de Gruyter Lehrbuch

Hans-Joachim Kowalsky
Gerhard O. Michler

Lineare Algebra

12., überarbeitete Auflage

W DE G

Hans-Joachim Kowalsky
Gerhard O. Michler

Lineare Algebra

12., überarbeitete Auflage

W
DE
G
Walter de Gruyter
Berlin · New York 2003

Hans-Joachim Kowalsky
Am Schiefen Berg 20
38302 Wolfenbüttel

Gerhard O. Michler
Hofringstr. 25
45138 Essen

Mathematics Subject Classification 2000: 15-01

Auflagenchronik:

1. Auflage 1963
2. Auflage 1965
3. Auflage 1967
4. Auflage 1968
5. Auflage 1970
6. Auflage 1971
7. Auflage 1974
8. Auflage 1977
9. Auflage 1979
10. Auflage 1995
11. Auflage 1998

∞ Gedruckt auf säurefreiem Papier, das die US-ANSI-Norm über Haltbarkeit erfüllt.

ISBN 3-11-017963-6

Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.ddb.de abrufbar.

Printed in Germany.
Umschlaggestaltung: Hansbernd Lindemann, Berlin.
Konvertierung von LATEX-Dateien der Autoren: I. Zimmermann, Freiburg.
Druck und Bindung: Hubert & Co. GmbH & Co. KG, Göttingen.

Vorwort

Da die 12. Auflage der Linearen Algebra gerade im 40. Erscheinungsjahr des Buchs herauskommt, ist es den Verfassern ein Anliegen, bereits am Anfang des Vorworts dem Verlag für die langjährige engagierte, verständnisvolle und entgegenkommende Zusammenarbeit zu danken. Eine bedeutende Förderung erfuhr das Buch seitens des Verlages durch Herrn Dr. Karbe. Mit Einfühlungsvermögen und fachlicher Kompetenz gelang ihm 1994 die Verpflichtung eines zweiten Autors, so daß dann in gemeinsamer Arbeit beider Autoren die 10. Auflage in neuer Überarbeitung und in modernisierter Form erscheinen konnte.

Diese 12. Auflage weist gegenüber der vorigen nur eine wesentliche Umstellung auf, in deren Folge lediglich unbedeutende Änderungen auftreten. Die für Anwender wichtige Jordansche Normalform quadratischer Matrizen, die bisher erst nach der Behandlung der Moduln am Ende des Buchs auftrat, wird jetzt bereits in Kapitel 6 „Eigenwerte und Eigenvektoren“ auf elementarerem Weg gewonnen. Dadurch wird die für mancherlei Anwendungen wünschenswerte Behandlung schon im ersten Semester ermöglicht. Als ein Anwendungsbeispiel wird anschließend auf das Lösen homogener linearer Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung eingegangen.

Abschließend gilt unser besonderer Dank Frau B. Hasel für die große Mühe und für ihr Engagement bei der Erstellung des neuen Textes und der durch ihn bedingten Korrekturen.

Braunschweig und Essen, Mai 2003

H.-J. Kowalsky
G. O. Michler

Einleitung

In der Mathematik hat man es vielfach mit Rechenoperationen zu tun, die sich zwar auf völlig verschiedene Rechengrößen beziehen und somit auch auf ganz unterschiedliche Weise definiert sein können, die aber trotz dieser Verschiedenheit gemeinsamen Rechenregeln gehorchen. In der Algebra abstrahiert man von der speziellen Natur der Rechengrößen und Rechenoperationen und untersucht ganz allgemein die Gesetzmäßigkeiten, denen sie unterliegen. Ausgehend von einigen Rechenregeln, die man als Axiome an den Anfang stellt, entwickelt man die Theorie der durch diese Axiome charakteristierten abstrakten Rechenstrukturen. Die Lineare Algebra bezieht sich speziell auf zwei Rechenoperationen, die sogenannten linearen Operationen, und auf die entsprechenden Rechenstrukturen, die man als Vektorräume bezeichnet. Die grundlegende Bedeutung der Linearen Algebra besteht darin, daß zahlreiche konkrete Strukturen als Vektorräume aufgefaßt werden können, so daß die allgemein gewonnenen Ergebnisse der abstrakten Theorie auf sie anwendbar sind.

Das Hauptinteresse der Linearen Algebra gilt indes nicht nur dem einzelnen Vektorraum, sondern auch den Beziehungen, die zwischen Vektorräumen bestehen. Derartige Beziehungen werden durch spezielle Abbildungen beschrieben, die mit den linearen Operationen verträglich sind und die man lineare Abbildungen nennt.

Dieses Buch behandelt den Stoff einer zweisemestrigen Vorlesung über Lineare Algebra. Seine Lektüre erfordert zwar keine speziellen Vorkenntnisse, setzt aber doch beim Leser eine gewisse Vertrautheit mit mathematischen Begriffsbildungen und Beweismethoden voraus. Die Stoffanordnung folgt nur teilweise systematischen Gesichtspunkten, die vielfach zugunsten didaktischer Erwägungen durchbrochen sind. Neben der Beschreibung der Struktur eines Vektorraums und der Klassifikation seiner linearen Abbildungen in sich wird der Entwicklung der Algorithmen für die Berechnung der zugehörigen Invarianten und Normalformen ein breiter Raum gegeben. Daher werden zunächst die endlich-dimensionalen Vektorräume und ihre Abbildungen behandelt. Danach wird der allgemeine, nicht notwendig endlich-dimensionale Fall betrachtet.

Die für Anwender wichtige Jordansche Normalform quadratischer Matrizen wird in Kapitel 6 „Eigenwerte und Eigenvektoren" auf elementarerem Weg gewonnen. Die rationale Normalform einer Matrix und die Elementarteilertheorie werden in Kapitel 12 als Anwendungen des Struktursatzes über endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen behandelt. Er wird in Kapitel 11 bewiesen. Dazu werden in Kapitel 9 einige Grundlagen aus der Ringtheorie und der Theorie der Moduln über kommutativen Ringen bereitgestellt.

In den Kapiteln 9 und 10 wird auch die Struktur der Gesamtheit aller linearen Abbildungen untersucht. Hierbei treten die Vektorräume bzw. Moduln nur noch als bloße Objekte auf, zwischen denen universelle Abbildungen definiert sind, deren interne Struktur aber nicht mehr in Erscheinung tritt. Dennoch können interne Eigenschaften von Vektorräumen und Moduln auch extern in der Kategorie der linearen Abbildungen beschrieben werden. Gerade diese Möglichkeit spielt bei der Konstruktion des Tensorprodukts und der damit abgeleiteten Theorie der Determinanten über kommutativen Ringen im zehnten Kapitel eine wesentliche Rolle.

Da bei Anwendungen der Linearen Algebra oft lineare Gleichungssysteme mit einer großen Anzahl von Unbekannten und linearen Gleichungen oder Normalformprobleme von großen Matrizen auftreten, die nur mit Hilfe von Computern gelöst werden können, wird der mathematische Stoff nicht nur theoretisch sondern auch vom algorithmischen Standpunkt aus behandelt. Alle Algorithmen zur Berechnung von Normalformen von Matrizen werden in der heute üblichen Bezeichnungsweise abgefaßt, vgl. Algorithmen-Konvention 4.1.17 in Kapitel 4. Sie können auch in die Syntax von Computeralgebrasystemen wie Maple [3] oder Mathematica [32] übersetzt werden.

Bei der Numerierung wurde folgendes Prinzip angewandt: Definitionen, Sätze und Beispiele sind an erster Stelle durch die Nummer des jeweiligen Kapitels gekennzeichnet. An zweiter Stelle steht die Nummer des Abschnitts und an dritter Stelle werden schließlich Definitionen, Sätze, Beispiele u.s.w. durchnumeriert. Die Aufgaben sind jeweils am Ende eines Kapitels in einem gesonderten Abschnitt zusammengestellt. Das Ende eines Beweises ist durch das Zeichen ♦ kenntlich gemacht. Neu definierte Begriffe sind im Text im allgemeinen durch Kursivdruck hervorgehoben; auf sie wird im Sachverzeichnis verwiesen.

Am Ende des Buches befinden sich zwei Anhänge. Im Anhang A werden Hinweise zur Benutzung von Computeralgebrasystemen gegeben. Dazu gehört ein Überblick über die Rechenverfahren, die man mit Maple oder Mathematica durchführen kann. Es wird außerdem anhand einer 11×11-Matrix $\mathcal{A}$ mit ganzzahligen Koeffizienten und Eigenwerten gezeigt, wie man die Jordansche Normalform J von $\mathcal{A}$ und die Transformationsmatrix $\mathcal{P}$ mit $J = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}$ schrittweise mit Maple berechnen kann.

Der Anhang B enthält die Lösungen der Aufgaben, die aus Platzgründen allerdings sehr knapp gehalten sind. Bei numerischen Aufgaben, deren Lösungsweg vorher behandelt wurde, sind im allgemeinen nur die Ergebnisse angegeben.

An diese beiden Anhänge schließt sich das Literaturverzeichnis an, das nur eine kleine Auswahl der Lehrbuchliteratur enthält. Es folgt der Index.

Bezeichnungen und Symbole

Alle Vektorräume V sind Rechtsvektorräume über einem kommutativen Körper F, d. h. die Körperelemente $f \in F$ operieren von rechts auf den Vektoren $\boldsymbol{v}$ der abelschen Gruppe V, die stets fett gedruckt sind. Abbildungen $\alpha : V \to W$ zwischen Vektorräumen werden mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet; sie operieren von links auf den Vektoren $\boldsymbol{v} \in V$. Diese Schreibweise hat den Vorteil, daß die Matrix $\mathcal{A}_{\beta\alpha}$, die zur Hintereinanderausführung $\beta\alpha$ zweier linearer Abbildungen β und α gehört, das Produkt $\mathcal{A}_\beta \mathcal{A}_\alpha$ der beiden Matrizen $\mathcal{A}_\beta$ und $\mathcal{A}_\alpha$ der linearen Abbildungen β und α ist, vgl. Satz 3.3.7.

Wegen der Definition des Produkts zweier Matrizen (vgl. 3.1.17) erfordert allerdings diese Festlegung, daß ein Vektor $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ des n-dimensionalen arithmetischen Vektorraums F^n über dem Körper F in diesem Buch stets als *Spaltenvektor*

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

aufgefaßt wird. Da Spaltenvektoren drucktechnisch sehr unbequem sind und zuviel Platz in Anspruch nehmen, werden die Vektoren $\boldsymbol{a} \in F^n$ meist als Textzeilen $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ geschrieben, d. h. $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in F^n$ bedeutet, daß $\boldsymbol{a}$ als Spaltenvektor aufzufassen ist.

An wenigen Stellen des Buches ist es notwendig, Spalten- und Zeilenvektoren zur gleichen Zeit zu betrachten. In diesen Fällen schreibt man:

$F_s^n = F^n$	für den n-dimensionalen Spaltenraum über dem Körper F,
F_z^n	für den n-dimensionalen Zeilenraum über dem Körper F.

Bei Matrizen sind bisweilen Nulleinträge der Übersicht halber leer gelassen.

Während im ersten Kapitel die Verknüpfung zweier Elemente in einer Gruppe bzw. die Hintereinanderausführung zweier Abbildungen mit $\circ$ gekennzeichnet wird, wird ab Kapitel 2 auf dieses Zeichen $\circ$ verzichtet und ab statt $a \circ b$ bzw. $\beta\alpha$ statt $\beta \circ \alpha$ geschrieben. Die Addition in einem Vektorraum, Modul, Ring oder Körper wird stets mit $+$ bezeichnet.

F_s^n	(S. XIII)	$U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_n$	(2.3.4; S. 37)
F_z^n	(S. XIII)	$s(\mathcal{A})$	(3.1.1; S. 44)
$\mathbb{N}$	(1.1; S. 1)	$z(\mathcal{A})$	(3.1.1; S. 44)
$\mathbb{Z}$	(1.1; S. 2)	$\mathcal{E}_n$	(3.1.2b; S. 45)
$M \subseteq N$	(1.1.1; S. 2)	$\mathcal{A}^T$	(3.1.25; S. 51)
$M \subset N$	(1.1.2; S. 2)	$\mathcal{A}^{-1}$	(3.1.29; S. 51)
$\bigcap \{M \mid M \in S\}$	(1.1.3; S. 2)	$V \cong W$	(3.2.2; S. 53)
$\bigcap_{M \in S} M$	(1.1.3; S. 2)	$\mathrm{Ker}(\alpha)$	(3.2.6; S. 55)
$\bigcup \{M \mid M \in S\}$	(1.1.4; S. 2)	$\mathrm{Im}\,(\alpha)$	(3.2.6; S. 55)
$\bigcup_{M \in S} M$	(1.1.4; S. 2)	$\mathrm{rg}(\alpha)$	(3.2.16; S. 59)
$M \backslash N$	(1.1.6; S. 3)	$\mathcal{A}_\alpha(A, B)$	(3.3.1; S. 60)
$\{A_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$	(1.1.6; S. 3)	$\mathrm{rg}(\mathcal{A})$	(3.4.5; S. 66)
$\psi \circ \varphi$	(1.1.13; S. 5)	$\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$	(3.5.1; S. 68)
φ^-	(1.1.10; S. 5)	$\mathrm{tr}(\mathcal{A})$	(3.5.6; S. 69)
id	(1.1.14; S. 5)	$\mathrm{Hom}_F(V, W)$	(3.6; S. 70)
$A \times B$	(1.2.1; S. 6)	$\mathrm{End}_F(V)$	(3.6.2; S. 71)
$\prod$	(1.2.3; S. 6)	$\mathrm{GL}(V)$ oder $\mathrm{GL}(n, F)$	(3.6.3; S. 71)
A^n	(1.2.3; S. 6)	$\mathrm{Mat}_{m,n}(F)$	(3.6.4; S. 71)
$\sim$	(1.2.4; S. 6)	$R \cong S$	(3.6.5; S. 72)
$\|G\|$	(1.3.1; S. 9)	$\mathrm{Mat}_n(F)$	(3.6.6a; S. 72)
$\mathbb{Q}^*$	(1.3.2b; S. 9)	V^*	(3.6.7; S. 73)
$\mathbb{R}^*$	(1.3.2b; S. 9)	$U^\perp$	(3.6.11; S. 74)
S_n	(1.3.2c; S. 10)	$\alpha_{\|U}$	(3.7.2; S. 75)
$U \leq G$	(1.3.9; S. 11)	$ZV(i, j)$	(4.1.12a; S. 83)
$\mathbb{Q}$	(1.4.2a; S. 13)	$ZM(i, a)$	(4.1.12b; S. 83)
$\mathbb{R}$	(1.4.2a; S. 13)	$ZA(i, j, a)$	(4.1.12c; S. 84)
$\mathbb{C}$	(1.4.2b; S. 13)	$\mathcal{T}(\mathcal{A})$	(4.1.18; S. 86)
F^*	(1.4; S. 13)	$\mathrm{zpivot}\,(\mathcal{A}, i, j)$	(4.1.22; S. 88)
Re	(1.4.2b; S. 13)	$\mathrm{spivot}\,(\mathcal{A}, i, j)$	(4.1.22; S. 88)
Im	(1.4.2b; S. 13)	$\mathrm{sign}\,\pi$	(5.1.8; S. 101)
$\mathrm{Grad}\, f$	(1.4.3c; S. 14)	A_n	(5.1.12; S. 102)
$F[X]$	(1.4.3c; S. 15)	$\det(\alpha)$	(5.3.1; S. 106)
$\binom{n}{k}$	(1.4.3c; S. 21)	$\det \mathcal{A}$	(5.3.4; S. 109)
$U \leq V$	(2.1.1; S. 24)	$\mathrm{adj}\, \mathcal{A}$	(5.5; S. 117)
$\langle \boldsymbol{v}_i \mid 1 \leq i \leq r \rangle$	(2.1.7; S. 26)	$\mathrm{char\,Pol}_{\mathcal{A}}(X)$	(6.1.8; S. 123)
$\langle M \rangle$	(2.1.9; S. 26)	$\mathrm{char\,Pol}_\alpha(X)$	(6.1.8; S. 123)
$\dim V$	(2.2.12; S. 31)	$\mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$	(6.2.3; S. 129)
$\dim_F V$	(2.2.12; S. 31)	$\mathcal{J}_{ij_i}$	(6.3.11d; S. 140)
$\dim U = \infty$	(2.2.12; S. 31)	$\hat{\alpha}$	(7.1.14; S. 157)
$\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha$	(2.3.2; S. 36)	$\|\boldsymbol{x}\|$	(7.2.2; S. 159)
$\bigoplus_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha$	(2.3.4; S. 37)	$\cos(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$	(7.2.9; S. 161)

$\delta_{i,j}$	(7.2; S. 162)
$M \perp N$	(7.3.4; S. 167)
α^*	(7.4.1; S. 169)
$\mathcal{A}^*$	(7.4.4; S. 170)
$O(n, \mathbb{R})$	(7.5.10a; S. 181)
$U(n, \mathbb{C})$	(7.5.10b; S. 181)
$t(\mathcal{A})$	(7.6.7; S. 187)
$\mathfrak{U} \leq \mathfrak{A}$	(8.1.4; S. 195)
$\overrightarrow{pq}$	(8.1.1; S. 194)
$\dim \mathfrak{A} = \dim V_{\mathfrak{A}}$	(8.1.1; S. 195)
$\vee\{\mathfrak{U} : \mathfrak{U} \in S\}$	(8.1.8; S. 196)
$\mathfrak{U}_1 \vee \cdots \vee \mathfrak{U}_n$	(8.1.8; S. 196)
$\mathfrak{U} \Vert \mathfrak{W}$	(8.1.13; S. 197)
$TV(x, y, z)$	(8.1.24; S. 200)
$p - \dim \mathfrak{P}$	(8.4.1; S. 215)
$DV(x, y, z, u)$	(8.4.14; S. 221)
$Q \sim Q'$	(8.6.6; S. 227)
$u(Q)$	(8.6.9; S. 227)
$d(Q)$	(8.6.14; S. 229)
$Q_0 \approx Q'_0$	(8.7.4; S. 232)
$Q \approx Q'$	(8.7.4; S. 232)
$r \sim s$	(9.1.4; S. 245)
$r \sim_Y s$	(9.1.4; S. 245)
$\sum_{i=1}^k U_i$	(9.2.6; S. 250)
$\bigoplus_{i=1}^k U_i$	(9.2.7; S. 250)
$\mathrm{Hom}_R(M, N)$	(9.2.9; S. 251)
$u \sim_U v$	(9.2.13; S. 251)
M/U	(9.2.15; S. 253)
$R^{\mathfrak{M}}$	(9.4.13; S. 260)
$\Pi_{\alpha \in \mathcal{A}} M_\alpha$	(9.6.2; S. 266)
$A \otimes_R B$	(10.1.4; S. 280)
$a \otimes b$	(10.1.4; S. 280)
$\otimes_p M$	(10.1.12; S. 285)
$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$	(10.2.2; S. 288)
$\bigwedge_p M$	(10.4.1; S. 292)
$a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_p$	(10.4.1; S. 292)
$t \mid a$	(11.1.13; S. 307)
$\mathrm{ggT}(a, b)$	(11.1.14; S. 307)
$\mathrm{kgV}(a, b)$	(11.1.15; S. 307)
$\mathrm{Ann}(m)$	(11.3.3; S. 316)
$o(M)$	(11.3.6; S. 318)
$o(m)$	(11.3.7; S. 318)
$\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_r, 0)$	(11.5.5; S. 328)
$m(X)$	(12.1.4; S. 347)
$\mathcal{C}(f(X))$	(12.1.8; S. 348)

Inhaltsverzeichnis

Vorwort V

Einleitung VII

Bezeichnungen und Symbole XII

1 Grundbegriffe 1
- 1.1 Mengentheoretische Grundbegriffe 1
- 1.2 Produktmengen und Relationen 6
- 1.3 Gruppen 8
- 1.4 Körper und Ringe 12
- 1.5 Vektorräume 15
- 1.6 Lineare Gleichungssysteme 20
- 1.7 Aufgaben 21

2 Struktur der Vektorräume 23
- 2.1 Unterräume 24
- 2.2 Basis und Dimension 27
- 2.3 Direkte Summen und Struktursatz 36
- 2.4 Aufgaben 41

3 Lineare Abbildungen und Matrizen 43
- 3.1 Matrizen 44
- 3.2 Lineare Abbildungen 52
- 3.3 Matrix einer linearen Abbildung 60
- 3.4 Rang einer Matrix 64
- 3.5 Äquivalenz und Ähnlichkeit von Matrizen 67
- 3.6 Abbildungsräume und Dualraum 70
- 3.7 Matrizen und direkte Zerlegung 75
- 3.8 Aufgaben 76

4 Gauß-Algorithmus und lineare Gleichungssysteme 80
4.1 Gauß-Algorithmus . . . 80
4.2 Lösungsverfahren für Gleichungssysteme . . . 90
4.3 Aufgaben . . . 96

5 Determinanten 99
5.1 Permutationen . . . 99
5.2 Multilinearformen . . . 102
5.3 Determinanten von Endomorphismen und Matrizen . . . 106
5.4 Rechenregeln für Determinanten von Matrizen . . . 110
5.5 Anwendungen . . . 117
5.6 Aufgaben . . . 118

6 Eigenwerte und Eigenvektoren 121
6.1 Charakteristisches Polynom und Eigenwerte . . . 121
6.2 Diagonalisierbarkeit von Matrizen . . . 128
6.3 Jordansche Normalform . . . 132
6.4 Anwendung der Jordanschen Normalform . . . 144
6.5 Aufgaben . . . 148

7 Euklidische und unitäre Vektorräume 152
7.1 Skalarprodukte und Hermitesche Formen . . . 152
7.2 Betrag und Orthogonalität . . . 158
7.3 Orthonormalisierungsverfahren . . . 164
7.4 Adjungierte Abbildungen und normale Endomorphismen . . . 169
7.5 Orthogonale und unitäre Abbildungen . . . 178
7.6 Hauptachsentheorem . . . 182
7.7 Aufgaben . . . 190

8 Anwendungen in der Geometrie 194
8.1 Affine Räume . . . 194
8.2 Affine Abbildungen . . . 200
8.3 Kongruenzen und Drehungen . . . 204
8.4 Projektive Räume . . . 215
8.5 Projektivitäten . . . 222
8.6 Projektive Quadriken . . . 225
8.7 Affine Quadriken . . . 231
8.8 Aufgaben . . . 241

9 Ringe und Moduln 244
9.1 Ideale und Restklassenringe . . . 244
9.2 Moduln . . . 248
9.3 Kommutative Diagramme und exakte Folgen . . . 255
9.4 Endlich erzeugte und freie Moduln . . . 257
9.5 Matrizen und lineare Abbildungen freier Moduln . . . 262
9.6 Direkte Produkte und lineare Abbildungen . . . 264
9.7 Aufgaben . . . 276

10 Multilineare Algebra 279
10.1 Multilineare Abbildungen und Tensorprodukte . . . 279
10.2 Tensorprodukte von linearen Abbildungen . . . 287
10.3 Ringerweiterungen und Tensorprodukte . . . 289
10.4 Äußere Potenzen und alternierende Abbildungen . . . 292
10.5 Determinante eines Endomorphismus . . . 298
10.6 Aufgaben . . . 301

11 Moduln über Hauptidealringen 303
11.1 Eindeutige Faktorzerlegung in Hauptidealringen . . . 304
11.2 Torsionsmodul eines endlich erzeugten Moduls . . . 312
11.3 Primärzerlegung . . . 315
11.4 Struktursatz für endlich erzeugte Moduln . . . 318
11.5 Elementarteiler von Matrizen . . . 324
11.6 Aufgaben . . . 344

12 Normalformen einer Matrix 346
12.1 Vektorräume als Moduln über einem Polynomring . . . 346
12.2 Rationale kanonische Form . . . 350
12.3 Berechnungsverfahren für die Normalformen . . . 353
12.4 Aufgaben . . . 365

A Hinweise zur Benutzung von Computeralgebrasystemen 367

B Lösungen der Aufgaben 372
B.1 Lösungen zu Kapitel 1 . . . 372
B.2 Lösungen zu Kapitel 2 . . . 373
B.3 Lösungen zu Kapitel 3 . . . 374
B.4 Lösungen zu Kapitel 4 . . . 378
B.5 Lösungen zu Kapitel 5 . . . 380
B.6 Lösungen zu Kapitel 6 . . . 382
B.7 Lösungen zu Kapitel 7 . . . 388
B.8 Lösungen zu Kapitel 8 . . . 391
B.9 Lösungen zu Kapitel 9 . . . 395

B.10 Lösungen zu Kapitel 10 397
B.11 Lösungen zu Kapitel 11 399
B.12 Lösungen zu Kapitel 12 402

Literatur 407

Index 409

1 Grundbegriffe

Die lineare Algebra beschreibt die algebraische Struktur der Vektorräume über Körpern. Darüber hinaus analysiert sie die strukturverträglichen Abbildungen zwischen diesen linearen Räumen. Hiermit liefert sie wesentliche Grundlagen für fast alle Arbeitsgebiete der modernen Mathematik. Insbesondere stellt sie Algorithmen und Methoden bereit zum Lösen von linearen Gleichungssystemen und zur Klassifikation geometrischer Strukturen, wie z. B. der Kurven und Flächen zweiter Ordnung. Der für das ganze Buch grundlegende Begriff *Vektorraum* wird einschließlich einiger einfacher Eigenschaften im vierten Abschnitt dieses Kapitels behandelt. Ihm liegt einerseits der Begriff einer Gruppe und andererseits eines Körpers zugrunde. Die mit diesen beiden Strukturbegriffen jeweils zusammengefaßten Rechengesetze werden in den beiden Abschnitten 3 und 4 dieses Kapitels beschrieben.

In den späteren Kapiteln des Buches wird die Bedeutung eines gewonnenen theoretischen Ergebnisses sehr oft anhand seiner Anwendung auf die Beschreibung und Berechnung der Lösungsgesamtheit eines linearen Gleichungssystems illustriert. Deshalb werden die grundlegenden Bezeichnungen und Aufgabenstellungen der Theorie der linearen Gleichungssysteme im letzten Abschnitt des Kapitels dargestellt.

Neben diese algebraischen Grundlagen treten als wesentliche Voraussetzung noch einige einfache Begriffe der Mengenlehre, die in den ersten beiden Paragraphen aus Gründen der Bezeichnungsnormierung zusammengestellt werden. Der Mengenbegriff wird dabei als intuitiv gegeben vorausgesetzt; auf die axiomatische Begründung wird nicht eingegangen.

1.1 Mengentheoretische Grundbegriffe

Die Objekte, aus denen eine *Menge* besteht, werden ihre *Elemente* genannt. Für „*x ist ein Element der Menge M*" schreibt man „$x \in M$". Die Negation dieser Aussage wird durch „$x \notin M$" wiedergegeben. Statt „$x_1 \in M$ *und* ... *und* $x_n \in M$" wird kürzer „$x_1, \ldots, x_n \in M$" geschrieben. Eine spezielle Menge ist die *leere Menge*, die dadurch charakterisiert ist, daß sie überhaupt keine Elemente besitzt. Sie wird mit dem Symbol $\emptyset$ bezeichnet. Weitere häufig auftretende Mengen sind:

$\mathbb{N}$ Menge aller *natürlichen Zahlen* einschließlich der Null.

$\mathbb{Z}$ Menge aller *ganzen Zahlen.*

$\mathbb{Q}$ Menge aller *rationalen Zahlen.*

$\mathbb{R}$ Menge aller *reellen Zahlen.*

$\mathbb{C}$ Menge aller *komplexen Zahlen.*

1.1.1 Definition. Eine Menge M heißt *Teilmenge* einer Menge N, wenn aus $x \in M$ stets $x \in N$ folgt.
Bezeichnung: $M \subseteq N$.

Die leere Menge $\emptyset$ ist Teilmenge jeder Menge; außerdem ist jede Menge Teilmenge von sich selbst.

1.1.2 Definition. Gilt $M \subseteq N$ und $M \neq N$, so heißt M eine *echte Teilmenge* von N.
Bezeichnung: $M \subset N$.

Die Elemente einer Menge S können selbst Mengen sein. Es wird dann S bisweilen auch als *Mengensystem* bezeichnet.

1.1.3 Definition. Der *Durchschnitt* D eines nicht-leeren Mengensystems S ist die Menge aller Elemente, die gleichzeitig Elemente aller Mengen M des Systems S sind. Es ist also $x \in D$ gleichwertig mit $x \in M$ für alle Mengen $M \in S$.
Bezeichnung: $D = \bigcap_{M \in S} M$ oder $D = \bigcap \{M \mid M \in S\}$.
$D = M_1 \cap M_2 \cap \cdots \cap M_n$, falls S nur aus den endlich vielen Mengen $M_1, \ldots, M_n$ besteht.

Die Gleichung $M \cap N = \emptyset$ besagt, daß die Mengen M und N kein gemeinsames Element besitzen.

1.1.4 Definition. Die *Vereinigung* V eines nicht-leeren Mengensystems S ist die Menge aller derjenigen Elemente, die zu mindestens einer Menge M aus S gehören.
Bezeichnung: $V = \bigcup_{M \in S} M$ oder $V = \bigcup \{M \mid M \in S\}$.
$V = M_1 \cup \cdots \cup M_n$, falls S aus endlich vielen Teilmengen $M_1, M_2, \ldots, M_n$ besteht.

Mit Hilfe der Definitionen von Durchschnitt und Vereinigung ergeben sich unmittelbar folgende Beziehungen, deren Beweis dem Leser überlassen bleiben möge.

1.1.5 Hilfssatz.

(a) $M \cap (N_1 \cup N_2) = (M \cap N_1) \cup (M \cap N_2)$,

(b) $M \cup (N_1 \cap N_2) = (M \cup N_1) \cap (M \cup N_2)$,

(c) *$M \cap N = M$ ist gleichbedeutend mit $M \subseteq N$,*

(d) *$M \cup N = M$ ist gleichbedeutend mit $N \subseteq M$.*

Endliche Mengen können durch Angabe ihrer Elemente gekennzeichnet werden. Man schreibt $\{x_1, \dots, x_n\}$ für diejenige Menge M, die genau aus den angegebenen n Elementen besteht. Die einelementige Menge $\{x\}$ ist von ihrem Element x zu unterscheiden: So ist z. B. $\{\emptyset\}$ diejenige Menge, deren einziges Element die leere Menge ist.

Die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge M wird mit $|M|$ bezeichnet. Diese Zahl $|M|$ heißt auch *Mächtigkeit* von M. So ist z. B. $|\{\emptyset\}| = 1$ und $|\emptyset| = 0$. Ein anderes Mittel zur Beschreibung von Mengen besteht darin, daß man alle Elemente einer gegebenen Menge X, die eine gemeinsame Eigenschaft $\boldsymbol{E}$ besitzen, zu einer neuen Menge zusammenfaßt. Bedeutet $\boldsymbol{E}(x)$, daß x die Eigenschaft $\boldsymbol{E}$ besitzt, so bezeichnet man diese Menge mit $\{x \in X \mid \boldsymbol{E}(x)\}$. So ist z. B. $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 1\}$ die aus den Zahlen $+1$ und -1 bestehende Teilmenge der Menge aller ganzen Zahlen. Bei dieser Art der Mengenbildung ist die Angabe der Bezugsmenge X wesentlich, aus der die Elemente entnommen werden, da sonst widerspruchsvolle Mengen entstehen können. Da die Bezugsmenge jedoch im allgemeinen durch den jeweiligen Zusammenhang eindeutig bestimmt ist, soll in diesen Fällen auf ihre explizite Angabe verzichtet werden.

1.1.6 Definition. Die *Differenzmenge* zweier Mengen M und N ist die Menge

$$M \setminus N = \{x \in M \mid x \notin N\}.$$

Viele mathematische Beweise beruhen auf dem Prinzip der vollständigen Induktion, das bei der axiomatischen Begründung des Aufbaus der natürlichen Zahlen eine wichtige Rolle spielt.

1.1.7 Prinzip der vollständigen Induktion. Es sei A eine Aussage über natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$. $A(n)$ bedeute, daß A auf n zutrifft. Von einem festen $n_0 \in \mathbb{N}$ an gelte:

(a) Induktionsanfang: $A(n_0)$,

(b) Induktionsschluß: Für alle $n > n_0$ folgt aus $A(n-1)$ auch $A(n)$.

Dann ist A für alle natürlichen Zahlen $n \geqq n_0$ richtig.

Es sei darauf hingewiesen, daß es oft bequemer ist, den Induktionsschluß in der folgenden Form durchzuführen:

(b′) Aus $A(i)$ für alle i mit $n_0 \leq i < n$ folgt auch $A(n)$.

Die Bedingungen (b) und (b′) sind gleichwertig, wie man unmittelbar einsieht.

Als Beispiel für einen Induktionsbeweis dient der Beweis des folgenden Satzes.

1.1.8 Satz. *Sei M eine n-elementige Menge. Sei $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}(M)$ die Menge aller Teilmengen von M. Dann besteht die* Potenzmenge *$\boldsymbol{P}$ von M aus 2^n Elementen.*

Beweis: Induktionsanfang: $n = 0$.

M hat kein Element. Deshalb ist M die leere Menge $\emptyset$. Wegen $\boldsymbol{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ gibt es $1 = 2^0$ Elemente in $\boldsymbol{P}$.

Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

Induktionsannahme: Jede $(n-1)$-elementige Menge habe genau 2^{n-1} verschiedene Teilmengen.

Induktionsbehauptung: Ist M eine Menge mit n Elementen, so besteht $\boldsymbol{P}(M)$ aus 2^n Elementen.

Dazu sei $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Dann hat $\boldsymbol{P}(M')$ für $M' = \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ nach Induktionsannahme genau 2^{n-1} Elemente. Ist $A \in \boldsymbol{P}(M)$, dann ist entweder $a_n \in A$ oder $a_n \notin A$. Im zweiten Fall gehört A zu $\boldsymbol{P}(M')$, und im ersten Fall ist $A' = A \setminus \{a_n\} \in \boldsymbol{P}(M')$. Also besitzt $\boldsymbol{P}(M)$ genau $2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^{n-1}(1+1) = 2^n$ Elemente. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist hiermit bewiesen, daß für jede n-elementige Menge M die Potenzmenge $\boldsymbol{P}(M)$ genau 2^n Elemente besitzt. ♦

Ein wichtiges Beweishilfsmittel beim Studium unendlicher Mengen ist das *Zornsche Lemma*. Es sei $\boldsymbol{S}$ ein nicht-leeres Mengensystem. Eine nicht-leere Teilmenge $\boldsymbol{K}$ von $\boldsymbol{S}$ heißt eine *Kette*, wenn aus $M_1, M_2 \in \boldsymbol{K}$ stets $M_1 \subseteq M_2$ oder $M_2 \subseteq M_1$ folgt. Eine Menge $M \in \boldsymbol{S}$ heißt ein maximales Element von $\boldsymbol{S}$, wenn aus $N \in \boldsymbol{S}$ und $M \subseteq N$ stets $M = N$ folgt. Das Zornsche Lemma lautet nun:

1.1.9 Lemma von Zorn. *Wenn für jede Kette $\boldsymbol{K}$ des nicht-leeren Mengensystems $\boldsymbol{S}$ auch die Vereinigungsmenge $\bigcup\{K \mid K \in \boldsymbol{K}\}$ ein Element von $\boldsymbol{S}$ ist, dann gibt es in $\boldsymbol{S}$ ein maximales Element.*

Auf den Beweis dieses Satzes kann hier nicht eingegangen werden.

Es seien jetzt X und Y zwei nicht-leere Mengen. Unter einer *Abbildung* φ von X in Y (in Zeichen: $\varphi : X \to Y$) versteht man dann eine Zuordnung, die jedem Element $x \in X$ eindeutig ein Element $y \in Y$ als *Bild* zuordnet. Das Bild y von x bei der Abbildung φ wird mit $\varphi(x)$ oder auch einfach mit φx bezeichnet. Die Menge X heißt der *Definitionsbereich* der Abbildung φ, die Menge Y ihr *Zielbereich*.

Ist φ eine Abbildung von X in Y und M eine Teilmenge von X, so nennt man die Menge aller Bilder von Elementen $x \in M$ entsprechend das Bild der Menge M und bezeichnet es mit $\varphi(M)$ oder einfach mit φM. Es gilt also

$$\varphi M = \{\varphi x \mid x \in M\},$$

und φM ist eine Teilmenge von Y. Das Bild der leeren Menge ist wieder die leere Menge. Das Bild φX des Definitionsbereichs wird auch *Bild* von φ genannt und mit $\operatorname{Im}\varphi$ bezeichnet.