Дж. Поллард

СПРАВОЧНИК ПО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМ МЕТОДАМ СТАТИСТИКИ

A HANDBOOK
of
Numerical and
Statistical
Techniques

J.H.Pollard

СПРАВОЧНИК
по вычислительным методам статистики

A HANDBOOK of Numerical and Statistical Techniques

With Examples Mainly
From The Life Sciences

J.H.Pollard

Cambridge University Press

Cambridge
London—New York—Melbourne

Дж. Поллард

СПРАВОЧНИК по вычислительным методам статистики

Перевод с английского
В. С. ЗАНАДВОРОВА
Под редакцией
и с предисловием
Е. М. ЧЕТЫРКИНА

Москва
«Финансы и статистика»
1982

ББК 22.172
П51

Поллард Дж.

П51 Справочник по вычислительным методам статистики/ Пер. с англ. В. С. Занадворова; Под ред. и с предисл. Е. М. Четыркина.— М.: Финансы и статистика, 1982.— 344 с., ил.

1 р. 60 к.

В книге дается набор вычислительных процедур численного анализа и статистических приемов оценки гипотез. В ней рассматриваются разного рода ошибки и способы их устранения, методы сглаживания, интерполяция и численное дифференцирование, статистические распределения и моменты, метод наименьших квадратов, анализ регрессий: линейной, криволинейной и нелинейной. Наиболее полно представлена проверка статистических гипотез.

Для экономистов и статистиков — научных работников и практиков, аспирантов и студентов.

П $\frac{0702000000-146}{010(01)-82}$ 37—82

ББК 22.172
517.8

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Статистические методы завоевывают все большее признание как в исследовательской работе, так и в практической деятельности. Это связано с существенными «прорывами» в области статистической методологии, расширением арсенала статистических средств, возможностями реализации соответствующих методик на ЭВМ. Нельзя исключить и то, что произошла, вероятно, переоценка возможностей и ценностей методов количественного анализа экономических явлений, следствием которой явилось известное ослабление внимания к оптимизационным расчетам, некоторый отход от своего рода «оптимизационного романтизма».

Статистический аппарат рассматривается главным образом в учебной литературе, где набор методов, естественно, небогат и стандартен. Описание более тонких и сложных современных статистических методов, как правило, разбросано по многочисленным журнальным статьям и научным публикациям. Все это обусловило необходимость в систематизированном и сжатом изложении методов статистического анализа. Существенную помощь здесь может оказать предлагаемый вниманию советского читателя перевод Справочника по вычислительным методам статистики Дж. Полларда.

Справочник тематически разделен на три части. В первой части рассматриваются некоторые численные методы, необходимость в которых возникает при решении ряда статистических проблем. Помимо чисто математического инструментария Дж. Поллард счел уместным поместить материал, который обычно относят собственно к статистике,— различные приемы сглаживания рядов данных. Здесь же автор приводит малоизвестные формулы, с помощью которых вычисляются концевые сглаженные значения уровней, а также весовые коэффициенты для сглаживания, обеспечивающие оптимальные сглаживающие свойства. Отдельный параграф посвящен специальному методу сглаживания — расчету сплайн-функций. Последние, как известно, существенно улучшают результаты интерполяции, если исходные данные располагаются в ряд, который не может быть достаточно хорошо описан единственной простой функцией. Много внимания уделяется расчетам, базирующимся на конечных разностях. Это вполне оправдано, так как конечные разности широко используются для численных решений дифференциальных уравнений. (Дифференциальные и особенно дифференциально-разностные уравнения стали занимать все более заметное место в моделировании экономических процессов.) Другой важной областью приложений конечных разностей является интерполяция данных.

Во второй части Справочника обсуждаются некоторые основные понятия математической статистики. После сжатого рассмотрения сущности и методов расчета ряда параметров одномерного и двумерного распределений автор переходит к подробной характеристике основных распределений. Помимо обычно встречающихся в учебной литературе распределений здесь приводятся сведения о «менее известных» распределениях, которые для исследователя, применяющего статистические методы, могут оказаться весьма полезными (например, геометрическое и гипергеометрическое распределения, отрицательное биномиальное распределение и т. д.). Специальная глава посвящена характеристике и методам оценки параметров распределений Пирсона.

Наибольшее место в этой части книги занимает важная для исследователя-экспериментатора тема — статистическая проверка гипотез. Приведенный материал отличается широтой охвата методов и постановок задачи и изложен с большим пониманием потребностей практика, занимающегося статистическим анализом. Весьма уместны здесь комментарии, сопровождающие описание отдельных методов. Особенно важны, на наш взгляд, указания на устойчивость того или иного критерия проверки при нарушении исходных предпосылок модели (важный момент, которому в статистической литературе, к сожалению, уделяется недостаточное внимание), а также различного рода предупреждения о возможном неправильном применении метода и т. д.

В этой же части книги четко представлены сведения о методах точечного и интервального оценивания параметров. Опираясь на метод максимального правдоподобия, автор последовательно рассматривает подходы к оцениванию доверительных интервалов для некоторых параметров (и их линейных комбинаций) ряда непрерывных и дискретных распределений.

Третья, заключительная часть Справочника посвящена одной из «классических» тем статистики — регрессионному анализу. Автор приводит материал, демонстрирующий не только технику оценивания параметров соответствующих уравнений, но и статистический анализ полученного уравнения регрессии, что, на наш взгляд, представляется особенно ценным (так как в практике статистический анализ часто заканчивается после получения уравнения).

Читателю следует обратить внимание на замечания и предупреждения, связанные с разработкой регрессий. Однако такие предупреждения сделаны далеко не везде, где, как нам кажется, это необходимо. В частности, автор приводит примеры подбора линейной и криволинейной множественной регрессии к данным наблюдений, состоящим всего из четырех точек, не сопровождая эти расчеты никакими комментариями. Недостаточно полно изложен материал, относящийся к нелинейной по параметрам регрессии [1].

Отличительной особенностью Справочника является большое количество примеров. Собственно, на примерах и происходит обучение. Книга построена по принципу «делай так». Разумеется, для полного понимания ее содержания читателю необходимо обратиться к соответствующей литературе. Заметим, что Дж. Поллард приводит после каждого параграфа список рекомендуемых работ.

Подытоживая сказанное, еще раз отметим, что перевод книги Дж. Полларда представляется своевременным и целесообразным. Издание работы на русском языке отвечает возросшей практической необходимости в более интенсивном и строгом подходе к статистическому анализу экономических явлений. Поскольку Справочник охватывает важные разделы современной статистики, он, без сомнения, окажет большую помощь экономистам — научным работникам и практикам, а также широкому кругу специалистов, имеющих дело с обработкой и анализом статистических данных.

Е. М. ЧЕТЫРКИН

---

[1] Методы нелинейной регрессии подробно обсуждаются в работе Е. З. Демиденко «Линейная и нелинейная регрессии» (М., Финансы и статистика, 1981).

ПРЕДИСЛОВИЕ

Современные ученые имеют широкий доступ к мощным системам вычислительных машин. Математическое обеспечение подобных систем содержит очень сложные программы, предназначенные для решения статистических и вычислительных задач. Тем не менее многие из повседневных задач, возникающих в процессе научного исследования, могут быть решены (и часто более успешно) с помощью настольных программируемых калькуляторов или мини-компьютеров, которыми теперь оборудована почти каждая лаборатория. По своим вычислительным возможностям эти машины близки к уровню, достигнутому ЭВМ двадцать лет назад; они широко распространяются, так как легки в обращении, дешевы, и к тому же исследователь может «играть» на них со своими данными столько, сколько ему представляется плодотворным. При таком непосредственном контакте с машиной, вероятно, удается достичь значительно бóльших успехов, чем в тех случаях, когда вычисления производятся в режиме пакетной обработки на мощной ЭВМ. Для настольных машин разработаны комплексы программ их математического обеспечения, однако практика исследований показывает, что обычно для применения этих программ необходимо их модифицировать с учетом конкретных требований. Данная книга призвана помочь исследователю в осуществлении подобной задачи.

Программы, входящие в математическое обеспечение мощных ЭВМ, предназначены для решения стандартных задач. Как правило, они выдают на печать большой объем информации. Для того чтобы использовать эти программы, необходимо ориентироваться в методологии программирования и показателях, которые могут быть представлены в выдаче той или иной программы. Особенно необходимо это в том случае, когда требуется модифицировать или комбинировать готовые программы для решения нестандартных задач. В книге описаны многие из основных численных и статистических методов, программы которых входят в математическое обеспечение.

В настоящее время появляется возможность проводить вычисления с помощью терминалов крупных машин. Эти терминалы обеспечивают работу в диалоговом режиме, позволяя сочетать преимущества мощных вычислительных систем с легкостью обращения, присущей настольным программируемым калькуляторам. Относительно преимуществ работы с такими терминалами можно повторить те же замечания, которые были высказаны по поводу мини-компьютеров и настольных калькуляторов.

Необходимо предостеречь читателя от механического использования стандартных программ. Их рекламные описания нередко могут ввести в заблуждение, а сами программы иногда содержат ошибки. Поэтому мы советуем пользователю проверять на знакомых данных каждую новую для него программу.

Книга написана как практическое руководство для исследователей, знакомых со статистическими методами. Это — не учебник, хотя некоторые методы (например, метод наименьших квадратов) объяснены достаточно подробно. В конце каждой главы приведены упражнения, поясняющие и развивающие отдельные моменты изложения. Применение каждого из описанных методов иллюстрируется примерами. Для решения задачи, возникшей в ходе практического исследования, следует воспользоваться каким-либо из тех методов, которые представляются исследователю целесообразными в этом конкретном случае. Если один метод не подойдет, следует испытать другой. Как правило, среди известных методов всегда можно найти приемлемый. Для решения более трудных вычислительных и статистических задач мы рекомендуем обратиться за консультацией к специалисту по соответствующим методам.

Книга делится на три части. В первой из них рассмотрены численные методы линейной алгебры и анализа, во второй — статистические методы. Третья часть посвящена методу наименьших квадратов, который можно рассматривать и как статистический метод, и как вычислительный прием.

Основная часть этой книги была написана мною в Европе во время научного отпуска, поэтому я был бы рад выразить свою благодарность профессору Г. Фейхтингеру из Вены, профессору Я. Хоему из Копенгагена и профессору П. Уиттлу из Кембриджа за их гостеприимство. Я хотел бы также поблагодарить доктора О. Аалена, доктора Д. Гани, К. Киртона, доктора С. Йохансена и профессора М. Уильямсона за их ценные замечания, а Б. Торн — за выполнение графиков. Эта книга посвящается моей жене, проявившей большое терпение в течение многих вечеров, когда я был занят работой над книгой.

ДЖ. ПОЛЛАРД

Университет Маккуори
Сидней, декабрь 1976 г.

Часть I. **ОСНОВНЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ**

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной главе рассмотрены некоторые важнейшие математические результаты, которые зачастую необходимо знать для решения вычислительных и статистических задач, возникающих в ходе научного исследования. Вначале мы рассматриваем разложение в ряд Тейлора некоторых функций одной переменной; затем вводятся понятия частной производной и ряда Тейлора для функций двух или более переменных. В заключительной части главы дается понятие матрицы и обсуждаются основные операции над матрицами — сложение, вычитание, умножение и получение обратной матрицы.

1.1. НЕОБХОДИМЫЙ УРОВЕНЬ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ

Для понимания методов, описанных в этой книге, достаточен весьма скромный уровень математических знаний. Тем не менее применение этих методов дает возможность решать сложные вычислительные и статистические задачи. Например, решать нелинейные уравнения с одним или несколькими неизвестными, интегрировать и дифференцировать заданную функцию (в том числе неэлементарную функцию, получаемую в ходе эксперимента), сглаживать исходные данные, подбирать кривую и интерполировать. Некоторые из рассматриваемых методов могут применяться и для решения более сложных задач. Например, метод конечных разностей (см. гл. 6) широко используется для решения дифференциальных уравнений.

Читатель познакомится с математическими понятиями дифференцирования (при определении тангенса угла наклона кривой) и интегрирования (при нахождении площади под кривой). Целесообразно также вспомнить некоторые другие понятия и формулы; они собраны в данной главе.

1.2. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИИ В РЯД ТЕЙЛОРА

В формуле (1.2.1) значения рассматриваемой функции $f(x)$ и ее производных в заданной точке x используются для получения значения этой функции в близкой точке $x+h$:

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1!}f'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\ \dots \qquad (1.2.1)$$

Литература: [17, с. 16], [38, с. 407—427], [73, с. 9].

1.3. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЙ РЯД

Следующий ряд для функции e^x сходится к значениям функции для всех значений x:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \tag{1.3.1}$$

Эту формулу можно получить при разложении в ряд Тейлора (1.2.1), вспомнив, что производная функции e^x есть e^x.

Литература: [17, с. 16], [38, с. 428—434, 457—460].

1.4. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ РЯД

Следующий ряд для функции натурального логарифма от $1+x$ сходится к значениям этой функции при условии, что $|x|<1$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \tag{1.4.1}$$

Эту формулу можно получить при разложении в ряд Тейлора (1.2.1), вспомнив, что производная функции $\ln(1+x)$ есть $(1+x)^{-1}$.

Литература: [17, с. 16], [38, с. 428—434].

1.5. РАЗЛОЖЕНИЕ ПО ФОРМУЛЕ БИНОМА

Следующий ряд для функции $(1+x)^n$ сходится к значению функции для всех действительных значений n при условии, что $|x|<1$:

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots, \tag{1.5.1}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &\binom{n}{1} = \frac{n}{1}, \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{1\times 2}, \\ &\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\times 2\times 3} \text{ и т. д.} \end{aligned}\right\} \tag{1.5.2}$$

Формула может быть получена при разложении в ряд Тейлора (1.2.1).

В случае когда n — положительное целое число, ряд сходится для всех x и содержит лишь $n+1$ ненулевых членов; кроме того, выполняется равенство

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}. \tag{1.5.3}$$

Численные значения биномиальных коэффициентов (1.5.3) часто располагают в виде *треугольника Паскаля* (см. табл. 1.5.1).

Таблица 1.5.1. **Биномиальные коэффициенты $\binom{n}{r}$ для малых значений** n

Каждое число в этой таблице (для $r \geqslant 1$) равно сумме числа, расположенного непосредственно над данным числом, и числа, расположенного над левым, соседним с данным (например, $70 = 35 + 35$).

n	r								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

Пример 1.5.1. Воспользуйтесь формулой (1.5.1) для нахождения квадратного корня из 1,03 с точностью до шестого знака после запятой:

$$(1{,}03)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1}(0{,}03) + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{1\times 2}(0{,}03)^2 +$$

$$+ \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{1\times 2\times 3}(0{,}03)^3 + \ldots = 1 + 0{,}015 - 0{,}000\,112\,5 +$$

$$+ 0{,}000\,001\,6875 - \ldots = 1{,}01488\,9 \text{ (с точностью до шестого знака после запятой).}$$

Литература: [38, с. 32—42], [73, с. 8].

1.6. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Тангенс угла наклона кривой, которая является графиком функции одной переменной $f(x)$, равен скорости возрастания значений этой функции при росте x. График функции двух переменных x и y можно уподобить рельефу участка земной поверхности (в частности, некоторому холму). Значение x можно сопоставить с географической широтой рассматриваемой точки поверхности, значение y — с ее долготой, а высоту — со значением функции $f(x, y)$.

Если бы мы находились у подножия холма и направлялись бы прямо к его вершине, подъем мог бы оказаться довольно трудным из-за значительной крутизны склона. Мы могли бы избрать другой способ подъема и подниматься зигзагом по менее крутым тропинкам. Очевидно, что наклон в заданной точке (x, y) зависит от направления движения.

Возвращаясь к математическому анализу функции двух переменных, выделим два важных направления изменений: первое соответствует возрастанию x при постоянном значении y (постоянная долгота и возрастающая широта), второе — возрастанию y при постоянном x (постоянная широта и возрастающая долгота). Эти два направления всегда образуют прямой угол.

Тангенс угла наклона поверхности в направлении возрастания x при постоянном y называют частной производной функции $f(x, y)$ по x и обозначают символом $\partial f/\partial x$. Ее получают, принимая y за константу и дифференцируя $f(x, y)$ как обычную функцию от одной переменной x. Аналогично тангенс угла наклона в направлении возрастания y при постоянном x называют частной производной $f(x, y)$ по y и обозначают $\partial f/\partial y$. Ее получают, принимая x за константу и дифференцируя $f(x, y)$ по y.

На вершине холма угол наклона в любом направлении равен нулю, в том числе и в тех двух направлениях, которые были рассмотрены выше. В точке, где значение функции $f(x, y)$ достигает максимума (или минимума), обе частные производные $\partial f/\partial x$ и $\partial f/\partial y$ равны нулю.

Пример 1.6.1. Найти минимальное значение функции

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - x + y + xy - 3.$$

Для решения задачи приравняем нулю частные производные по x и y:

$$2x - 1 + y = 0,$$
$$2y + 1 + x = 0.$$

Мы решаем систему из двух уравнений с двумя неизвестными и находим, что минимум достигается в точке $(1, -1)$ и равен -4. Эта стационарная точка является точкой минимума, так как решение системы единственно и $f(x, y) \to \infty$ при $x \to \pm\infty$ или $y \to \pm\infty$.

Литература: [38, с. 435—438], [92, с. 123—126, 160—166].

1.7. ДВУМЕРНЫЙ РЯД ТЕЙЛОРА

Двумерный ряд Тейлора имеет вид

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + \left(h \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) + k \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)\right) + \\ + \frac{1}{2!}\left(h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) + \right. \\ \left. + 2hk \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) + k^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y)\right) + \ldots \qquad (1.7.1)$$

Эту формулу можно обобщить на случай трех или более переменных.

Литература: [92, с. 155—157].

1.8. ПОНЯТИЕ МАТРИЦЫ

Матрицей называется прямоугольный массив элементов. Обычно эти элементы являются числами. Например,

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1,3 & 1,2 \\ 1,7 & 0,6 \\ 0,2 & 1,3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4,3 & 0,0 \\ 1,9 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Размерностью матрицы называют число ее строк и столбцов. Так, матрица, состоящая из m строк и n столбцов, называется матрицей размерности $m \times n$. Приведенные выше матрицы имеют размерность 2×1, 3×2 и 2×2 соответственно.

Две матрицы *равны* между собой, если они содержат одно и то же число элементов, расположенных совершенно одинаковым образом, и элементы, находящиеся на одинаковых местах, равны друг другу. Очевидно, что

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Если две матрицы **A** и **B** имеют одинаковую размерность, то их *суммой* называют матрицу **C**, элементы которой получены суммированием соответствующих элементов матриц **A** и **B**. Так,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Аналогично

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}.$$

При разной размерности суммы и разности матриц **A** и **B** не определяют.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой матрицей* и обычно обозначается знаком **0**.

При умножении матрицы на заданное число получают матрицу, каждый элемент которой равен соответствующему элементу исходной матрицы, умноженному на это число. Так,

$$-3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -9 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} 3.$$

Для того чтобы обозначить *произведение двух матриц*, запишем их подряд одну за другой без знака умножения между ними. Например, **AB**. Произведение **AB** определяем лишь для тех случаев, когда число столбцов матрицы **A** равно числу строк матрицы **B**. Матрица произведения **AB** имеет столько же строк, сколько **A**, и столько же столбцов, сколько **B**. Элемент произведения **AB**, расположенный в r-й строке и s-м столбце, получают суммированием попарных произведений элементов r-й строки матрицы $\mathbf{A}$ с соответствующими им (по номеру) элементами s-го столбца матрицы $\mathbf{B}$. Так, например, элемент второй строки и первого столбца произведения

$$\begin{array}{rcc}
\text{вторая строка}\rightarrow & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5\\ 1 & 9 & 2\\ 4 & 7 & 6\\ 14 & 12 & 13\end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & -5\\ 12 & 11\\ 8 & 0\end{pmatrix}\\
 & & \begin{array}{l}\uparrow\\ \text{первый столбец}\end{array}
\end{array}$$

равен $1\times(-1)+9\times 12+2\times 8=123$.

В данном случае у первой матрицы размерность 4×3, у второй — 3×2. Матрица произведения имеет размерность 4×2:

$$\begin{pmatrix} 74 & 23\\ 123 & 94\\ 128 & 57\\ 234 & 62\end{pmatrix}.$$

Такой способ определения матричного умножения может показаться искусственно усложненным, но он весьма полезен в приложениях, так как мы часто сталкиваемся с необходимостью рассматривать суммы попарных произведений некоторых чисел. В конце данного параграфа приведены соответствующие примеры. Возможна ситуация, когда произведение $\mathbf{AB}$ определено, а произведение $\mathbf{BA}$ определить нельзя; приведенные выше примеры иллюстрируют эту мысль. Более того, даже если определены оба произведения $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{BA}$, они в общем случае не равны друг другу.

Квадратная матрица (например, размерности $n\times n$), у которой на *главной диагонали* стоят единицы, а на остальных местах — нули, называется *единичной матрицей* и обычно обозначается символом $\mathbf{I}$*. Например,

$$\mathbf{I}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что во всех случаях, когда произведение определено,

$$\mathbf{AI}=\mathbf{IA}=\mathbf{A}.$$

Говорят, что квадратная матрица $\mathbf{A}$ имеет обратную матрицу $\mathbf{A}^{-1}$, если существует такая матрица $\mathbf{A}^{-1}$, что

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{I}.$$

---

* Или $\mathbf{E}$.— *Примеч. ред.*

Квадратная матрица называется *вырожденной*, если для нее нет обратной. Методы нахождения обратной матрицы приведены в параграфе 1.10.

Матрицу размерности $1 \times n$ обычно называют *вектор-строкой,* или *вектором.* Матрицу размерности $n \times 1$ можно называть *вектор-столбцом,* или *вектором.* К этим векторам применимы описанные выше правила сложения, вычитания и умножения.

Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме диагональных, равны нулю, называется *диагональной.* Если все элементы диагонали отличны от нуля, то данная матрица имеет обратную и обратная матрица тоже диагональная. Для получения обратной матрицы надо взять числа, обратные диагональным элементам исходной матрицы. Например,

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Транспонированную матрицу $\mathbf{A}'$ получают из исходной матрицы $\mathbf{A}$, превращая ее строки в столбцы (и наоборот). Так, например,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix} \text{ имеет транспонированную матрицу}$$

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица называется *симметричной*, если $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$. Например,

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 5 & -3 & -7 \\ 6 & -7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Пример 1.8.1. Одно из важных направлений применения матричной алгебры связано с исследованием систем линейных уравнений. Для того чтобы понять, как это делается, рассмотрим матричное произведение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$