n$.

BIBLIOGRAPHIE

[A1] J. Alev, Quelques propriétés de R^G, II, Communications in Algebra, 10(1), 203-216, 1982.

[A2] J. Alev, Algèbres enveloppantes et algèbres à identité polynômiale : Invariants, Thèse, Paris 1983.

[A3] J. Alev, Un automorphisme non modéré de $\mathcal{U}(g_3)$, Compte-rendus des journées d'algèbres de Luminy, Août 1984, à paraître.

[A1] R.C. Alperin, Homology of the group of automorphisms of $K[x,y]$ Journal of pure and Applied Algebra, 15 (1979), 109-115.

[Ba] H. Bass, A non-triangular action of G_a on A_3 ; Journal of Pure and Applied Algebra 33 (1984), 1-5.

[Be] G. Bergman, Wild automorphisms of free P.I. algebras, and some new identities, à paraître.

[Ca] D. Castella, Anneaux réguliers de Baer compressibles, Publication du Dept. de Math. de l'Université de Poitiers.

[Cz] A.J. Czerniakiewicz, Automorphisms of a free associative algebra of rank 2, II. Trans. A.M.S. 171 (1972) 309-315.

[Dic] W. Dicks, A commutator test for two elements to generate the free algebra of rank two, Bull. London Math. Soc., 14(1982), 48-51.

[Di] J. Dixmier, Sur les algèbres de Weyl, Bull. Math. France, 96, 1968, 209-242.

[Fa & Sn] D.R. Farkas and R.L. Snider, Noetherian Fixed Rings, Pac. J. of Math., 69, 2, 347.

[Fi & Os] J. Fisher and J. Osterburg, Semi-prime ideals in rings with finite group actions, J. of Algebra, 50, 1978, 488-502.

[Jo] A. Joseph, A wild automorphism of $\mathcal{U}(sl(2))$, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 1976, 80, 61-65.

[Ju] H.W.E. Jung, Eingurhung in der theorie der algebraishen functionen Zweier Veränderlicher, Akademic Verlag Berlin (1951).

[Ka] T. Kambayashi, On the absence of non trivial separable forms of the affine plane, Journal of Algebra, 35, 449-456 (1975).

[LBr] L. Le Bruyn, Savage Automorphisms of $F[x_1,x_2,\ldots,x_n]$, to appear

[Lo & Pa] M. Lorentz and D.S. Passman, Observations on crossed products and fixed rings, Communications in Algebra, 8, 1980, 743-779.

[Ma] L.G. Makar-Limanov, On automorphisms of free algebras with two generators, Funkc. Anal. i ego prilozeniya 4 (1970), 107-108.

[Mo] S. Montgomery, Fixed rings of finite Automorphism groups of Associative rings, Lectures Notes in Mathematics, 818.

[Mo] S. Montgomery, X-inner automorphisms of filtered algebras, Proc. Ann. Math. Soc. Vol. 83, n°2, October 1981.

[Na] M. Nagata, On the automorphism group of k[x,y], Lectures in Mathematics, Kyoto University (Tokyo, Kinokuniya) 1972.

[Pit] M. Pittaluga, On the automorphism group of a polynomial algebra, ph. D. Thesis.

[Re] R. Rentschler, Opérations du groupe additif sur le plan affine, C.R.A.Sc. Paris, t.267, 1968, série A.

[Rie] O. Riemenschneider, Die invarianten der endlichen untergruppen von GL(2,$\mathbb{C}$), Math. Z. 153, 37-50. (1977).

[Sa] I.R. Safarevic, On some infinite dimensional groups, II, Math. USSR Iznestija Vol. 18 (1982), N°1.

[Se] J.P. Serre, Amalgames, SL_2, Société Mathématique de France, Astérisque, 46, 1977.

[Sm] M.K. Smith, Automorphisms of enveloping Algebras, Communications in Algebra, Vol. 11, N°16, 1983.

[Va] W. Van der Kulk, On polynomial rings in two variables, N. Archief voor Wishunik (3), Vol. 1, 1953, 33-41.

CONDITIONS NOETHÉRIENNES DANS LES ANNEAUX GRADUÉS

B. Alfonsi
Université de Poitiers
Département de Mathématiques
40, Avenue du Recteur Pineau
86022 POITIERS FRANCE

Cet exposé comporte deux sortes de résultats : d'une part, des généralisations d'énoncés de *délocalisation graduée* de la propriété noetherienne obtenue par C. NASTASESCU et F. VAN OYSTAEYEN [5], C. NASTASESCU ([4]), et S. GOTO - K. YAMAGISHI ([2]) dans un cadre commutatif. Nous utilisons pour cela des techniques d'homogénéisation et de déshomogénéisation partielles : des foncteurs définissent une équivalence entre la catégorie des modules G/H-gradués sur un anneau G-gradué A, et celle des modules G-gradués sur l'anneau $A[H]$, pour peu que, H étant un sous-groupe distingué de G, le produit dans $A[H]$ soit légèrement tordu par rapport au produit usuel dans l'anneau de groupe.

Ces techniques sont bien connues pour les idéaux d'un anneau gradué de type $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, et correspondent au passage d'une variété affine à la variété projective associée en géométrie algébrique, et sont sous-jacentes au travail de M. VAN DEN BERGH [7], ainsi que de celui de [4], [5]. Elles permettent éventuellement d'obtenir, soit des propriétés de modules non gradués à partir de celles d'une catégorie de modules gradués, soit des propriétés non graduées de modules gradués. Les généralisations, au surplus obtenues plus rapidement, en sont un premier exemple ; un second en est la cohérence des modules gradués-noethériens, et celle des anneaux de polynômes sur les anneaux gradués-noethériens. La question posée dans [4] reste néanmoins ouverte : si un anneau, gradué par un groupe polycyclique-par-fini, est gradué-noethérien, est-il noethérien ?

D'autre part, une caractérisation des groupes abéliens qui peuvent graduer un anneau noethérien : on sait que, pour un anneau A et un groupe G commutatifs, $A[G]$ est noethérien si et seulement si A l'est, et G est de type fini ([6]) ; le même résultat est-il valable pour un produit croisé ? Un contre-exemple de [2] fournit un produit croisé de $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]/\mathbb{Z}$ qui est un corps. Nous esquissons ici la démonstration du résultat suivant (les détails seront publiés ultérieurement) :

(i) Si un anneau commutatif gradué est noethérien, son groupe des degrés est de rang rationnel fini.

(ii) Inversement, si G est un groupe de rang fini, il existe un anneau noethérien régulier, de dimension $\operatorname{rg} G$, qui soit exactement gradué par G.

La construction de (ii) montre que les résultats de GILMER et PARKER [1], concernant la principalité et la factorialité des anneaux de groupes, ne s'étend pas au cas des produits croisés.

1 - DES(HOMOGÉNÉISATION) PARTIELLE DES MODULES.

Préliminaires : Si G est un groupe (noté multiplicativement), A un anneau G-gradué et H un sous-groupe distingué de G, un produit est défini sur $A[H]$ par :

$$a_g.[h].a_{g'}[h'] = a_g a_{g'}[g'^{-1}hg'.h'] ,$$

et ce produit, non l'usuel, fait de $A[H]$ un anneau G-gradué pour le degré total. Pareillement, si M est un A-module à gauche G-gradué, $M[H]$ devient un $A[H]$-module G-gradué [4].

Choisissons alors une famille de représentants (g_γ) des classes γ de G modulo H ; si $m_\gamma = \sum_{h\in H} m_{g_\gamma.h}$ est un élément G/H-homogène de M, nous définissons son *homogénéisé* m^*_γ dans $M[H]$ comme $\sum_{h\in H} m_{g_\gamma.h}[h^{-1}]$.

Les relations : $(a_\gamma.m_{\gamma'})^* = a^*_\gamma.m^*_{\gamma'}[g^{-1}_{\gamma\gamma'}, g_\gamma g_{\gamma'}]$

et : $$(m_\gamma+m'_\gamma)^* = m^*_\gamma + m'^*_\gamma$$

se vérifient sans peine.

Nous pouvons alors définir l'*homogénéisée* d'une application linéaire G/H-graduée u du A-module G-gradué M dans le A-module G-gradué N, $u^* : M[H] \longrightarrow N[H]$, par :

$$u^*(m_{g_\gamma.h}[k]) = (u(m_{g_\gamma.h}))^*[hk] .$$

Remarquons qu'alors : $u^*(m^*_\gamma) = (u(m_\gamma))^*$ et que, si u est G-graduée, u^* n'est autre que $u[H]$.