

*Que
sais-je ?*

LES SÉRIES MATHÉMATIQUES

GASTON CASANOVA



UNIVERSITAIRES DE FRANCE

QUE SAIS-JE ?

Les séries mathématiques

GASTON CASANOVA

Professeur agrégé de mathématiques spéciales
Docteur ès sciences de l'Université de Paris

Deuxième édition mise à jour

16^e mille



DU MÊME AUTEUR

- L'algèbre de Boole*, coll. « Que sais-je ? », P.U.F., 3^e éd., 1972.
Cours de mathématiques spéciales, 4 tomes, Paris, E. Belin, 1963.
Relativité restreinte, Paris, E. Belin, 1961.
Invariance et détermination du réel physique, Paris, E. Belin.
L'algèbre vectorielle, P.U.F., n° 1657.
Les applications linéaires, n° 1729.
Espaces euclidiens et hermitiens, n° 1751.
Pour une Corse française, Paris, Ed. Albatros, 1980.

ISBN 2 13 036810 7

2^e édition revue et corrigée : 1^{er} trimestre 1981
© Presses Universitaires de France, 1974
108, Bd Saint-Germain, 75006 Paris

INTRODUCTION

L'histoire des séries est étroitement liée à l'histoire des mathématiques elles-mêmes et il est difficile de l'aborder sans citer les plus connus des mathématiciens. Avec J. Grégory, au milieu du xvii^e siècle, qui calcule π en développant l'arc tangente, Mercator qui développe le logarithme en 1668, Leibnitz introduit une condition suffisante de convergence des séries alternées et I. Newton un peu avant lui étudie, autour des années 1670, en liaison avec leur invention du calcul infinitésimal, les séries de puissance en vue de résoudre des problèmes réputés jusqu'alors impossibles comme le calcul des arcs ou des aires de certaines courbes et ils s'intéressent du même coup à la construction des tables donnant les valeurs numériques des fonctions usuelles.

Le xviii^e et le xix^e siècle continuent l'œuvre commencée, particulièrement avec B. Taylor, d'Alembert, A.-M. Legendre, L. Lagrange qui dérive les séries de puissance, puis N. Abel, A. Gauss, C. Jacobi. Surtout chez les fondateurs, ces travaux doivent beaucoup à l'intuition et les résultats ne sont pas toujours justifiés rigoureusement. Ce n'est qu'avec A. Cauchy que les notions essentielles de convergence et de convergence uniforme seront présentées d'une façon moderne et que la notion de développement en série sera étendue aux domaines plans et aux variables complexes. Dès lors, l'intro-

duction en mathématique de nouvelles fonctions définies par des séries deviendra possible ainsi que l'étude des séries de fonctions qui, à elles seules, constituent un des chapitres les plus importants de l'Analyse. Nous citerons ainsi les séries de Bessel, intégrales particulières d'une équation différentielle du second ordre qui jouent dans les mathématiques appliquées à l'électrotechnique un rôle extrêmement important puisqu'elles servent par exemple à calculer la densité du courant dans un conducteur cylindrique. Signalons encore l'introduction par J. Fourier (1768-1830) des séries trigonométriques qui permettront le développement de certaines fonctions discontinues et qui sont très utiles en physique théorique, particulièrement en mécanique ondulatoire où sont constamment employées des séries de fonctions orthogonales dont les séries trigonométriques ne sont qu'un cas particulier.

La notion de série repose essentiellement sur l'addition et la limite, opérations que le développement moderne des mathématiques a considérablement généralisées. C'est ainsi que les séries ou les familles sommables peuvent être associées à un groupe topologique séparé, additif et commutatif, d'éléments quelconques, qui sera souvent un espace vectoriel normé complet, mais ces extensions n'ont pas fait perdre de leur importance aux sommes infinies classiques qui restent un des outils les plus perfectionnés et les plus efficaces des mathématiques. C'est pourquoi nous commencerons par l'étude des séries numériques pour aborder ensuite l'étude des séries de fonctions avant d'envisager les généralisations modernes qui permettent par exemple la définition de l'exponentielle d'un bivecteur, étroitement associée au groupe des rotations et dont les applications sont particulièrement intéressantes dans

l'espace-temps. L'étude des séries trigonométriques ou séries de Fourier ainsi que des indications sur l'intégrale de Lebesgue complètent notre exposé. En effet, l'intégration au sens de Lebesgue est nécessaire à l'introduction de l'espace vectoriel complet des fonctions de carré sommable dont nous examinons les propriétés fondamentales.

Etant donné l'étendue actuelle du champ des applications, la connaissance des séries est aujourd'hui indispensable à qui veut acquérir une culture mathématique postbaccalauréat.

CHAPITRE PREMIER

LA NOTION DE LIMITE

Les Grecs n'ont pas connu les séries. Certes, Archimède dans ses nombreux travaux a approché l'intégrale en considérant des sommes infinies, mais chacun des termes de ces sommes tend vers zéro lorsque leur nombre augmente indéfiniment, ce qui ne se produit pas dans un développement en série où chaque terme de la somme reste bien déterminé. C'est cependant un Grec, Zénon d'Elée, qui, bien avant notre ère, a posé, sans trop le deviner, le problème moderne de la limite en énonçant un paradoxe célèbre qui a gardé son nom.

I. — Le paradoxe de Zénon

Considérons, dit Zénon, Achille qui essaie de rattraper à la course une tortue ayant sur lui une certaine avance. Pendant qu'il comble ce retard, la tortue prend une nouvelle avance plus petite que la première car Achille court plus vite que la tortue, mais non nulle. Lorsque Achille comble ce nouveau retard, la tortue prend une nouvelle avance et ainsi de suite, sans fin, de telle sorte qu'Achille ne pourra jamais rattraper la tortue.

Ce raisonnement repose sur la divisibilité à l'infini du temps et de l'espace. Réfléchissant sur la notion de temps, certains philosophes comme Aris-

tote et H. Bergson ont distingué sa division conceptuelle à l'infini de sa division réelle et, en refusant cette dernière, pensé avoir réfuté ainsi le paradoxe. H. Bergson rejette du même coup et très logiquement le raisonnement mathématique qui va suivre et qui accepte la division théorique infinie du temps et de l'espace.

La notion de temps appartient aussi à la science avec, en particulier, le soin de sa mesure. C'est une question que nous n'aborderons pas ici de savoir si l'on peut mesurer un intervalle de temps aussi petit que l'on veut, mais la variable temporelle est une variable réelle et elle peut donc varier continûment d'un point de vue théorique.

Zénon a seulement oublié de tenir compte d'une des conditions de la course en n'additionnant pas à l'infini les différentes durées utilisées par la tortue dans son déplacement, oubli d'autant plus compréhensible que les mathématiques de son temps ne lui permettaient pas d'effectuer cette opération avec sûreté.

Soient deux mobiles ponctuels A et A_1 se déplaçant sur un axe $\vec{Ox}$ dans le même sens avec des vitesses respectives v et v_1 telles que $v > v_1$. Nous posons $AA_1 = d_0$, $v_1 = kv$ et donc $0 < k < 1$ (fig. 1).

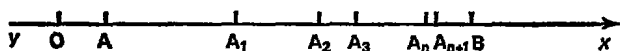


Fig. 1

Achille qui part de A parcourt AA_1 dans le temps $\frac{d_0}{v}$ et la tortue, lorsque Achille est arrivé en A_1 , est donc arrivée en A_2 tel que $A_1A_2 = \frac{v_1}{v} d_0 = k d_0$. De même, lorsque Achille est arrivé en A_2 , la tortue est arrivée en A_3 et :

$$A_2A_3 = k d_0 \times k = k^2 d_0,$$

et ainsi de suite : lorsque Achille arrive en A_n , la tortue arrive en A_{n+1} et $A_nA_{n+1} = k^n d_0$.

Elle aura alors parcouru :

$$k d_0 + k^2 d_0 + \dots + k^n d_0 = k d_0 (1 + k + k^2 + \dots + k^{n-1}).$$

On sait que la parenthèse vaut :

$$\frac{1 - k^n}{1 - k}$$

et la distance D_{n+1} parcourue par la tortue est donc :

$$D_{n+1} = k d_0 \frac{1 - k^n}{1 - k}.$$

Pour pouvoir conclure, il faut savoir ce que devient k^n lorsque n augmente indéfiniment, c'est-à-dire devient supérieur à tout entier positif. Pour cela, posons $K = \frac{1}{k} = 1 + r$, donc K est supérieur (1) à 1 et r est positif. Vérifions par récurrence l'inégalité :

$$[1] \quad K^n > 1 + nr.$$

On vérifie :

$$K^2 = (1 + r)^2 = 1 + 2r + r^2 > 1 + 2r.$$

Admettons :

$$K^n > 1 + nr$$

et multiplions par $1 + r$ les deux membres de cette dernière inégalité.

Il vient :

$$K^{n+1} > (1 + nr)(1 + r) = 1 + (n + 1)r + nr^2$$

d'où :

$$K^{n+1} > 1 + (n + 1)r,$$

ce qui démontre [1] par récurrence.

Soit maintenant A positif quelconque. En prenant :

$$1 + nr > A,$$

donc $n > \frac{A-1}{r}$, ce qui est toujours possible, on montre que K^n tend vers $+\infty$. Comme $k^n = \frac{1}{K^n}$ il en résulte que

(1) Supérieur et inférieur sont toujours employés au sens strict.

k^n peut être rendu inférieur à tout ε positif par un choix convenable de n et que, par conséquent, k^n tend vers 0, ce qui revient à dire que :

$$\frac{k d_0}{1-k} - D_{n+1} = d_0 \frac{k^{n+1}}{1-k}$$

tend vers 0.

Le raisonnement de Zénon est valable tant que la tortue n'atteint pas le point B défini par $\overline{OB} = \frac{k d_0}{1-k}$, mais ne peut nous renseigner au-delà de cette limite que Zénon a ignorée.

II. — Limite

L'exemple précédent montre l'importance de la notion de limite mais aussi la nécessité d'en donner une définition rigoureuse pour assurer la validité des raisonnements.

Soit une suite infinie de nombres réels ou, plus brièvement de réels :

$$[2] \quad a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

On dira que cette suite admet une *limite* l (ou tend vers l) si, pour tout ε positif, il existe un entier N tel que, pour tout $n > N$:

$$[3] \quad |a_n - l| < \varepsilon,$$

l étant un réel. Toute suite réelle qui admet une limite, nécessairement réelle, est dite *convergente* (dans le corps des réels).

En formalisant l'écriture, on obtiendra :

$$u_n \rightarrow l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \Rightarrow \forall n > N, \quad |a_n - l| < \varepsilon,$$

les deux barres verticales désignant la valeur absolue de $a_n - l$.

L'inégalité [3] équivaut à :

$$[4] \quad l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$$

qui signifie que, à partir d'un certain rang N , tous les termes de la suite a_n sont compris entre $l - \varepsilon$ et $l + \varepsilon$ et sont ainsi tous très voisins de l . Il résulte intuitivement de [4] l'unicité de la limite. Plus précisément, si $l' \neq l$ est aussi une limite, $l' - l = l' - a_n + a_n - l$ implique :

$$[5] \quad |l' - l| \leq |l' - a_n| + |a_n - l| \\ = |l' - a_n| + |l - a_n| < 2\varepsilon$$

qui est incompatible avec $l \neq l'$, puisque ε peut être aussi petit que l'on veut.

Si les a_n , au moins à partir d'un certain rang, sont des nombres complexes, la définition précédente est toujours valable, les deux barres verticales signifiant alors que l'on prend le module de $l - a_n$ où l est un nombre complexe.

Posons $a_n = \alpha_n + i\beta_n$, $l = \lambda + i\mu$. Donc :

$$|a_n - l| = \sqrt{(\alpha_n - \lambda)^2 + (\beta_n - \mu)^2}$$

implique :

$$[5 \text{ bis}] \quad |\alpha_n - \lambda| < \varepsilon \quad \text{et} \quad |\beta_n - \mu| < \varepsilon.$$

Réciproquement, ces deux conditions impliquent :

$$|a_n - l| < \varepsilon \sqrt{2}$$

c'est-à-dire que $l = \lambda + i\mu$ est la limite de a_n .

Ainsi, pour qu'une suite complexe $a_n = \alpha_n + i\beta_n$ ait une limite $\lambda + i\mu$ il faut et il suffit que les deux suites réelles α_n et β_n que l'on peut en extraire aient toutes deux des limites réelles λ et μ . L'étude des suites complexes est ainsi réduite à l'étude de deux suites réelles.

III. — Condition de Cauchy

Lorsque la condition [3] est satisfaite, on écrit aussi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l.$$

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} D_n = \frac{k d_0}{1 - k}$ et l'on peut conclure à la convergence de la suite D_n , mais cette condition a l'inconvénient d'exiger la connaissance précise de la limite, ce qui n'est assuré que dans des cas particuliers.

Remarquons que de [3] on déduit, pour tout $m > n$:

$$[6] \quad |a_m - a_n| = |a_m - l + l - a_n| \\ \leq |l - a_n| + |l - a_m| \leq 2\varepsilon, \quad \forall m, n > N.$$

Cette condition [6] est appelée condition de Cauchy et l'on vient de voir qu'elle est nécessairement remplie si la limite existe. Comme l'étude topologique du corps des réels montre qu'elle est aussi suffisante, elle est équivalente à [3] et théoriquement très importante.

Si a_n est complexe, cette condition est toujours valable comme il résulte de la réduction d'une suite complexe à deux suites réelles.

IV. — Séries

A toute suite de terme général u_n nous associons une série en formant les sommes suivantes dites *sommes partielles*.

On pose :

$$\begin{aligned} S_1 &= u_1 \\ S_2 &= u_1 + u_2 \\ S_3 &= u_1 + u_2 + u_3 \\ &\vdots \\ S_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n. \end{aligned}$$

Si S_n a une limite S pour $n \rightarrow +\infty$, on dit que la *série* de terme général u_n converge et qu'elle a pour somme S , et l'on écrit :

$$[7] \quad S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots,$$

les points qui suivent u_n indiquant que le nombre des termes additionnés est infini.

La différence $S - S_n$ est appelée le *reste* de la série. Il y a évidemment autant de restes que de valeurs de n mais comme $S_n \rightarrow S$, et que :

$$[8] \quad S = S_n + R_n,$$

il résulte de [7] que $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$.

Une série qui n'est pas convergente est dite *divergente*. Pour qu'une série diverge, il faut et il suffit que S_n n'ait pas de limite lorsque n tend vers l'infini. Etudier la nature d'une série c'est décider de sa convergence ou de sa divergence. On remarque encore que, à toute série, on peut associer une suite en posant :

$$u_n = S_n - S_{n-1}.$$

La notion de série, comme celle de suite, est très générale. Elle ne fait intervenir que la notion de somme et celle de limite et elle peut, de ce fait, être généralisée aux groupes topologiques séparés, additifs et commutatifs, quelle que soit la nature des éléments. En particulier, elle peut s'appliquer aux éléments d'un espace vectoriel normé complet, mais nous commencerons par l'étude des séries numériques qui reste fondamentale, pour aborder ensuite les séries de fonctions et terminer par des exemples de généralisation moderne.

Voici quelques propositions concernant les séries numériques.

1^o La condition de Cauchy fournit tout d'abord une condition nécessaire de convergence. En effet, la différence

$$u_n = S_n - S_{n-1}$$

pourra être rendue aussi petite que l'on veut en prenant n assez grand, c'est-à-dire que :

Si u_n converge, le terme général u_n tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini.

Ce théorème est surtout utilisé négativement, c'est-à-dire sous la forme :

Si u_n ne tend pas vers zéro, la série u_n diverge. Soit par exemple :

$$u_n = \sin n.$$

On remarque que :

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq n \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

implique $\sin n \geq \frac{1}{2}$. A tout k , entier, les inégalités précédentes font correspondre au moins un entier n

puisque la différence $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi - \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)$ est supérieure à 1. Il existe donc des n aussi grands que l'on veut pour lesquels $\sin n$ est supérieur à $\frac{1}{2}$, et u_n ne peut tendre vers zéro.

2° D'autres conditions nécessaires peuvent aussi être déduites de la condition de Cauchy et, à vrai dire, une infinité, puisque m et n peuvent prendre dans [6] des valeurs quelconques dès l'instant qu'elles sont supérieures à N . Récrivons la condition [6] pour une série :

$$|S_m - S_n| < 2\varepsilon \quad \text{pour tous } m, n > N$$

et prenons $m = 2n$. On obtient :

$$|S_{2n} - S_n| < \varepsilon, \quad \forall n > N.$$

Ici encore, la forme négative du théorème est très utile. Soit, par exemple, la série $u_n = \frac{1}{n}$ (série harmonique). On obtient :

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

et cette série diverge puisque $S_{2n} - S_n$ ne tend pas vers zéro.

V. — Sommation

Pour étudier la nature d'une série, le procédé qui paraît le plus naturel consiste à calculer S_n et à étudier sa limite lorsque $n \rightarrow +\infty$. Soit S cette limite lorsqu'elle existe. On écrira souvent :

$$S = \sum_{n=1}^{n=+\infty} u_n,$$

la lettre grecque Σ indiquant la sommation et les valeurs de n inférieure et supérieure qui lui sont

associées indiquant les valeurs extrêmes de l'indice n de sommation. Cette écriture n'est en définitive qu'une abréviation de [7].

1° Soit $u_n = a^{n-1}$.

Si $a = 1$, $S_n = 1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} = n$, et u_n diverge.

Si a , réel ou complexe, est différent de 1, $S_n = \frac{1 - a^n}{1 - a}$,

et, si $|a| < 1$, $|a|^n \rightarrow 0$, donc $a^n \rightarrow 0$ et $S_n \rightarrow S = \frac{1}{1 - a}$,

si $|a| > 1$, $|a|^n \rightarrow +\infty$, donc S_n n'a pas de limite et u_n diverge.

Reste le cas $|a| = 1$, soit $a = \exp i\theta$ avec $\theta \neq 2k\pi$. On montre encore que $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$ n'ont pas de limite de telle sorte que a^n n'a pas de limite et que u_n diverge.

Le cas $a = -1$ permet une remarque intéressante car, alors, S_n vaut alternativement 1 et 0 dont la moyenne arithmétique est $\frac{1}{2}$, qui est précisément la valeur de $\frac{1}{1 - a}$ pour $a = -1$. Ceci suggère une généralisation de la notion de convergence, appelée convergence en moyenne et que nous examinerons ultérieurement. Au sens habituel de la convergence qui a été donné, u_n diverge puisque S_n n'a pas de limite.

2° S'il existe une fonction f telle que :

$$u_n = f(n) - f(n+1)$$

on obtient $S = f(1) - f(n+1)$ et on peut étudier la limite.

Ainsi $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ s'écrit $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, d'où :

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \text{ tend vers } 1 = S = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n.$$

De la même façon, si :

$$u_n = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{1}{n^2 + n + 1} = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{1}{n} - \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{1}{n+1}$$

on obtient $S_n = \frac{\pi}{4} - \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{1}{n+1}$ qui tend vers :

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n.$$

3° La méthode précédente peut se généraliser. Supposons par exemple qu'il existe une fonction f telle que :

$$u_n = Af(n) + Bf(n+1) + Cf(n+2)$$

avec $A + B + C = 0$.

On obtient :

$$u_n = A[f(n) - f(n+1)] + C[f(n+2) - f(n+1)]$$

et donc :

$$S_n = C[f(n+2) - f(2)] - A[f(n+1) - f(1)]$$

dont il ne reste plus qu'à étudier la limite.

Ainsi, soit :

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

Utilisons la décomposition des fractions rationnelles en éléments simples pour écrire :

$$u_n = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)},$$

identité que l'on peut vérifier directement. Il vient :

$$S_n = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n+2} - \frac{1}{2} \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n+1} - 1 \right]$$

qui tend vers $\frac{1}{4}$.

Le nombre des cas où une sommation aussi précise est possible reste peu important. Or, en pratique, la somme de toute série numérique convergente peut être déterminée avec toute l'approximation souhaitable de telle sorte que c'est la nature des séries et les opérations permises sur les séries convergentes qui, avant tout, sont intéressantes.