

---

collection mécanique des fluides

---



# Modélisation des écoulements multiphasiques turbulents hors d'équilibre

Roland Borghi  
Fabien Anselmet

 hermes

*Lavoisier*

---

---

Modélisation des écoulements multiphasiques turbulents  
hors d'équilibre

© 2014, Lavoisier, Paris

[www.editions.lavoisier.fr](http://www.editions.lavoisier.fr)

ISBN 978-2-7462-4537-2

ISSN 1952-286X

---

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, d'une part, que les "copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective" et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, "toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite" (article L. 122-4). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Tous les noms de sociétés ou de produits cités dans cet ouvrage sont utilisés à des fins d'identification et sont des marques de leurs détenteurs respectifs.

**Modélisation  
des écoulements multiphasiques  
turbulents hors d'équilibre**

Roland Borghi  
Fabien Anselmet

**Hermès**  
**Science**  
— publications —

*Lavoisier*

COLLECTION MÉCANIQUE DES FLUIDES

Roger PRUD'HOMME, *Écoulements et réactions chimiques II*, 2013.

Roger PRUD'HOMME, *Écoulements et réactions chimiques I*, 2012.

Sedat TARDU, *Approche statistique pour les écoulements turbulents pariétaux*, 2010.

Jean DÉLERY, *Traité d'aérodynamique compressible 4*, 2010.

Mathieu MORY, *Écoulements pour les procédés*, 2010.

Jean DÉLERY et Reynald BUR, *Topologie des écoulements tridimensionnels décollés*, 2010.

Jean-Paul FOHR, *Thermodynamique des systèmes fluides et des machines thermiques*, 2010.

Michel FAVRE-MARINET et Sedat TARDU, *Écoulements avec échanges de chaleur 1 : convection laminaire. Exercices résolus*, 2008.

Michel FAVRE-MARINET et Sedat TARDU, *Écoulements avec échanges de chaleur 2 : convection turbulente. Exercices résolus*, 2008.

Jean DÉLERY, *Traité d'aérodynamique compressible 1 : notions fondamentales d'aérodynamique*, 2008.

Jean DÉLERY, *Traité d'aérodynamique compressible 2 : écoulements monodimensionnels stationnaires et surfaces de discontinuité*, 2008.

Jean DÉLERY, *Traité d'aérodynamique compressible 3 : applications de la théorie des caractéristiques. Écoulements transsoniques*, 2008.

## Table des matières

<b>Remerciements</b> . . . . .	13
<b>Introduction</b> . . . . .	15
I.1. L'intérêt des milieux multiphasiques et de leur modélisation. . . . .	15
I.2. La modélisation et sa problématique . . . . .	19
I.3. Eléments de bibliographie . . . . .	25
<b>PREMIÈRE PARTIE. APPROCHE ET ÉQUATIONS GÉNÉRALES</b> . . . . .	27
<b>Chapitre 1. Pour une description unifiée des divers milieux multiphasiques</b> . . . . .	31
1.1. Approche continue et approche cinétique . . . . .	31
1.2. Formulations eulérienne-lagrangienne et eulérienne. . . . .	35
<b>Chapitre 2. Les équations d'un milieu instantané « continu par morceaux »</b> . . . . .	39
2.1. Equations de bilan, formes intégrales et différentielles . . . . .	40
2.2. Bilans des masses des phases dans un milieu continu par morceaux . . . . .	44
2.3. Bilans des quantités de mouvement . . . . .	48
2.4. Bilans d'énergie des phases . . . . .	52
2.5. Bilans des positions et des aires d'interface. . . . .	55
2.6. Extension lorsqu'une phase fluide est un mélange. . . . .	57
2.7. La description du milieu est complète . . . . .	59

<b>Chapitre 3. La description du « milieu moyen »</b> . . . . .	61
3.1. Le besoin d'une description moyenne . . . . .	61
3.2. Comment définir les « grandeurs moyennes » ? . . . . .	63
3.2.1. Moyenne temporelle . . . . .	63
3.2.2. Moyenne volumique . . . . .	65
3.2.3. Moyenne statistique . . . . .	66
3.2.4. Moyenne « filtrée ». . . . .	68
3.3. Quelle moyenne choisir, suivant les avantages et inconvénients ? . . . . .	70
<b>Chapitre 4. Les équations pour le milieu moyen continu</b> . . . . .	73
4.1. Les équations de bilan global du milieu moyen . . . . .	73
4.1.1. Masse totale . . . . .	73
4.1.2. Quantité de mouvement totale . . . . .	74
4.1.3. Energie totale . . . . .	75
4.2. Les équations de bilan pour les phases du milieu moyen . . . . .	77
4.2.1. Masse de phase . . . . .	77
4.2.2. Quantité de mouvement de phase . . . . .	79
4.2.3. Energie de chaque phase. . . . .	83
4.2.4. Volume de phase . . . . .	85
4.3. La représentation complète du milieu moyen . . . . .	86
4.3.1. Représentation globale . . . . .	86
4.3.2. Représentation « multifluide » . . . . .	88
4.4. Les équations d'état moyennes . . . . .	92
4.5. Extensions . . . . .	97
4.5.1. Extension lorsqu'une phase fluide est un mélange . . . . .	97
4.5.2. Extension pour les milieux dispersés . . . . .	98
4.6. Les conditions aux limites . . . . .	101
<b>DEUXIÈME PARTIE. LA MODÉLISATION, UNE MÊME DÉMARCHE ADAPTABLE À PLUSIEURS APPLICATIONS.</b> . . . . .	107
<b>Chapitre 5. La modélisation des échanges entre phases</b> . . . . .	111
5.1. Méthodologie générale . . . . .	111
5.2. L'interface entre phases et son aire moyenne par unité de volume . . . . .	114
5.2.1. Cas d'un milieu multiphasique composé d'une suspension de particules . . . . .	114
5.2.2. Cas d'un milieu multiphasique comportant des parcelles de formes et de tailles variables . . . . .	115

5.2.3. Cas d'une suspension de particules dispersées de tailles fixées . . . . .	117
5.3. Forces de contact et frottement entre phases . . . . .	118
5.3.1. Forces de pression sur des particules sphériques dans un écoulement non visqueux . . . . .	119
5.3.1.1. Une seule particule sphérique dans un écoulement non visqueux donné . . . . .	119
5.3.1.2. Force moyenne sur la phase des particules . . . . .	121
5.3.2. Frottement sur des particules solides en écoulement permanent . . . . .	124
5.3.2.1. La théorie de Stokes . . . . .	124
5.3.2.2. Force moyenne sur la phase particulaire en milieu homogène . . . . .	125
5.3.2.3. Force moyenne sur la phase particulaire en milieu non homogène . . . . .	126
5.3.2.4. Une loi du type Stokes pour un écoulement turbulent ? . . .	127
5.3.2.5. Effets particuliers dus à la proximité de parois . . . . .	129
5.3.2.6. Effets dus à la densité numérique de particules . . . . .	130
5.3.3. Interfaces liquide-gaz peu courbées . . . . .	132
5.3.3.1. Effet de la pression moyenne . . . . .	133
5.3.3.2. Frottement entre deux fluides par l'intermédiaire d'une interface plane . . . . .	134
5.3.3.3. Effet d'une turbulence à petite échelle . . . . .	137
5.3.3.4. La contribution des fluctuations de pression . . . . .	138
5.3.4. Gouttes ou bulles . . . . .	139
5.4. Transferts de chaleur à la surface d'une particule, sans échange de masse . . . . .	143
5.5. Transferts de chaleur et de masse par ébullition . . . . .	145
5.5.1. Interfaces liquide-gaz peu courbées . . . . .	146
5.5.2. Bulles . . . . .	152
5.6. Echanges de masse et chaleur par évaporation . . . . .	155
5.6.1. Transfert de masse par évaporation sur une interface plane . . . .	156
5.6.1.1. Évaporation de liquide à une température connue $T_L$ . . . .	156
5.6.1.2. Évaporation d'une couche de liquide dans une couche de gaz . . . . .	159
5.6.2. Évaporation d'une goutte . . . . .	162
5.6.3. Combustion d'une goutte . . . . .	166
<b>Chapitre 6. La modélisation des flux de dispersion turbulente . . . . .</b>	<b>169</b>
6.1. Modélisation globale . . . . .	169
6.1.1. Généralités . . . . .	169

6.1.2. Energie cinétique des « fluctuations globales » . . . . .	174
6.1.3. La modélisation du bilan d'énergie cinétique des fluctuations . . .	180
6.1.4. Echelles de longueur des fluctuations, temps de dissipation d'énergie cinétique des fluctuations . . . . .	184
6.1.4.1. Le problème . . . . .	184
6.1.4.2. Réflexions sur les phénomènes. . . . .	186
6.1.4.3. Propositions . . . . .	188
6.1.5. Retour sur le flux de dispersion d'une phase . . . . .	190
6.1.5.1. A partir du bilan de quantité de mouvement moyen de la phase. . . . .	191
6.1.5.2. A partir d'une équation de bilan pour le flux dispersif lui-même. . . . .	194
6.1.5.3. En conclusion. . . . .	201
6.2. Modélisation de type « multifluide » . . . . .	203
6.2.1. L'énergie cinétique des fluctuations dans chaque phase . . . . .	205
6.2.2. Modélisation des bilans des énergies cinétiques de turbulence . . .	209
6.2.2.1. Les termes habituels . . . . .	209
6.2.2.2. Les termes dus aux échanges entre phases . . . . .	210
6.2.2.3. La corrélation des fluctuations des vitesses des phases . . .	213
6.2.3. La modélisation des échelles de temps ou d'espace. . . . .	216
6.2.3.1. Toutes les phases sont fluides . . . . .	216
6.2.3.2. Pour les phases de particules solides . . . . .	217
6.2.4. Modélisation du tenseur de Reynolds pour chaque phase . . . . .	221

**Chapitre 7. Modélisation de l'aire moyenne d'interface gaz-liquide  
par unité de volume . . . . .** 225

7.1. Introduction. . . . .	225
7.2. L'équation de départ de l'aire moyenne d'interface par unité de volume . . . . .	226
7.3. Modèle d'aire moyenne d'interface pour « l'atomisation » d'un jet liquide . . . . .	229
7.4. Effet de la vaporisation sur l'aire d'interface . . . . .	233

**Chapitre 8. Modélisation du style *Large Eddy Simulation* . . . . .** 235

8.1. Introduction. . . . .	235
8.2. Les équations filtrées et la nature des modèles à fournir . . . . .	237
8.3. Modélisation LES classique pour les flux additionnels SGS . . . . .	242
8.3.1. Rappel synthétique pour un écoulement turbulent à une seule phase . . . . .	242

8.3.2. Vers une généralisation pour les écoulements multiphasiques . . .	245
8.4. Modélisation de l'aire d'interface par unité de volume de sous maille . . . . .	246
8.5. Modélisation LES près des parois . . . . .	250
<b>Chapitre 9. Apport de la thermodynamique des processus irréversibles.</b> . . . . .	<b>255</b>
9.1. Pour la modélisation globale d'un milieu à deux phases . . . . .	256
9.1.1. Entropie d'un milieu diphasique moyen utilisant le modèle de Prandtl . . . . .	258
9.1.2. Entropie pour le modèle $k-\varepsilon$ , dans un milieu à masse volumique variable. . . . .	266
9.2. Apport de la thermodynamique irréversible pour la modélisation multifluide. . . . .	273
<b>Chapitre 10. Méthodes expérimentales</b> . . . . .	<b>283</b>
10.1. Introduction . . . . .	283
10.2. Méthodes intrusives . . . . .	285
10.2.1. Tubes de Pitot . . . . .	285
10.2.2. Films chauds . . . . .	286
10.2.3. Sondes aiguilles optiques (sondes simples, bisonde et quadrisondes). . . . .	289
10.2.4. Réseaux de fils. . . . .	295
10.3. Méthodes non intrusives . . . . .	296
10.3.1. Vélocimétrie par images de particules (PIV) . . . . .	296
10.3.2. Vélocimétrie par suivi de gouttelettes (DTV). . . . .	302
10.3.3. Anémométrie laser Doppler (LDA) . . . . .	306
10.3.4. Anémométrie par phase Doppler (PDA). . . . .	310
10.3.5. Anémométrie Doppler ultrasonore . . . . .	314
10.3.6. Densimétrie par atténuation de rayonnements Gamma, de rayons X ou de neutrons . . . . .	316
10.4. Méthodes optiques avancées . . . . .	318
10.4.1. Fluorescence induite par laser (LIF) . . . . .	319
10.4.1.1. La méthode LIF à une couleur . . . . .	319
10.4.1.2. Les méthodes LIF à deux ou trois couleurs. . . . .	323
10.4.2. Les méthodes d'interférométrie (holographie en ligne, FII, ILIDS/IPI, arc-en-ciel) . . . . .	327
10.4.2.1. L'holographie en ligne. . . . .	327
10.4.2.2. L'imagerie interférométrique de Fourier (FII) . . . . .	329

10.4.2.3. L'imagerie interférométrique en défaut de mise au point (ILIDS ou IPI) . . . . .	332
10.4.2.4. Les méthodes basées sur l'arc-en-ciel . . . . .	334
10.4.2.5. La méthode de <i>Critical Angle Refractometry and Sizing</i> (CARS). . . . .	337
<b>Chapitre 11. Quelques résultats expérimentaux sur des aspects encore mal connus des écoulements multiphasiques.</b> . . . . .	339
11.1. Atomisation/fragmentation de jets liquides . . . . .	339
11.2. Particules isolées ou groupées en essaims, couplage avec le fluide porteur . . . . .	348
11.3. Crise d'ébullition. . . . .	361
<b>TROISIÈME PARTIE. DES LITS FLUIDISÉS AUX MILIEUX GRANULAIRES.</b> . . . .	375
<b>Chapitre 12. Les lits fluidisés</b> . . . . .	379
12.1. Introduction . . . . .	379
12.1.1. Classification des différents régimes de fluidisation. . . . .	379
12.1.2. Vitesses minimales de fluidisation et de bullage . . . . .	385
12.1.2.1. Rappels sur les pertes de charge en milieu poreux . . . . .	385
12.1.2.2. Vitesse minimale de fluidisation . . . . .	385
12.1.2.3. Vitesse minimale de bullage (ou de fluidisation bouillonnante) . . . . .	386
12.2. Modèles complets de la dynamique des lits fluidisés . . . . .	387
12.2.1. Régime de fluidisation bouillonnante . . . . .	387
12.2.2. Régime de fluidisation turbulente. . . . .	396
12.3. Modèles globaux de conversion chimique en lits fluidisés . . . . .	404
12.3.1. Régime de fluidisation bouillonnante . . . . .	404
12.3.2. Régime de fluidisation rapide . . . . .	408
12.3.3. Régime de fluidisation turbulente. . . . .	409
12.4. Modèles globaux pour les transferts thermiques dans les lits fluidisés . . . . .	412
12.4.1. Régime de fluidisation bouillonnante . . . . .	413
12.4.2. Régime de fluidisation rapide-lits circulants . . . . .	416
12.5. Conclusion . . . . .	419
<b>Chapitre 13. Quelle généralisation pour les milieux granulaires ?</b> . . . . .	421
13.1. Introduction . . . . .	421
13.2. Les équations de bilan du milieu granulaire moyen . . . . .	422

13.3. Les approximations de fermeture nécessaires . . . . .	429
13.4. Quelques modèles proposés . . . . .	432
<b>Chapitre 14. Modélisation du tenseur de Cauchy des contacts glissants . . .</b>	<b>437</b>
14.1. Hypothèses et équations de base. . . . .	437
14.2. Equation de bilan non fermée du tenseur de Cauchy des contacts glissants. . . . .	439
14.3. Approximations de fermeture pour les termes irréversibles. . . . .	448
<b>Chapitre 15. Modélisation du tenseur de Cauchy cinétique . . . . .</b>	<b>455</b>
15.1. Modélisation à la mode de Prandtl-Bagnold. . . . .	456
15.2. Modélisation du type $k-l_t$ ou « gaz granulaire turbulent ». . . . .	458
15.3. Vers une modélisation générale pour tous les régimes. . . . .	465
15.4. Les conditions aux limites de parois . . . . .	468
<b>QUATRIEME PARTIE. ETUDE DES FLUCTUATIONS ET DES DENSITES DE PROBABILITE. . . . .</b>	<b>471</b>
<b>Chapitre 16. Les fluctuations de la phase gazeuse dans les milieux diphasiques réactifs . . . . .</b>	<b>475</b>
16.1. Les spécificités des milieux diphasiques réactifs . . . . .	475
16.2. La densité de probabilité des fluctuations de composition de la phase gazeuse . . . . .	476
16.2.1. Equations de base du milieu gazeux instantané. . . . .	478
16.2.2. Equation de la PDF . . . . .	482
16.3. Modélisation des termes dus aux échanges entre phases . . . . .	488
16.3.1. Echange de masse totale . . . . .	489
16.3.2. Echange de masses d'espèces . . . . .	491
16.3.3. Echange de chaleur . . . . .	492
16.4. Modélisations du micromélange et de la dispersion turbulente. . . . .	494
16.4.1. Le « micromélange » . . . . .	494
16.4.2. Le terme de diffusion turbulente de la PDF . . . . .	495
16.5. Utilisation pratique de l'équation de PDF . . . . .	496
<b>Chapitre 17. Fluctuations de température dans les phases condensées . . .</b>	<b>499</b>
17.1. Problèmes . . . . .	499
17.2. Equation instantanée pour la température de la phase liquide . . . . .	501

17.3. Equation pour la PDF de température du liquide . . . . .	504
17.4. Fermeture de l'équation de PDF de température . . . . .	506
<b>Chapitre 18. Vers l'obtention de la PDF des fluctuations des vitesses et des tailles . . . . .</b>	<b>509</b>
18.1. Equation de PDF des vitesses d'une phase. . . . .	510
18.2. Modélisations des échanges entre phases et des interactions internes. . . . .	516
18.2.1. Termes d'échanges entre phases . . . . .	516
18.2.2. La dissipation et la production, internes à la phase, de fluctuations. . . . .	520
18.3. Sur le calcul pratique de la PDF . . . . .	522
18.4. Pour l'étude des tailles des parcelles d'une phase dispersée . . . . .	523
18.5. Sur les simulations lagrangiennes-eulériennes de milieux dispersés . . . . .	525
18.5.1. Equations lagrangiennes des parcelles . . . . .	526
18.5.2. Simulations stochastiques . . . . .	530
<b>Bibliographie . . . . .</b>	<b>535</b>
<b>Index . . . . .</b>	<b>547</b>

## Remerciements

L'idée de ce livre est née de plusieurs travaux de thèses à l'université de Rouen. Sa rédaction a nécessairement profité de toutes les interactions et discussions avec les collègues du laboratoire CORIA, et aussi les doctorants. Il faut mentionner aussi spécialement les discussions toujours ouvertes et stimulantes avec Olivier Simonin, depuis plus de trente ans et encore à cause de cet ouvrage. De même, l'approche ardue des densités de probabilité a été favorisée par des échanges de long terme avec Vladimir Sabelnikov, qui a bien voulu même relire et critiquer la partie correspondante de ce livre. Néanmoins, comme il se doit, toute erreur dans l'ouvrage ne pourra être imputée qu'à nous mêmes. Qu'ils en soient tous remerciés, et tout spécialement Olivier et Vladimir.

Le second auteur remercie chaleureusement à titre personnel quelques collègues qui sont ses aînés, dont le premier auteur de cet ouvrage, pour l'avoir initié au monde fascinant de la turbulence, des écoulements multiphasiques, des gouttes et des gouttelettes. Le présent ouvrage peut donc être considéré comme la matérialisation concrète de nos trente années de collaboration et de discussions.



# Introduction

## **I.1. L'intérêt des milieux multiphasiques et de leur modélisation**

De nombreux systèmes industriels mettent en jeu, d'une manière ou d'une autre, des « milieux multiphasiques » où sont mêlés des liquides et un gaz, des liquides non miscibles, des fluides et des solides.

Les réacteurs nucléaires (qu'ils soient à eau bouillante ou à eau pressurisée) possèdent un circuit de refroidissement où circule dans certaines parties un mélange eau-vapeur, la vapeur d'eau se formant au contact des parois chaudes à refroidir, et des gouttes d'eau liquide se formant au contact des parois froides à chauffer. De nombreuses autres installations de génie thermique possèdent de tels circuits pour « transférer de la chaleur », soit pour utiliser cette énergie ailleurs, soit simplement pour empêcher qu'elle ne détruise le dispositif.

L'extraction et le transport des produits pétroliers se font par l'utilisation de conduites où s'écoulent des milieux à deux ou plusieurs phases, liquides de densité et viscosité différentes, gazeuses et même solides. Les problèmes de givrage dans l'aéronautique (sur les bords d'attaque des ailes ou ailerons ou dans les tubes de Pitot...) nécessitent aussi de s'intéresser à un milieu d'air humide et de gouttes d'eau s'écoulant au voisinage immédiat de parois. Le transport à courte distance de matériaux pulvérulents, la farine par exemple, la sciure, ou de grains, se fait en soufflant de l'air chargé de ces particules solides dans des canalisations.

Dans les moteurs-fusées à liquides des lanceurs spatiaux, ou bien dans les moteurs Diesel, la chambre de combustion contient un mélange de gouttelettes se vaporisant et de gaz en combustion, dégageant un débit de chaleur considérable dans un volume étonnamment petit. Un liquide combustible ou comburant, ou les deux, sont injectés en fines gouttelettes dans la chambre de combustion, où ces gouttes se

vaporisent et les vapeurs peuvent brûler ensemble, le tout en régime permanent dans un moteur fusée ou de façon périodique à chaque cycle dans un moteur Diesel.

Les brûleurs à fuel des fours de verreries, ou les générateurs de vapeur des centrales thermiques injectent de même des jets de gouttelettes de fuel dans la zone de gaz en réaction. Ils produisent non seulement de la chaleur et des gaz brûlés mais aussi des fumées où se dispersent dans ces gaz de très petites particules de carbone, et le contrôle de ces fumées est crucial : elles permettent dans les fours de forts transferts de chaleur par rayonnement, mais peuvent conduire une forte pollution de l'air à la sortie des cheminées.

Le génie chimique utilise plusieurs types de réacteurs gaz-liquide à température contrôlée, dont le but n'est pas de délivrer de la chaleur mais certains produits chimiques particuliers. Les réactifs liquides et gazeux sont brassés le plus efficacement possible pour pouvoir ménager des réactions chimiques diverses à l'interface entre les phases. De très nombreux réacteurs chimiques utilisent aussi un catalyseur, qui est le plus souvent sous forme d'une phase dispersée solide, et ces réacteurs mettent donc en jeu aussi des fluides multiphasiques.

Les « lits fluidisés » sont à l'heure actuelle les dispositifs les plus efficaces pour brûler le charbon : de l'air traverse à fort débit une phase solide dispersée très dense, composée de particules de dolomie et de charbon, permettant des échanges d'énergie entre ces trois phases, qui peuvent entraîner et maintenir des réactions chimiques. L'énergie dégagée par la combustion sert à produire de la vapeur d'eau, par l'intermédiaire d'un échangeur de chaleur dont les tubes peuvent être plus proches de la zone de combustion. Le système permet non seulement une bonne homogénéité du champ de température, mais maintient cette température vers 1 300 K environ en évitant de produire trop de NO, tout en permettant cependant une bonne stabilisation de la combustion. De plus, la dolomie absorbe le soufre et réduit les émissions de SO<sub>2</sub>. Il existe aussi des « lits fluidisés recirculants », où les phases solides sont entraînées par la phase gazeuse, récupérées à la sortie et réinjectées à l'entrée pour parfaire la combustion, même dans les conditions à plus fort débit. Ils sont aussi très facilement transposables pour la combustion de différents types de combustibles, allant de mélanges de gaz à des déchets de divers types. Les lits fluidisés sont utilisés aussi en génie chimique, ou simplement pour sécher des particules solides, ou pour fabriquer divers types de poudres.

Dans l'environnement naturel aussi, on rencontre souvent des milieux multiphasiques. Les nuages contiennent de fines gouttelettes d'eau (non pure), des particules de glace ou de flocons de neige, l'agriculture utilise les jets de gouttes ou gouttelettes pour l'arrosage ou le traitement des végétaux. La dispersion de fumées