Serge Lang

Cours et exercices

2e cycle / Master • Agrégation • Écoles d'ingénieurs

ALGÈBRE

3e édition révisée

DUNOD

ALGÈBRE

Serge Lang
Professeur à l'université de Yale
Membre de l'Académie des sciences américaine

Traduit de l'américain par
Christos Grammatikas

3e édition révisée

DUNOD

Les éditions Dunod tiennent à remercier
M. Jean-Pierre Escofier
pour sa contribution à cet ouvrage.

© Dunod, 2004, 2014 pour la nouvelle présentation
5 rue Laromiguière, 75005 Paris
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-072004-0

Avant-propos

Le présent ouvrage est conçu comme support pour un cours d'algèbre d'une année, au niveau maîtrise.

L'ALGÈBRE EN PERSPECTIVE

Un cours d'algèbre de quatrième année doit, à mon avis, en priorité préparer l'étudiant à maîtriser l'algèbre qui fait partie de toutes les branches des mathématiques : topologie, équations aux dérivées partielles, géométrie différentielle, géométrie algébrique, analyse, théorie des représentations, sans parler de l'algèbre elle-même et de la théorie des nombres algébriques, avec toutes ses ramifications. Pour cette raison, j'ai systématiquement intercalé des références à des articles et livres des décennies récentes, pour indiquer certaines directions dans lesquelles les fondements algébriques exposés ici sont utilisés. J'ai accompagné ces références de quelques commentaires stimulants, expliquant comment les matières traitées ici s'articulent au sein des divers domaines mathématiques qui pourraient faire l'objet d'études ultérieures. J'ai aussi mentionné certains problèmes non résolus d'algèbre et de théorie des nombres, dont la conjecture *abc* est peut-être le plus spectaculaire.

Il est souvent inévitable, quand de tels commentaires et exemples ne suivent pas l'ordre logique — en particulier avec les exemples tirés d'autres branches des mathématiques — que certains termes ne soient pas définis ou le soient plus loin dans le texte. J'ai essayé d'aider le lecteur non seulement par des renvois à l'intérieur du livre mais aussi par des références à d'autres livres ou articles mentionnés explicitement.

J'ai aussi inclus un certain nombre d'exercices. Dans l'ensemble, j'ai essayé de les choisir comme compléments aux exemples et pour leur attrait esthétique. Ils servent aussi à orienter le lecteur vers des variantes et applications du thème principal et vers l'étude de cas particuliers, ouvrant la voie sur des sujets hors du cadre de cet ouvrage.

ORGANISATION

Malheureusement, un livre doit se conformer à un ordre strictement linéaire pour sa présentation, ce qui ne correspond pas à l'« essence » des mathématiques. Le lecteur aura ainsi à faire des choix et à aborder certains sujets en parallèle, plutôt que l'un après l'autre. J'ai inséré des références croisées pour faciliter la tâche, mais il est clair que ces choix dépendent de la personne, du moment et des circonstances.

Le livre se divise naturellement en plusieurs parties. La première introduit les notions de base de l'algèbre. Après cette introduction, le texte suit deux directions majeures : celle des équations algébriques, y compris la théorie de Galois, dans la deuxième partie, et celle de l'algèbre linéaire et multilinéaire dans la troisième et la quatrième partie. Il existe un va-et-vient sporadique entre elles, mais leur unification s'effectue à un niveau supérieur des mathématiques, comme il est suggéré par exemple à la section 15 du chapitre 6. En effet, l'étude des extensions algébriques des rationnels peut se faire de deux points de vue complémentaires et interconnectés : par la représentation linéaire du groupe de Galois de la clôture algébrique dans des groupes de matrices (l'approche linéaire) et par la détermination explicite des irrationnalités engendrant les extensions algébriques (l'approche des équations). Actuellement, les représentations dans GL_2 sont au centre de l'attention et le groupe GL_2 apparaît souvent dans ce livre. Par exemple, j'ai jugé opportun d'ajouter une section décrivant tous les caractères irréductibles de $GL_2(F)$ quand F est un corps fini. En dernière analyse, GL_2 apparaît comme le cas le plus simple mais le plus typique d'un groupe de Lie, tant dans un contexte différentiel que sur des corps finis ou des anneaux arithmétiques plus généraux, pour les applications arithmétiques.

Presque dix ans après la deuxième édition, je pense que les thèmes de base de l'algèbre sont stabilisés, à une exception près. J'ai rajouté deux sections sur la théorie de l'élimination, en complément de la section sur le résultant. La géométrie algébrique ayant progressé dans plusieurs directions, on revient à des problèmes plus anciens et plus difficiles, comme la construction effective de polynômes s'annulant sur certains ensembles algébriques ; les procédures d'élimination héritées du siècle dernier servent d'introduction à ces problèmes.

Cette adjonction mise à part, les sujets principaux sont ceux de la deuxième édition ; j'ai cependant essayé d'apporter un certain nombre d'améliorations.

Pour commencer, certains thèmes ont été réarrangés. De nombreux lecteurs et réviseurs m'ont fait part de la tension entre l'usage comme manuel pour étudiants peu expérimentés et comme livre de référence facilitant la recherche des résultats par un arrangement systématique. J'ai essayé d'atténuer cette tension en plaçant la totalité de l'algèbre homologique dans une quatrième partie et en intégrant l'algèbre commutative avec le chapitre sur les ensembles algébriques et la théorie de l'élimination, offrant ainsi une introduction à des points de vue différents conduisant à la géométrie algébrique.

LE LIVRE COMME MANUEL ET COMME RÉFÉRENCE

Un enseignant peut choisir de s'orienter vers l'étude des équations algébriques de la deuxième partie ou de commencer par l'algèbre linéaire des parties 3 et 4. Un semestre pourrait être consacré à chacun des deux domaines, par exemple. Les chapitres sont rédigés dans un souci de flexibilité maximale et j'ai fréquemment commis le crime de lèse-Bourbaki en répétant des définitions et des démonstrations courtes pour rendre certaines sections ou chapitres logiquement autonomes.

Abstraction faite du matériel qui ne peut en aucun cas être omis d'un cours de base, il existe de nombreuses options pour la conduite et l'orientation d'un cours. Il est impossible de les aborder toutes avec le même degré de profondeur. Le point précis auquel on décide de quitter une direction donnée dépend du temps, du lieu et de l'état d'esprit. Néanmoins, tout livre qui affiche ces ambitions doit inclure un choix de matières, s'aventurant en eaux profondes mais sans s'y engager totalement.

Il ne peut exister d'accord universel en la matière, même entre l'auteur et lui-même. Les décisions finales quant à l'inclusion ou non de tel ou tel sujet sont ainsi à prendre sur la base d'une cohérence générale et d'un équilibre esthétique. Tout responsable de cours voudra imprimer sa personnalité et pourra poursuivre certains thèmes avec plus de vigueur que moi-même, au détriment d'autres. Rien dans ce livre ne vise à l'en dissuader.

Malheureusement, l'objectif de présenter une perspective relativement complète de l'algèbre a nécessité une augmentation substantielle du volume entre la première et la deuxième édition et une augmentation modeste pour cette troisième édition. Ces augmentations obligent à faire des choix quant aux matières à omettre lors d'un cours.

Des raccourcis peuvent être empruntés pour la présentation des sujets, qui peut prendre plusieurs formes. Par exemple, on peut s'engager dans la théorie des corps et la théorie de Galois immédiatement après avoir donné les définitions de base pour les groupes, les anneaux, les corps, les polynômes à une indéterminée et les espaces vectoriels. Comme la théorie de Galois donne très rapidement une impression de profondeur, cette approche est satisfaisante à plusieurs égards.

Il est approprié de rappeler ici ma dette personnelle à Artin, qui fut mon premier professeur d'algèbre. Le traitement des fondements de la théorie de Galois est très influencé par son exposé dans sa propre monographie.

À QUI CE LIVRE S'ADRESSE

Comme je l'ai déjà écrit dans les préfaces aux éditions antérieures, le présent ouvrage s'adresse aux étudiants en maîtrise, censés avoir les connaissances en algèbre dispensées par l'enseignement du premier cycle ou posséder une maturité mathématique appropriée. Le lecteur doit être familier avec les espaces vectoriels, les applications linéaires, les matrices ainsi qu'avec les polynômes, ne serait-ce que par le biais d'un cours d'analyse.

Mes livres *Undergraduate Algebra* et *Linear Algebra* contiennent largement les bases requises pour aborder un cours de maîtrise. Ces manuels élémentaires mettent en avant, en parallèle, les deux aspects fondamentaux de l'algèbre. Leur organisation est différente de celle du présent ouvrage, où ces deux aspects sont approfondis. Bien entendu, certains aspects d'algèbre linéaire de la troisième partie de ce livre sont plus « élémentaires » que certains aspects de la deuxième partie, qui traite de la théorie de Galois et des équations polynomiales à plusieurs indéterminées. Le traitement des équations algébriques de la deuxième partie s'étant approfondi, le développement parallèle de l'algèbre linéaire s'est trouvé repoussé plus loin dans l'ordonnancement du livre. Le lecteur devrait concevoir ces deux parties comme se développant simultanément.

Malheureusement, la quantité de résultats à assimiler, durant un cours d'algèbre d'une année, afin d'acquérir des bases solides (indépendamment de la branche à laquelle on se destine) dépasse la capacité physique d'un professeur à les transmettre. Il est ainsi nécessaire d'inclure du matériel supplémentaire, qui ne pourra pas être couvert mais qu'il est essentiel de porter à l'attention de l'étudiant.

J'espère que les diverses additions et modifications faciliteront l'utilisation de ce manuel. Par ces additions, j'ai essayé d'élargir l'horizon mathématique du lecteur, dans la mesure où l'algèbre est liée à d'autres parts des mathématiques.

REMERCIEMENTS

Je suis tributaire de nombreuses personnes pour leurs commentaires et critiques sur les éditions précédentes, mais surtout à Daniel Bump, Steven Krantz et Diane Meuser, qui ont fait des commentaires approfondis en tant que réviseurs pour les éditions Addison-Wesley. J'ai trouvé leurs commentaires très stimulants et précieux pour la préparation de cette troisième édition. Je dois beaucoup à Barbara Holland pour avoir organisé ces révisions quand elle occupait un poste éditorial. Je suis aussi tributaire de Karl Matsumoto, qui a supervisé la production dans des circonstances très difficiles. Je dois finalement remercier les nombreuses personnes qui ont fait des suggestions et des corrections, en particulier Georges Bergman, Chee-Whye Chin, Ki-Bong Nam, David Wasserman et Randy Scott, pour leurs listes d'errata. Je remercie aussi Thomas Shiple et Paul Vojta pour leurs listes d'errata de la troisième édition, corrigés dans les réimpressions subséquentes.

Serge Lang
New Haven

Avant-propos à l'édition française

Je suis très sensible à la décision des éditions *DUNOD* de publier une traduction française d'*Algebra*. J'apprécie beaucoup la peine que s'est donné Christos Grammatikas pour la traduction et je le remercie pour ses efforts qui permettront un accès plus facile à ce livre en France.

Cette publication me donne l'occasion de rajouter une quinzaine de pages sur certains aspects de SL_n : la décomposition d'Iwasawa, décomposition de Cartan et la décomposition semi-simple de l'algèbre de Lie vis-à-vis l'opération de conjugaison par le groupe des matrices diagonales, les composantes irréductibles étant alors de dimension 1. Le cas de SL_n fournit une introduction à des cas semblables plus généraux (groupes dits semi-simples), en même temps qu'il donne un exemple substantiel pour des notions générales. On trouvera ces rabiots aux chapitres 13, 15 et 17. Ceci mis à part, je considère le livre comme stable. Les lecteurs désireux de voir comment l'algèbre ci-dessus se développe pour former un cadre pour l'analyse sur $SL_n(\mathbb{R})$ (par exemple) sont renvoyés au livre *Spherical Inversion on* $SL_n(\mathbb{R})$, de Jorgenson-Lang, Springer-Verlag, chapitre I, chapitre III, § 8 et chapitre V, § 1 et § 2 (décomposition de Bruhat).

Serge Lang
New Haven, 2004

Note du traducteur

Un effort a été fait pour adopter, dans le texte traduit, la terminologie consacrée par la tradition mathématique française. Cet effort a été grandement facilité par l'intervention personnelle de l'auteur, qui maîtrise parfaitement le français.

L'original anglais de certains termes est donné dans l'index, entre parenthèses et en caractères gras, quand la correspondance n'est pas totalement évidente.

Je tiens à remercier Serge Lang pour ses encouragements et pour sa disponibilité à répondre rapidement à toutes mes questions. Je remercie aussi René Cori, Michel Coste, Antoine Ducros, François Heroult, Bernhard Keller, Rached Mneïmné, Laurent Moret-Bailly, Frédéric Touzet et Gérard Tronnel pour leur aide précieuse. Plus que tout, je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Jean-Pierre Escofier, qui a relu l'ensemble du manuscrit, corrigé de nombreuses erreurs et apporté d'innombrables améliorations.

Christos Grammatikas
Paris, 2004

Préliminaires logiques

Nous supposons que le lecteur est familier avec les ensembles et avec les symboles $\cap$, $\cup$, $\supset$, $\subset$, $\in$. Pour A et B des ensembles, l'expression $A \subset B$ signifie que A est contenu dans B mais peut être égal à B ; de même pour $A \supset B$.

Si $f : A \to B$ est une application d'un ensemble dans un autre, on note

$$x \mapsto f(x)$$

l'effet de f sur un élément x de A. On fait la distinction entre les flèches $\to$ et $\mapsto$. On désigne par $f(A)$ l'ensemble de tous les éléments $f(x)$, avec $x \in A$.

Soit $f : A \to B$ une application. On dit que f est **injective** si $x \neq y$ implique $f(x) \neq f(y)$. On dit que f est **surjective** si, pour tout $b \in B$, il existe $a \in A$ tel que $f(a) = b$. On dit que f est **bijective** si elle est à la fois injective et surjective.

Un sous-ensemble A d'un ensemble B est dit **propre** si $A \neq B$.

Soient $f : A \to B$ une application et A' un sous-ensemble de A. La restriction de f à A' est une application de A' dans B, notée $f \restriction A'$.

Si $f : A \to B$ et $g : B \to C$ sont des applications, on a une application composée $g \circ f$ telle que $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ pour tout $x \in A$.

Soient $f : A \to B$ une application et B' un sous-ensemble de B. On note $f^{-1}(B')$ le sous-ensemble des éléments $x \in A$ tels que $f(x) \in B'$ et on l'appelle l'**image inverse** de B'. On appelle $f(A)$ l'**image** de f.

Un **diagramme**

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

est dit **commutatif** si $g \circ f = h$. De même, un **diagramme**

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ C & \xrightarrow[\psi]{} & D \end{array}$$

est dit **commutatif** si $g \circ f = \psi \circ \varphi$. Souvent les diagrammes sont plus compliqués, avec de nombreuses flèches entre objets variés. De tels diagrammes sont dits commutatifs si chaque fois que deux objets sont reliés par deux suites de flèches,

$$A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} A_n$$

et

$$A_1 \xrightarrow{g_1} B_2 \xrightarrow{g_2} \cdots \xrightarrow{g_{m-1}} B_m = A_n,$$

on a l'égalité des applications composées

$$f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1 = g_{m-1} \circ \cdots \circ g_1.$$

La plupart des diagrammes consisteront en triangles et carrés comme ci-dessus et, pour vérifier qu'ils sont commutatifs, il suffira de le vérifier pour chaque triangle ou carré individuel.

On considère que le lecteur est familier avec les nombres entiers, rationnels, réels et complexes, notés respectivement $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

Soient A et I deux ensembles. Une famille d'éléments de A, indexée par I, est une application $f : I \to A$. À chaque $i \in I$, on associe ainsi un élément $f(i) \in A$. Bien qu'une famille ne soit pas différente d'une application, on considère qu'elle détermine une collection d'objets dans A, notée

$$(f(i))_{i \in I} \qquad \text{ou} \qquad (a_i)_{i \in I},$$

en posant $a_i = f(i)$. On appelle I l'ensemble des indices.

On suppose que le lecteur connaît les relations d'équivalence. Soit A un ensemble muni d'une relation d'équivalence et E une classe d'équivalence d'éléments de A. Il nous faut parfois définir une application des classes d'équivalence dans un ensemble B. Pour définir une application f sur la classe E, on donne parfois sa valeur sur un élément $x \in E$ (appelé un représentant de E) et on montre ensuite qu'elle est indépendante du choix du représentant $x \in E$. On dit dans ce cas que f est **bien définie**.

On construit des produits d'ensembles qui peuvent être finis, comme $A \times B$ et $A_1 \times \cdots \times A_n$, ou infinis.

Nous aurons à utiliser le lemme de Zorn, décrit dans l'annexe B.

On notera $\#(S)$ le nombre d'éléments d'un ensemble S, appelé aussi le **cardinal** de S. Cette notation est surtout employée quand S est fini. On notera aussi $\#(S) = \mathrm{card}(S)$.

Table des matières

PARTIE 2 • ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES