岩波講座 現代物理学の基礎〔第2版〕2

古典物理学

II

目　次

岩波講座 現代物理学の基礎〔第2版〕2

古典物理学

II

本巻編集

湯川秀樹
豊田利幸

本巻執筆

第 III 部　豊田利幸
第 IV 部　碓井恒丸
第 V 部　豊田利幸
第 VI 部　湯川秀樹

第Ⅲ部 相対性理論

第6章 Galilei 変換と力学法則

物理学の構成において，自然現象とそれを観測する手段あるいは操作が深くかかわりあっていることはいうまでもないが，これが法則の形で明確に把握されたのはそれほど古い時代のことではない．われわれが法則を媒介にして自然を認識するという場合，その法則は個々の観測者に共通の表現形式をもたなくてはならない．現象の記述そのものは，観測者が異なれば，一般には異なるのが当然であるし，また多くの現象が共通の本質をもつにかかわらず，記述としては著しい個別性をもつのがふつうである．それらが法則を通じ，相互に明確な形で関連づけられたときはじめて，われわれはその現象をその法則の適用限界内で物理的に理解したということができる．

§6.1 相対性原理の発見とその発展

近代物理学が生まれるにあたっての直接的な強いインパクトは，N. Copernicus (1473-1543) による地動説，より正確には太陽中心説 (heliocentricism) の提唱であったが (*De revolutionibus orbium coelestium*, 1543)，これが惑星運動の簡明な記述以上の深い洞察を含んでいることを看破したのは Galileo Galilei (1564-1642) であった．Platon の“自然の単純性”という哲学的観点から Copernicus の地動説を支持した人々の数は，Galileo 以前にも必ずしも少なくはなかったし，中には Giordano Bruno (1548-1600) のように文字通り生命を賭けて地動説を擁護した人もあった．にもかかわらず，それらの人々は当時の“無学な”一般庶民の地動説に対する素朴な疑問に答えることができなかった．というより，そうすることの重要性に気付かなかった．われわれが静止していると考えて，その上でうまく処理してきたもろもろの自然現象の記述形式は，大地が運動しているとしたら，がらがらと音を立てて崩壊してしまう恐れはないか？ われわれは多くの

経験によって学びとった知識をもとに，物体を動かしたり建物や橋を作ってきたが，いつも大地を不動のものと考えて一向差支えがなかったではないか．

この問題に正面からとりくんだのは Galileo であった．彼の主著の1つである『天文対話』(*Dialogo dei due massimi sistemi del mondo Tolemico e Copernico*, 1632) の核心をなす“第2日目の対話”(giornata seconda) は専らこの問題の解明にあてられているといってよい．その中で彼があげている有名な実験の1つは次のようなものである．静かな海を一様な速度で航行している船の上と岸辺にそれぞれ A, B の観測者がいる．今その船の帆柱の上から小石を落下させ，その運動を観測したとしよう．全く同一の現象である小石の落下運動を，A は垂直な直線運動として，一方 B は放物線運動として観測するであろう．つぎに船が止まっているときに，帆柱の上から小石を落下させてみよう．この場合，A も B も垂直な落下運動を観測することはいうまでもない．こうして A にとっては，帆柱からの小石の落下運動はその船が岸辺に対し運動していようと，止まっていようと変わりがないことが実験的に確かめられる．

Galileo は後に落下運動の定量的研究を完成するのであるが，すでにこの段階において，力学現象の法則が，相互に一定速度で運動する異なる観測者の間で共通な形をとってあらわれることに気づいていた．そしてこれこそが地動説に対する庶民の素朴な疑問を解く鍵であると考え，『天文対話』の中でこれについて懇切を極めた説明を展開した．当時，自然現象は狭い意味での力学現象が主であったから，これは“自然現象を支配する法則は相互に一定速度で運動する異なる観測者にとって共通な形に記述される”という科学における1つの原理としての重みをもっていたと考えられる．地球が回転していても，それほど大きくない空間的時間的拡がりのなかで物体の運動を考えるときは，大地が一定速度の運動をしているとして差支えないから，この原理の発見は地動説に対する庶民の不安を一掃するうえで極めて有効であったに違いない．

この原理を記号的に表わせば次のようになる．図6.1のように，観測者 A, B にそれぞれ座標系 $Oxyz$, $O'x'y'z'$ を固定して考える．これらを簡単に Σ 系，Σ' 系と呼ぶことにする．そして O' は Ox 軸上を v という一定の速さで進み，座標軸 $O'x'$ は時刻 $t=0$ で Ox に重なっているとする．空間の任意の点の位置を時刻 t において A が観測した値を (x, y, z)，同時刻に B がそれを観測した値を

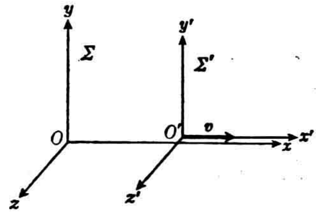

図6.1 座標系の平行移動

(x', y', z') とすると,

$$x' = x - vt, \qquad y' = y, \qquad z' = z$$

なる関係がある. なおわれわれの日常経験では, Σ と Σ' で時計の進み方に違いは認められないから, A が観測する時刻 t と B が観測する時刻 t' はつねに一致していると考えてよいだろう. そこでとりあえず形式ではあるけれども

$$t' = t$$

を加えて, 行列の記法を用い (x, y, z, t) と (x', y', z', t') の関係を

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \tag{6.1.1}$$

と書くことにしよう. 同一の力学現象を座標系 Σ で記述した場合と, 座標系 Σ' で記述した場合とでその表現形式は一般に異なるが, それらの現象を支配する力学法則は共通な形であらわされると期待してよいだろう. というより, これが物理法則の定義であると考えるべきである.

(6.1.1) を狭義の Galilei 変換という. 広義の Galilei 変換については本講座第3巻『量子力学 I』(§8.7) を参照されたい. 本巻では狭義の Galilei 変換を単に Galilei 変換と呼ぶことにする. さて (6.1.1) の変換の特徴は, 同時刻という概念が2つの座標系で保存されるだけでなく, 空間的なベクトル量も不変であるという点である. すなわち

$$t_2 = t_1 \quad \text{ならば} \quad t_2' = t_1'$$

したがって

$$x_2' - x_1' = x_2 - x_1, \qquad y_2' - y_1' = y_2 - y_1, \qquad z_2' - z_1' = z_2 - z_1 \tag{6.1.2}$$

先にあげた小石の落下運動についていえば, 一方は鉛直軌道, 他方は放物線軌

道を描き，一見異なった形に見えるが，運動法則は共に

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0,\qquad \frac{d^2y}{dt^2}=0,\qquad \frac{d^2z}{dt^2}=-g \tag{6.1.3}$$

$$\frac{d^2x'}{dt^2}=0,\qquad \frac{d^2y'}{dt^2}=0,\qquad \frac{d^2z'}{dt^2}=-g \tag{6.1.4}$$

という同じ形であらわされる．自由落下の場合の (6.1.3) の解は

$$z=-\frac{1}{2}gt^2,\qquad x=y=0$$

でこれは明らかに直線である．一方，(6.1.1) により座標系 Σ' では

$$z'=z=-\frac{1}{2}gt^2,\qquad x'=x-vt=-vt,\qquad y'=y=0$$

これから座標系 Σ' でのこの軌道の形は $z'=-\dfrac{1}{2}\dfrac{g}{v^2}x'^2$ なる放物線であることがわかる．

質量 m の質点が $\boldsymbol{F}$ なる力をうけて運動している場合の Newton の運動方程式

$$m\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2}=\boldsymbol{F} \tag{6.1.5}$$

が Galilei 変換によってその形をかえないことは，$\boldsymbol{F}$ の変換が (6.1.2) と同様であるとすれば明らかである．

そこで問題は力 $\boldsymbol{F}$ の変換の性質が Galilei 変換に対してつねに (6.1.2) のようになるかどうかという点に移る．力にはバネの伸び縮みによる力，あるいは重力などの他に，電気的なもの，磁気的なもの等がある．後の2つももともと場の強さ，すなわち単位電荷や単位磁荷をもった試験体に働く力をあらわすベクトル $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ として導入されたことからわかるように，機械的な力の変換と同様であると思われていた．しかし，$\boldsymbol{E}$ や $\boldsymbol{H}$ の変換の性質は，当然のことながら，それらの間に存在する物理法則に基づいて吟味されなくてはならない．

簡単のため，電荷や電流が存在しない真空の場所における $\boldsymbol{E}$ や $\boldsymbol{H}$ の性質を考えてみよう．それは Maxwell の方程式と呼ばれる次の4個の連立偏微分方程式

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}=0,\qquad \mathrm{div}\,\boldsymbol{H}=0\\&\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{H}=0,\qquad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}=0\end{aligned}\right\} \tag{6.1.6}$$

で与えられる．ここで c は物理量 $\boldsymbol{E}$ および $\boldsymbol{H}$ の単位系のとり方できまる定数で，速度の次元をもち，実測された光速度の大きさに一致する．

(6.1.6) の変換の性質を調べるため，ベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{A}$ とスカラー・ポテンシャル ϕ を用いて (6.1.6) を書き直してみる．すなわち (6.1.6) の2式から $\boldsymbol{H}$ や $\boldsymbol{E}$ を

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{H} &= \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{E} &= -\mathrm{grad}\,\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\end{aligned}\right\}\qquad(6.1.7)$$

とあらわすことができる $\boldsymbol{A}$ と ϕ の存在が保証され，これによって (6.1.6) の残りの2式は

$$\left.\begin{aligned}\left(\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A} &= 0\\ \left(\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi &= 0\end{aligned}\right\}\qquad(6.1.8)$$

という d'Alembert の方程式の形になる．

さて (6.1.8) は Galilei 変換 (6.1.1) に対して，その形を同じに保つことができるか？　すなわち一定速度で相対運動をしている2人の観測者に共通な表式となっているか？　B の座標系 Σ' でのすべての量には ′ をつけて表わすことにした場合，

$$\left.\begin{aligned}\left(\Delta'-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\right)\boldsymbol{A}' &= 0\\ \left(\Delta'-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\right)\phi' &= 0\end{aligned}\right\}\qquad(6.1.9)$$

が (6.1.8) から Galilei 変換から導かれるかどうかを調べるため，まず関係のある微分演算子の (6.1.1) による変換を書いておこう．x, t は独立変数であるから

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\frac{\partial^2}{\partial x'^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}=-v\frac{\partial}{\partial x'}+\frac{\partial}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}=v^2\frac{\partial^2}{\partial x'^2}-2v\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'}+\frac{\partial^2}{\partial t'^2}$$

したがって

$$\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\neq\Delta'-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}$$

次に A や ϕ の変換を考えなければならないが，(6.1.1) で与えられる Galilei 変換では空間の回転はないから明らかに $A'=A$, $\phi'=\phi$ である．

Newton 力学の基本的な枠組を構成する Galilei 変換を全面的に廃棄することは，日常周辺の自然現象の解明に果たした Newton 力学の偉大な役割を考えると，とてもできない相談である．そこで Galilei 変換の本質を残し，最小限の修正を行なうことによって d'Alembert の方程式の形を保存させることを試みよう．それには (6.1.1) の代りに

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -v \\ 0 & \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} & 0 \\ -\frac{v}{c^2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \tag{6.1.10}$$

とおけばよく，これによって

$$\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}=\Delta'-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2} \tag{6.1.11}$$

は厳密に成立することが直ちに示される．(6.1.10) を Ox 軸方向に相対速度 v をもった Lorentz 変換と呼ぶ．2つの座標系の相対速度 v が光速度 c に較べてはるかに小さいとき，すなわち

$$\frac{v}{c}\ll 1$$

では (6.1.10) は (6.1.1) に近似的に一致する．

このように見てくると，Lorentz 変換は Galilei 変換の自然な発展と考えることができる．しかし，この発展が内蔵している時空概念の変革が A. Einstein によって徹底した形でとりあげられたとき，物理学は大きな変貌をとげることに

なった. Einstein はまず, Lorentz 変換による物理法則の共変性を要請することによって, 特殊相対性理論を完成し, さらに Lorentz 変換の代りに一般の座標変換によっても物理法則は共変的に書かれねばならない, というさらに強い要請を課することによって, 一般相対性理論の構築に進んだ.

物理法則がその記述様式, あるいは表現形式といかに密接なかかわりあいをもっているかということは, 観測の問題とも深く結びついている. 本巻では量子力学的観測論には立ち入らない. その意味では, これからのべる相対論は古典物理学の範疇に入る. 量子論と相対論の統一への試みは種々なされてきたがその完成は今後に残されている大きな課題の1つである.

以上, われわれは相対性理論の形成過程を歴史的に忠実にたどるかわりに, 理論構造の発展に重点をおいて簡単に説明した. 次章以下においてもその方針で進む予定である. 科学史のこの部分については広重徹の論文・著書 [広重, 1, 2], U. I. Frankfurt の著書 [Frankfurt], 最近の論文としては N. L. Balazs の論文 [Balazs] などが参考になる.

ここでは読者の便を考え, 主として上記諸論文にもとづき, Lorentz 変換が見出され特殊相対性理論が生まれるにいたった歴史的経緯を簡単に述べることにする.

波動現象としての光の伝播に関する基本原理は 1690 年 C. Huygens (1629–95) によって今日彼の名を冠して呼ばれる原理の形で把握されていた (*Traité de la Lumière*, 1690). しかし, 光の干渉・回折を説明する本格的な光の波動論は T. Young (1773–1829) をもって嚆矢とする. ついで, これと独立に A. J. Fresnel (1788–1827) が媒質のことも考慮にいれた光の波動論を J. C. Maxwell の電磁論前の段階でほぼ完成した. 光を波動現象として把えようとすれば, 当然, その伝播作用の媒質は何であるかが問題になる. ところが光は "真空" 中でも伝播するから, "真空" 中にも通常の物質と異なった "何か" が存在しなければならない. これを当時はエーテル (ether) と呼んだ. しかし, 直接エーテルの性質を実験的に調べるのは困難であるから, 光を伝播する通常の物質, すなわち透明物質と光の関係を両者の相対速度を手がかりとして調べるのがよいであろう. 1818 年, Fresnel は, 速度 $\boldsymbol{v}_1$ で運動する屈折率 $\boldsymbol{n}$ の透明体はその内部に含まれるエーテルを $(1-1/\boldsymbol{n}^2)\boldsymbol{v}_1$ の速度で引きずって行くという説を弾性論の立場から導いた.

$1-1/n^2$ は今日 Fresnel の随伴係数(Fresnel's dragging coefficient)と呼ばれている．したがって屈折率 n の媒質が観測者に対して v_1 なる速さで運動しているとき，その媒質内での光の速さは c/n ではなく

$$v=\frac{c}{n}+\left(1-\frac{1}{n^2}\right)v_1 \tag{6.1.12}$$

となる．この関係は1851年 H. L. Fizeau (1819-96) によって実験的に確かめられた．実はこの関係は特殊相対論の簡単な例題の1つとして次章で説明する

$$v=\frac{c/n+v_1}{1+v_1/nc} \tag{6.1.13}$$

の $v_1{}^2$ 以上の項を無視した近似式になっている．その意味で Fresnel のこの仕事は特殊相対論発見の先駆的役割を果たしたということができる．

1864年，Maxwell が電磁場に関する Faraday の理論を数学的に整理して，光の電磁波説を導いたことは，本講座第1巻『古典物理学 I』で述べられているとおりであるが，それならば Fresnel の随伴係数も Maxwell の理論によって説明されなければならない．ただしその場合は誘電体内の電磁現象を物質構造を考えて扱わなければならないから，電子論的な考察が必要になる．この問題をとりあげ，精力的な研究を行なったのは H. A. Lorentz (1853-1928) である．彼はその研究過程において Lorentz 力および運動物体の短縮仮説を導入した．ほぼ同じ頃(少し前だという説もある)，G. F. Fitzgerald (1851-1901) は独立に短縮仮説を提唱していた．

Fresnel の随伴係数に照準をあてた Lorentz の仕事，とくに短縮仮説の定式化に現われる変換のもつ意味の重要性はまず J. H. Poincaré (1854-1912) によって指摘された(1900)．Poincaré 自身はすでに1895年，電磁気理論における運動の相対性を論じ，“エーテルに対する物質の運動を検出することは不可能である”と述べていた．Lorentz はこの Poincaré による高い評価と激励に応え，今日の特殊相対性理論とほとんど全く同じ定式化の段階にまで発展させた(1904)．Poincaré は直ちにこれを精細に検討し，Maxwell の方程式を厳密に保存する時空座標の変換の集合が群を作ること，そしてその群が M. S. Lie (1842-99) によって解析力学に導入された Lie 群の構造をもつことを明らかにし，この変換および群にそれぞれ Lorentz 変換(Lorentz transformation)，Lorentz 群(Lorentz group)の名称を与えた(1905).

一方，Fizeau によって開発された光の干渉実験は A. A. Michelson (1852-1931) に受けつがれ，Michelson の干渉計と呼ばれる精密な干渉計が発明された(1881). 1887 年 Michelson が E. W. Morley (1838-1923) と共同で行なった，絶対静止のエーテルに対する地球の相対運動を見出そうとする実験は Lorentz の仮説をますます強く支持する結果となった.

Poincaré は相対性原理の観点から，Newton 力学における Galilei 変換のもつ重要な意味を認識し，Maxwell の方程式を共変に保つためには Galilei 変換を拡張して Lorentz 変換にしなければならないことを明確に把握していた. しかし彼にとって Lorentz 変換はあくまで Maxwell-Lorentz の電気力学に密着したものであって，彼はそれが物理法則全般への普遍性をもつとは考えなかった. 当時の物理学者の水準をはるかに超える高度に数学的な手法を駆使したことが，彼の研究が物理学者の間に浸透しなかった理由の 1 つであるようにいわれているが，実は Poincaré 自身は "エーテルという存在の特異な性質" に悩み抜き，数学が得意とするはずの抽象化，一般化を行なうことができなかったと見るべきであろう.

まさにそのとき，1905 年，A. Einstein (1879-1955) が立て続けに 5 篇の論文を発表した. そのうちの 2 篇が特殊相対性理論に関するもの，2 篇は Brown 運動，1 篇は光量子仮説に関するものである. いずれも自然の離散的構造に対する彼の強い関心を反映したもので，見かけ上の相違にもかかわらず，相互に緊密な内的関連をもっている. 特殊相対性理論に関する第 1 論文は "運動物体の電気力学について" (Zur Elektrodynamik bewegter Körper) と題され，導線と磁石の相対運動がもたらす記述の非対称性に関する議論から始めて，光を信号とする古典的測定の内容が徹底的に検討されている. 第 2 論文はその重要な帰結の 1 つとして，質量とエネルギーとの等価性をはじめて示したものである ([Einstein (4)]). こうして Lorentz 変換がそれまでの時空観念を根本から揺がすものであることが Einstein によって見出されたのである.

第7章 Lorentz 変換

§7.1 光速度

Galileo は光の速度を測定しようとしたが，当時の幼稚な測定技術では光に速度が存在するかどうかの検証すら無理であった．その後，多くの人々の努力によって，光の速度の値は次第に精密に測定されるようになり，今日では物理量の中でも最も精密な測定値の1つということができる．光の速度は疑いもなく有限の値をもっていて，無限大では決してない．その値が Maxwell の方程式にあらわれる定数 c に一致することから，光は Maxwell の方程式の解として得られる電磁波に他ならないと結論したのは Maxwell であった．

われわれの日常経験からは有限な速度の値をもつならば，相対運動をしている2人の観測者に異なった値として観測されることがあってよいと考えても無理はないだろう．それゆえ Galilei 変換が光の伝播にも適用されるとする限り，一方で c でも，他方では $c-v$ あるいは $c+v$ として観測されるはずである．もしこの差違が実験的に検知されるならば，われわれは光の伝播に特定の媒質，あるいはそれに固定した座標系が存在し，他の座標系はそれに対して運動していると考えることができよう．

Michelson および Morley の精力的な実験は，このような予測に決定的な否の答をもたらした．この事実はわれわれの速度概念に深刻な反省を促さずにはおかなかった．速度の概念を物理的に規定するには，目盛りを刻んだ物差しと時計が必要である．しかし，それだけではない，それらを観測する操作が必要不可欠である．物差しおよび時計は外部的にしろ内部的にしろ何らかの力が働かない限り不変な形で存在するに違いないが，それを読み取る観測者が相互に運動している場合，同一の値を読み取るかどうかは，具体的な操作に即して検討されなくてはならない．すなわち思考実験による綿密な吟味が必要である．